АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ N -СВЯЗАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Г. Р. Оганесян, Е. А. Тароян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

Известно, что для линейного гармонического осциллятора отношение энергии к частоте есть адиабатический инвариант. В данной работе найдены новые адиабатические инварианты для обыкновенного линейного дифференциального уравнения порядка $2n$ (n -связанные осцилляторы). Знаменатели этих инвариантов стремятся к нулю, если какая-нибудь разность частот стремится к нулю (резонанс). Установлены оценки изменений рассмотренных инвариантов.

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $x(t, \epsilon)$ – решение уравнения линейного гармонического осциллятора

$$D_t^2 x + \omega^2(\epsilon t)x = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $D_t = d/dt$ и $\epsilon > 0$ – произвольный малый параметр. Отношение энергии к частоте

$$J(t, \epsilon) = \frac{[D_t x]^2 + \omega^2 x^2}{2\omega} = \frac{E}{\omega} \quad (1.0)$$

называется *адиабатическим инвариантом*, а полное изменение $J(t, \epsilon)$ определяется как $J(\epsilon) = J(\infty, \epsilon) - J(-\infty, \epsilon)$. В работах [1], [3], [4] показано, что $J(\epsilon) = O(\epsilon^\infty)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, если ω и x удовлетворяют некоторым условиям.

Рассмотрим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$D_t^{2n} x + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 D_t^{2(n-k)} x = 0, \quad (1.1)$$

где $D_t = \frac{d}{dt}$, $\omega_m = \omega_m(\epsilon t)$, $m = 1, \dots, n$, а $\epsilon > 0$ – произвольный малый параметр. Всюду ниже будем предполагать, что частоты $\{\omega_m(\tau)\}_{m=1}^n$, где $\tau = \epsilon t$, удовлетворяют следующим условиям :

(i) $\omega_m(\tau) \in C^{2n}(R)$, функции $\omega_m(\tau)$ - положительны и $\omega_m \neq \omega_k$, если $m \neq k$;

(ii) функции $\omega_m(\tau)$ имеют конечные, положительные пределы $\omega_m(\pm\infty) = \omega_m^\pm$ и $\omega_m^\pm \neq \omega_k^\pm$, если $m \neq k$;

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} |\omega_m^{(k)}(\tau)| d\tau < \infty$, $k = 1, \dots, 2n$.

Пусть $\varphi_j(t, \varepsilon)$ - некоторые функции, линейно независимые, $2n$ раз непрерывно дифференцируемые по $t \in R$, которые являются двойными асимптотическими решениями уравнения (1.1) вблизи бесконечности, т.е.

$$D_t^{k-1} \psi_j = [1 + \varepsilon \delta_{jk}(t, \varepsilon)] D_t^{k-1} \varphi_j, \quad j, k = 1, \dots, 2n,$$

где $\{\psi_j(t, \varepsilon)\}_{j=1}^{2n}$ - фундаментальная система решений (1.1), $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{jk}(t, \varepsilon) = 0$ и $|\delta_{jk}(t, \varepsilon)| \leq c$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Пусть $W(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}) = \det(D_t^{k-1} \varphi_j)_{k,j=1}^{2n}$ - вронскиан и $x(t, \varepsilon)$ - точное решение уравнения (1.1). Назовем величины

$$I_k(t, x, \varepsilon) = \left| \frac{W(\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}, x, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{2n})}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n})} \right|^2 + \varepsilon f_k(t, x, \varepsilon)$$

адиабатическими инвариантами уравнения (1.1). Здесь мы предполагаем, что функции $f_k(t, x, \varepsilon)$ для решений x , ограниченных со своими производными $D_t^k x$ $k = 0, \dots, 2n - 1$ в $R \times (0, \varepsilon_0)$, удовлетворяют следующим условиям: $\lim_{t \rightarrow \infty} f_k = 0$, $|f_k| \leq c$, где c - абсолютная константа. Взяв

$$\varphi_{12} = \omega^{-1/2} \exp \left[\pm i \int_0^t \omega(\varepsilon s) ds \right],$$

можно получить классическую формулу (1.0) для уравнения осциллятора. Обозначим

$$P_m = D_t^{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ m \notin \{i_p\}_{p=1}^k}} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 D_t^{2(n-k-1)},$$

$$K_{mi}(\tau) = \omega_m^2(\tau) - \omega_i^2(\tau); \quad K = \prod_{1 \leq m < l \leq n} K_{ml}, \quad E_m = (P_m(D_t x))^2 + \omega_m^2(P_m x)^2.$$

Можно заметить, что величины E_m - первые интегралы (1.1), т.е. $D_t E_m = 0$ для $\omega_m = \text{const}$. Подставляя в P_m $\tau = \varepsilon t$, получим оператор

$$L_m = \varepsilon^{2n-2} D_\tau^{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \\ m \notin \{i_p\}_{p=1}^k}} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 \varepsilon^{2(n-k-1)} D_\tau^{2(n-k-1)}.$$

В этой статье мы показываем (§3, Теорема 2), что если условия (i) – (iii) выполнены, то величины

$$J_m(t, x, \varepsilon) = \frac{E_m}{\omega_m} \exp \left(2 \int_0^{\varepsilon t} \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_\tau[\omega_l^2(\tau)]}{K_{ml}(\tau)} d\tau \right), \quad m = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

-адиабатические инварианты (1.1). Также мы показываем, что для решений $x = x(t, \varepsilon)$ уравнения (1.1), ограниченных со своими производными $D_t^k x$, $k = 1, \dots, 2n - 1$ при $t \in (-\infty, \infty)$ и $\varepsilon > 0$, инварианты $J_m(t, x, \varepsilon)$, $m = 1, \dots, n$ и

$$J_0(t, x, \varepsilon) = \frac{J_1 \cdots J_n}{K(0)^2} = \frac{E_1 \cdots E_n}{\omega_1 \cdots \omega_n K^2}$$

удовлетворяют следующим условиям :

1° существуют некоторые константы $C > 0$ и $\varepsilon' > 0$ такие, что

$$|J_k(t_1, x, \varepsilon) - J_k(t_2, x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon \quad (1.3)$$

для любых $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon'$;

$$2^\circ J_k(\varepsilon) = J_k(\infty, x, \varepsilon) - J_k(-\infty, x, \varepsilon) = O(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad k = 0, \dots, n. \quad (1.4)$$

Пример. Для уравнения четвертого порядка

$$D_t^4 x + [\omega_1^2(\varepsilon t) + \omega_2^2(\varepsilon t)] D_t^2 x + \omega_1^2(\varepsilon t) \omega_2^2(\varepsilon t) x = 0 \quad (1.5)$$

имеем

$$J_1(t, x, \varepsilon) = \frac{E_1}{\omega_1} \exp \left(2 \int_0^t \frac{D_t[\omega_2^2(\varepsilon t)]}{K} dt \right), \quad (1.6)$$

$$J_2(t, x, \varepsilon) = \frac{E_2}{\omega_2} \exp \left(-2 \int_0^t \frac{D_t[\omega_1^2(\varepsilon t)]}{K} dt \right), \quad (1.7)$$

$$J_0(t, x, \varepsilon) = \frac{J_1(t, x, \varepsilon) J_2(t, x, \varepsilon)}{K^2(0)} = \frac{E_1 E_2}{\omega_1 \omega_2 K^2}, \quad (1.8)$$

где

$$E_k = (D_t^3 x + \omega_{3-k}^2 D_t x)^2 + \omega_k^2 (D_t^2 x + \omega_{3-k}^2 x)^2, \quad K = \omega_1^2 - \omega_2^2.$$

§2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (1.1)

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$Lu = D_\tau^{2n} u + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 \varepsilon^{-2k} D_\tau^{2(n-k)} u = 0, \quad (2.1)$$

где $\tau = \varepsilon t$ и $u(\tau, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)$. Решения этого уравнения выражаются через корни $\pm(i\omega_m)/\varepsilon$ соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda^{2n} + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1}^2 \dots \omega_{i_k}^2 \varepsilon^{-2k} \lambda^{2(n-k)} = 0.$$

В силу обобщения асимптотической теоремы Левинсона ([7], Теорема 2) из (i) – (iii) следует, что для $\tau \in [T^+, \infty)$ существуют решения $\{u_j^+(\tau, \varepsilon)\}_{j=1}^{2n} \in C_\tau^{2n}([T^+, \infty))$ уравнения (2.1), представимые в виде

$$D_\tau^{k-1} u_j^+ = D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j [1 + h_{jk}^+(\tau, \varepsilon)], \quad 1 \leq j, k \leq 2n,$$

где при $m = 1, \dots, n$

$$\tilde{u}_{2m-1} = \omega_m^{-1/2} \exp \int_0^\tau \left(\frac{i\omega_m(t)}{\varepsilon} - \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_t[\omega_m^2(t)]}{K_{ml}(t)} \right) dt, \quad \tilde{u}_{2m} = \bar{\tilde{u}}_{2m-1}.$$

Функции $h_{jk}^+(\tau, \varepsilon)$ для некоторого $c > 0$ удовлетворяют оценке

$$c|h_{jk}^+(\tau, \varepsilon)| \leq \max_{1 \leq s, q \leq 2n} \left\{ \exp \int_\tau^\infty |\Phi_s^{2n} L \tilde{u}_q(t) W^{-1}(t, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n})| dt \right\} - 1.$$

Здесь $W(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n}) = \det \Phi$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 & \dots & \tilde{u}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_\tau^{2n-1} \tilde{u}_1 & \dots & D_\tau^{2n-1} \tilde{u}_{2n} \end{pmatrix}$$

и Φ_s^{2n} – миноры матрицы Φ , полученные вычеркиванием его $2n$ -ой строки и s -го столбца. Проверим, что из (i) – (iii) следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} D_\tau^k \omega_m(\tau) = 0, \quad k = 1, \dots, 2n - 1. \quad (2.2)$$

Действительно, так как

$$D_\tau \omega_1 = \int_a^\tau D_s^2 \omega_1(s) ds + D_\tau \omega_1(a),$$

то пределы $D_\tau \omega_1(\pm\infty)$ конечны. С другой стороны, существует $\int_{-\infty}^{\infty} D_s \omega_1 ds$. Следовательно, $D_\tau \omega_1(\pm\infty) = 0$ (см. [8]). Теми же рассуждениями завершим доказательство (2.2).

Используя (4.2), прямыми вычислениями получим

$$K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n}) = (-2i)^n + \varepsilon \rho(\tau, \varepsilon),$$

$$|L\tilde{u}_q| \leq \frac{C}{\varepsilon^{2n-2}}, \quad |\Phi_s^{2n}| \leq \frac{C}{\varepsilon^{(n-1)(2n-1)}},$$

где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Следовательно решения $\{u_j^+\}_{j=1}^{2n}$ примут вид

$$D_\tau^{k-1} u_j^+ = D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j [1 + \varepsilon \rho_{jk}^+(\tau, \varepsilon)], \quad 1 \leq j, k \leq 2n, \quad (2.3)$$

где $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \rho_{jk}^+(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_{jk}^+(\tau, \varepsilon)| \leq C$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \in [T^+, \infty)$.

Также существуют решения $\{u_j^-\}_{j=1}^{2n} \in C^{2n}((-\infty, T^-])$ уравнения (2.1), которые при $\tau \in (-\infty, T^-]$ могут быть представлены в виде

$$D_\tau^{k-1} u_j^- = D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j [1 + \varepsilon \rho_{jk}^-(\tau, \varepsilon)], \quad 1 \leq j, k \leq 2n, \quad (2.3')$$

где

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \rho_{jk}^-(\tau, \varepsilon) = 0, \quad |\rho_{jk}^-(\tau, \varepsilon)| \leq C(T)$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \in (-\infty, T^-]$. Предполагая u решением уравнения (2.1) при $[T^-, T^+]$ определим функции σ_j формулами

$$D_\tau^{k-1} u = \sum_{j=1}^{2n} \sigma_j D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Отсюда получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} D_\tau \sigma_j D_\tau^{m-1} \tilde{u}_j &= 0, \quad m = 1, \dots, 2n-1, \\ \sum_{j=1}^{2n} D_\tau \sigma_j D_\tau^{2n-1} \tilde{u}_j &= - \sum_{j=1}^{2n} \sigma_j L\tilde{u}_j, \end{aligned}$$

решениями которой являются

$$D_\tau \sigma_k = \sum_{j=1}^{2n} B_{jk} \sigma_j, \quad B_{jk} = -W^{-1}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{2n}) L\tilde{u}_j \Phi_k^{2n}.$$

Интегрируя $D_\tau \sigma_k$, получим

$$\sigma_k = C_k + \int_0^\tau \sum_{j=1}^{2n} B_{jk} \sigma_j ds, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Используя очевидную оценку

$$\sum_{j=1}^{2n} |\sigma_j| \leq \sum_{j=1}^{2n} |C_j| + 2n \int_0^\tau B \sum_{j=1}^{2n} |\sigma_j| ds,$$

где $B(s) = \max_{ij} |B_{ij}(s)| \leq C\varepsilon$, и хорошо известную лемму Гронуолла, получаем

$$\sum_{j=1}^{2n} |\sigma_j| \leq \sum_{j=1}^{2n} |C_j| \exp\left(2n \int_0^\tau B ds\right).$$

Следовательно

$$\varepsilon |\delta_k| \leq \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} |C_j| \left(\exp\left(2n \int_0^\tau B ds\right) - 1 \right),$$

где $\sigma_k = C_k + \varepsilon \delta_k$. Из условий

$$D_\tau^{k-1} u(T^+, \varepsilon) = D_\tau^{k-1} u_j^+(T^+, \varepsilon), \quad k = 1, \dots, 2n$$

следует, что

$$C_k + \varepsilon \delta_k(T^+, \varepsilon) = \begin{cases} 1 + \varepsilon a_j, & k = j, \\ \varepsilon a_k, & k \neq j, \end{cases} \quad \{a_i\}_{i=1}^{2n} = \text{const}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} |C_k| \left(2 - \exp\left(2n \int_0^{T^+} B ds\right) \right) &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{2n} (|C_k| - \varepsilon |\delta_k(T^+, \varepsilon)|) \leq \left| 1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{2n} a_k \right|. \end{aligned}$$

Следовательно C_k и δ_k ограничены по $\varepsilon > 0$ и

$$D_\tau^{k-1} u = D_\tau^{k-1} \tilde{u}_j [1 + \varepsilon \rho_{jk}(\tau, \varepsilon)], \quad |\rho_{jk}(\tau, \varepsilon)| \leq C.$$

Тем же путем можно продолжить решения (2.3) на $(-\infty, T^-]$. Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. Уравнение (2.1) имеет решения $u_j^\pm \in C_r^{2n}(R)$, $j = 1, \dots, 2n$ видов (2.3), (2.3'), где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho_{jk}^\pm(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_{jk}^\pm| < C$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \in (-\infty, \infty)$.

Легко можно проверить, что

$$K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W^\pm = (-2i)^n + o(1), \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad (2.4)$$

где $W^\pm = W(\tau, u_1^\pm, \dots, u_{2n}^\pm) = \det \Phi^\pm$ и

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} u_1^\pm & \dots & u_{2n}^\pm \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_\tau^{2n-1} u_1^\pm & \dots & D_\tau^{2n-1} u_{2n}^\pm \end{pmatrix}.$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известно, что $W^\pm$ не зависят от τ . Поэтому при $\tau \rightarrow \pm\infty$ (2.4)

$$K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W^\pm = (-2i)^n.$$

Так как $\{u_j^+\}_{j=1}^{2n}$ и $\{u_j^-\}_{j=1}^{2n}$ — фундаментальные решения уравнения (2.1), то любое решение u уравнения (2.1) представимо в виде

$$u = a_1^+ u_1^+ + \dots + a_{2n}^+ u_{2n}^+ = a_1^- u_1^- + \dots + a_{2n}^- u_{2n}^-, \quad (2.5)$$

где $\{a_j^\pm\}_{j=1}^{2n}$ зависят от ε . Введем матрицу

$$\alpha(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2n,1} & \dots & \alpha_{2n,2n} \end{pmatrix}, \quad (\alpha_{i,j} = \alpha_{i,j}(\varepsilon)),$$

определенную формулой

$$u^- = \alpha u^+, \quad \text{где} \quad u^\pm = \text{colon}(u_1^\pm, \dots, u_{2n}^\pm). \quad (2.6)$$

Используя очевидные равенства $\det \Phi^- = \det \Phi^+$,

$$\Phi^{-T} = (u^-, \dots, D_\tau^{2n-1} u^-) = \alpha(u^+, \dots, D_\tau^{2n-1} u^+) = \alpha \Phi^{+T}$$

и $\Phi^- = \Phi^+ \alpha^T$, где $u^\pm, \dots, D_\tau^{2n-1} u^\pm$ — вектор-столбцы, получим $\det \alpha = 1$.

Используя (2.5), можно легко показать, что

$$a^+ = \alpha^T a^-, \quad \text{где} \quad a^\pm = \text{colon}(a_1^\pm, \dots, a_{2n}^\pm). \quad (2.7)$$

Лемма 1. Если условия (i) – (iii) выполнены, то

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij} + O(\varepsilon). \quad (2.8)$$

Доказательство. Дифференцируя (2.6) k раз ($0 \leq k \leq 2n - 1$) и решая полученные системы по α_{ij} , получаем

$$\alpha_{ij} = \frac{W(\tau, u_1^+, \dots, u_{j-1}^+, u_i^-, u_{j+1}^+, \dots, u_{2n}^+)}{W^+}$$

и

$$\alpha_{ij} = \frac{W(\tau, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{j-1}, \tilde{u}_i, \tilde{u}_{j+1}, \dots, \tilde{u}_{2n})}{W^+} + \varepsilon \kappa_{ij}(\tau, \varepsilon), \quad (2.9)$$

где $1 \leq i, j \leq 2n$, $|\kappa_{ij}(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Теперь (2.8) легко следует из (2.9). Следовательно, если $\{a_j^-\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в некотором интервале $(0, \varepsilon_0)$, то $\{a_j^+\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в другом интервале $(0, \varepsilon_1)$.

§3. ОЦЕНКИ ИЗМЕНЕНИЙ АДИАБАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ

Лемма 2. Если условия (i) – (iii) выполнены и решение уравнения (2.1) представимо в виде (2.5), где $\{a_j^-\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в некотором интервале $(0, \varepsilon_0)$, то

$$4Q_m(0)^{-2} J_m(\varepsilon) = a_{2m-1}^+ a_{2m}^+ - a_{2m-1}^- a_{2m}^-, \quad m = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где $Q_m = \prod K_{ml}$, $1 \leq l \leq n$, $l \neq m$ и $J_m(\varepsilon)$ определены в (1.4).

Доказательство. Дифференцируя (2.5) k раз ($0 \leq k \leq 2n - 1$) и решая полученную систему по a_k , получаем $W_k^\pm = a_k^\pm$, где

$$W_k^\pm = (-2i)^{-n} K(0)^{-2} \varepsilon^{(2n-1)n} W(\tau, u_1^\pm, \dots, u_{k-1}^\pm, u, u_{k+1}^\pm, \dots, u_{2n}^\pm).$$

С другой стороны, используя ограниченность $\{a_j^\pm\}_{j=1}^{2n}$ и (4.4), получаем следующие две формулы:

$$W_{2m-1}^\pm = (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon L_m D_\tau u + i\omega_m L_m u}{2iQ_m(0)\omega_m^{1/2}} \exp \int_0^\tau \left(-\frac{i\omega_m(t)}{\varepsilon} + \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_l[\omega_l^2(t)]}{K_{ml}(t)} \right) dt + \varepsilon \rho_{2m-1}^\pm(\tau, \varepsilon),$$

$$W_{2m}^\pm = (-1)^n \frac{\varepsilon L_m D_\tau u - i\omega_m L_m u}{2iQ_m(0)\omega_m^{1/2}} \exp \int_0^\tau \left(\frac{i\omega_m(t)}{\varepsilon} + \sum_{l=1, l \neq m}^n \frac{D_l[\omega_l^2(t)]}{K_{ml}(t)} \right) dt +$$

$$+\varepsilon\rho_{2m}^{\pm}(\tau, \varepsilon),$$

где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Итак, если решение имеет вид (2.5), где $\{a_j^-\}_{j=1}^{2n}$ ограничены, то

$$\frac{J_m(t, x, \varepsilon)}{4Q_m(0)^2} = a_{2m-1}^- a_{2m}^- + \varepsilon \tilde{\rho}_m^-(t, \varepsilon) = a_{2m-1}^+ a_{2m}^+ + \varepsilon \tilde{\rho}_m^+(t, \varepsilon), \quad (3.2)$$

где $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon) = 0$ и $|\rho_m^{\pm}(\tau, \varepsilon)| \leq C$. Из (3.2) легко можно получить (3.1).

Теорема 2. Если условия (i) – (iii) выполнены и решение уравнения (2.1) имеет вид (2.5), где $\{a_j^-\}_{j=1}^{2n}$ ограничены в $(0, \varepsilon_0)$, то справедливы оценки (1.3) и (1.4).

Доказательство. Из (2.7) и (3.1) следует, что

$$4Q_m(0)^{-2} J_m(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{j, 2m-1} a_j^- \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{j, 2m} a_j^- - a_{2m-1}^- a_{2m}^-, \quad m = 1, \dots, n.$$

Из (2.8) следует, что $J_m(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Очевидно

$$\begin{aligned} K(0)^2 J_0(\varepsilon) &= K(0)^2 [J_0(\infty, x, \varepsilon) - J_0(-\infty, x, \varepsilon)] = \\ &= \sum_{m=1}^n \{J_1(\infty, x, \varepsilon) \dots J_{m-1}(\infty, x, \varepsilon) [J_m(\infty, x, \varepsilon) - J_m(-\infty, x, \varepsilon)] \times \\ &\quad \times J_{m+1}(-\infty, x, \varepsilon) \dots J_n(-\infty, x, \varepsilon)\} = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из (3.2) следует, что

$$|J_m(t_1, x, \varepsilon) - J_m(t_2, x, \varepsilon)| \leq C_m \varepsilon.$$

Так как

$$\begin{aligned} K(0)^2 [J_0(t_1, x, \varepsilon) - J_0(t_2, x, \varepsilon)] &= \sum_{m=1}^n \{J_1(t_1, x, \varepsilon) \dots J_{m-1}(t_1, x, \varepsilon) \times \\ &\quad \times [J_m(t_1, x, \varepsilon) - J_m(t_2, x, \varepsilon)] J_{m+1}(t_2, x, \varepsilon) \dots J_n(t_2, x, \varepsilon)\}, \end{aligned}$$

то имеем

$$|J_0(t_1, x, \varepsilon) - J_0(t_2, x, \varepsilon)| \leq C_0 \varepsilon.$$

Можно легко убедиться в том, что если решение (1.1) ограничено со своими соответствующими производными, то (2.1) имеет вид (2.5), где $\{a_j^-\}_{j=1}^{2n}$ ограничены.

Теорема доказана.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФОРМУЛ

Пусть $(a_{ij})^{2n+1} - (2n+1) \times (2n+1)$ -матрица. Предположим, что имеет место один из случаев:

- а) $a_{ij} = 0$, если $i + j$ четно,
 б) $a_{ij} = 0$, если $i + j$ нечетно.

Обозначим $b_{ij} = a_{2i-1, 2j-1}$, $c_{ij} = a_{2i, 2j}$

$$A_{2n+1} = \det(a_{ij})^{2n+1}, \quad B_{n+1} = \det(b_{ij})^{n+1}, \quad C_n = \det(c_{ij})^n$$

и докажем формулу

$$A_{2n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если а) выполнено,} \\ B_{n+1} C_n, & \text{если б) выполнено.} \end{cases} \quad (4.1)$$

В этой формуле первая строка правильна, т.е. детерминант равен нулю, так как $a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{2n+1,i_{2n+1}} = 0$. Заметим, что эти произведения будут отличны от нуля, только если индексы i_{2k+1} ($k = 0, \dots, n$) четны. Однако, число четных столбцов детерминанта равно n . Следовательно, $a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{2n+1,i_{2n+1}} = 0$.

Второй случай может быть доказан методом индукции. Имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Если $A_{2n-1} = B_n C_{n-1}$ и $\{a_{1,2j-1}\}_{j=1}^{n+1}, \{a_{2,2j}\}_{j=1}^n \neq 0$, то

$$\begin{aligned} A_{2n+1} &= a_{11} \dots a_{1,2n+1} a_{22} \dots a_{2,2n} \begin{vmatrix} \frac{a_{33} - a_{31}}{a_{13}} - \frac{a_{31}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{3,2n+1}}{a_{1,2n+1}} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{2n+1,3}}{a_{13}} - \frac{a_{2n+1,1}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{2n+1,2n+1}}{a_{1,2n+1}} - \frac{a_{2n+1,1}}{a_{11}} \end{vmatrix} \times \\ &\times \begin{vmatrix} \frac{a_{44} - a_{42}}{a_{24}} - \frac{a_{42}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{4,2n}}{a_{2,2n}} - \frac{a_{42}}{a_{22}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{2n,4}}{a_{24}} - \frac{a_{2n,2}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n,2n}}{a_{2,2n}} - \frac{a_{2n,2}}{a_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1,2n+1} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3,2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n+1,1} & a_{2n+1,3} & \dots & a_{2n+1,2n+1} \end{vmatrix} \times \\ &\times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2,2n} \\ a_{42} & a_{44} & \dots & a_{4,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n,2} & a_{2n,4} & \dots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить что последняя формула справедлива и без этих условий.

Приведем также хорошо известную формулу для детерминанта Ван дер Монда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{m-1} & \alpha_2^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i). \quad (4.2)$$

Методом индукции можно доказать формулу

$$\begin{vmatrix} f_0 & 1 & \dots & 1 \\ f_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m & \alpha_1^m & \dots & \alpha_m^m \end{vmatrix} = (-1)^m \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i) [f_m + \sum_{k=1}^m (-1)^k f_{m-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}]. \quad (4.3)$$

Теперь мы можем вычислить следующий детерминант :

$$A = \begin{vmatrix} u_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ u_1 & -x_1 & x_2 & -x_2 & \dots & x_n & -x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{2n-2} & x_1^{2n-2} & x_2^{2n-2} & x_2^{2n-2} & \dots & x_n^{2n-2} & x_n^{2n-2} \\ u_{2n-1} & -x_1^{2n-1} & x_2^{2n-1} & -x_2^{2n-1} & \dots & x_n^{2n-1} & -x_n^{2n-1} \end{vmatrix}$$

Путем элементарных преобразований получим

$$A = 2^{n-1} x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} u_0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ u_1 + x_1 u_0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{2n-2} & x_1^{2n-2} & 0 & x_2^{2n-2} & \dots & 0 & x_n^{2n-2} \\ u_{2n-1} + x_1 u_{2n-2} & 0 & x_2^{2n-2} & 0 & \dots & x_n^{2n-2} & 0 \end{vmatrix}$$

Воспользовавшись первой формулой в (4.1), получим

$$A = -2^{n-1} x_2 \dots x_n \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2^{2k-4} & 0 & \dots & x_n^{2k-4} & 0 \\ x_1^{2k-2} & 0 & x_2^{2k-2} & \dots & 0 & x_n^{2k-2} \\ 0 & x_2^{2k} & 0 & \dots & x_n^{2k} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{2n-2} & 0 & x_2^{2n-2} & \dots & 0 & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} (u_{2k-1} + x_1 u_{2k-2}).$$

Учитывая теперь (4.2) и вторую формулу в (4.1), получим

$$A = (-1)^n 2^{n-1} x_2 \dots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{2k-4} & \dots & x_n^{2k-4} \\ x_2^{2k} & \dots & x_n^{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{2n-2} & \dots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} (u_{2k-1} + x_1 u_{2k-2})$$

и

$$A = (-1)^n 2^{n-1} x_2 \dots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \begin{vmatrix} u_1 + x_1 u_0 & 1 & \dots & 1 \\ u_3 + x_1 u_2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2n-1} + x_1 u_{2n-2} & x_2^{2n-2} & \dots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix}.$$

И наконец, учитывая (4.3), находим

$$A = -2^{n-1} x_2 \dots x_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j^2 - x_i^2) \times \\ \times \left[u_{2n-1} + x_1 u_{2n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} ((-1)^k u_{2(n-k)-1} + x_1 u_{2(n-k)-2}) \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1}^2 \dots x_{i_k}^2 \right]. \quad (4.4)$$

ABSTRACT. The energy to frequency ratio is an adiabatic invariant for linear harmonic oscillators. In the paper some new adiabatic invariants are found for the linear ordinary differential equation of order $2n$ corresponding to n -connected oscillators. The denominators of these invariants vanish when differences of certain frequencies tend to zero (resonance). The variances of the invariants are estimated. A new definition of adiabatic invariants is proposed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, Наука, М., 1979.
2. М. В. Федорук, "Адиабатический инвариант системы нелинейных осцилляторов и теория рассеяния", Дифференц. уравнения, т. 12, № 6, стр. 1012-1018, 1976.
3. А. С. Бакай, Е. Г. Степановский, Адиабатические инварианты, Наукова Думка, Киев, 1981.
4. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, "Связанные осцилляторы в адиабатическом приближении", ДАН СССР, т. 161, стр. 213-231, 1965.
5. Г. М. Заславский, В. П. Мейтлис, Н. Н. Филоненко, Взаимодействие волн в неоднородной среде, Наука, Новосибирск, 1982.
6. Г. Р. Оганесян, "Единственность решения весовой задачи Коши и новая формула для энергии", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, № 5, стр. 376 - 386, 1991.
7. Г. Р. Оганесян, "Оценки для функций ошибок асимптотических решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений", Изв. НАН Армении, Математика, т. 31, № 1, стр. 9 - 28, 1996.
8. Л. Д. Кудрявцев, Курс математического анализа, т. 1, М. 1988.

15 июля 1995

Институт математики
НАН Армении
E-mail : instmath@pnas.sci.am