

ТЕОРЕМА ФАТУ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 6, 1996

В статье рассматриваются классы обобщенных аналитических функций такие, как пространства Харди, определенные в терминах рядов Фурье (пространства Харди-Хельсона-Лауденслэгера H^p) и пространства Харди, связанные с аналитическими почти периодическими функциями (пространства Харди-Бора H^p). Целью является распространение теоремы Фату о радиальных пределах на перечисленные выше пространства, а также на классы обобщенных гармонических функций (пространства Безикевича B^p и пространства типа Степанова S^p).

§0. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, пространство Харди в единичном круге можно определить двумя способами. Первый : те функции из L^p на единичной окружности, у которых отрицательные коэффициенты Фурье равны нулю, и второй : те аналитические функции в единичном круге, сужения которых на окружности (с центром в начале координат) равномерно ограничены в L^p -норме. При переходе к обобщенным аналитическим функциям эти два определения приводят к разным не эквивалентным классам (см. [1] – [12]). Пространства Харди, определенные в терминах рядов Фурье, были исследованы в известных работах Г. Хельсона и Д. Лауденслэгера [2], [3]. В дальнейшем такие пространства будем называть пространствами Харди-Хельсона-Лауденслэгера (H^p). Второе определение приводит к пространствам Харди, связанным с аналитическими почти периодическими функциями, т.е. к пространствам Харди-Бора (H^p).

Аналогичная ситуация возникает и при переходе к гармоническим функци-

ям. И тут возникают два класса обобщенных гармонических функций. Это пространства Безиковича (B^p) и пространства типа Степанова (S^p). Данная статья в основном посвящена распространению теоремы Фату о радиальных пределах на перечисленные выше пространства. В первых трех параграфах исследуются радиальные пределы пространств HB^p и S^p , $p \geq 1$. Предлагаемый здесь подход позволяет дать законченный результат о структуре пространств функций, порожденных этими пределами (см. [4], [5]). Отмечается, что пространства HB^p и S^p также являются банаховыми алгебрами относительно произведения Адамара. Полное описание идеалов этих алгебр дается в §4. В §5 исследуются пространства HL^p и B^p и для этих пространств доказывается аналог теоремы Фату.

§1. ОБОБЩЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть G – компактная абелева группа, и $\hat{G}$ – группа ее характеров. Предположим, $\hat{G}$ изоморфна аддитивной подгруппе Γ группы вещественных чисел $\mathbb{R}$. Для $a \in \Gamma$ пусть $\chi^a \in G$ – соответствующий характер. Каждую функцию $f \in \mathcal{L}^1(G, d\sigma)$, где σ – нормированная мера Хаара группы G , можно представить в виде формального ряда Фурье

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^f \chi^a$$

с коэффициентами Фурье

$$c_a^f = \int_G f \chi^{-a} d\sigma = \langle f, \chi^{-a} \rangle.$$

Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^f \neq 0$, называется спектром функции f ($\text{Sp} f$).

Пусть $C(G)$ – банахова алгебра всех непрерывных функций на G с нормой $\|f\|_\infty = \sup_G |f|$. Обозначим через A подалгебру тех функций из $C(G)$, спектр которых содержится в $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Тогда A – максимальная алгебра Дирихле, и ее пространство максимальных идеалов есть компакт Δ , полученный из декартова произведения $G \times [0, 1]$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$. В дальнейшем 0 будет обозначать эту точку. Множество Δ – полугруппа с единицей $\alpha_0 \cdot 1$ (α_0 – единица группы G) и нулем 0 . Произведение элементов $\xi = \alpha\tau$ и $\eta = \beta\rho$ из Δ есть $\xi\eta = (\alpha\beta)(\tau\rho)$. Группу G можно отождествлять с множеством $G \times \{1\}$, а отрезок $(0, 1]$ – с $\{\alpha_0\} \times (0, 1]$.

Везде в дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что Γ не изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, так как в противном случае круг вопросов, рассматриваемых в данной работе, хорошо известен.

Обозначим через $C(\Delta^0)$, где $\Delta^0 = \Delta \setminus G$, пространство всех непрерывных функций на Δ^0 . Для $r > 1$ отображение $f \rightarrow f_r$, $f_r(\alpha\rho) = f(\alpha r\rho)$ задает гомоморфизм на $C(\Delta^0)$. Сужение этого гомоморфизма на преобразование Гельфанда $\hat{A}$ алгебры A порождает инъективный гомоморфизм на $\hat{A}$.

Определение 1.1. Функция $f \in C(\Delta^0)$ называется обобщенной аналитической функцией, если $f_r \in \hat{A}$ для всех $r < 1$.

Пространство всех обобщенных аналитических функций будем обозначать через $\mathcal{V}(\Delta^0)$.

Для $\xi \in \Delta^0$ пусть m_ξ – представляющая мера этой точки для алгебры A . Так как A – алгебра Дирихле, то m_ξ – единственная представляющая мера точки ξ . В [1] показано, что свертка $m_\xi * m_\eta$ совпадает с мерой $m_{\xi\eta}$, т.е. для любой функции $f \in C(G)$

$$\iint_{G \times G} f(\alpha\beta) dm_\xi(\alpha) dm_\eta(\beta) = \int_G f(\alpha) dm_{\xi\eta}(\alpha). \quad (1.1)$$

Определение 1.2. Функция $f \in C(\Delta^0)$ называется обобщенной аналитической функцией или просто гармонической, если для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$ выполняется равенство

$$f_{r_1}(\alpha) = \int_G f_{r_2}(\alpha\beta) dm_r(\beta) = (f_{r_2} * m_r)(\alpha), \quad (1.2)$$

где $m_r = m_{\alpha_0 r}$, $r = r_1/r_2$.

Каждый характер χ^a группы G можно непрерывно расширить до гармонической функции φ^a , полагая

$$\varphi^a(\alpha r) = \chi^a(\alpha) r^{|a|}. \quad (1.3)$$

В дальнейшем конечные комбинации $\sum c_n \varphi^{a_n}$ будем называть обобщенными гармоническими полиномами.

Пусть $S(\Delta^0)$ – пространство обобщенных гармонических функций. Очевидно, $\mathcal{V}(\Delta^0) \subset S(\Delta^0)$.

Лемма 1.1. Пусть $f \in S(\Delta^0)$. Если $0 < r_1 < r_2 < 1$, то

$$\sup_G |f_{r_1}(\alpha)| \leq \sup_G |f_{r_2}(\alpha)|.$$

Доказательство. Полагая $r = r_1/r_2$, из (1.2) имеем

$$\sup_G |f_{r_1}(\alpha)| \leq \int_G \sup_{\alpha} |f_{r_2}(\alpha\beta)| dm_r(\beta) \leq \sup_G |f_{r_2}(\alpha)|$$

(m_r – вероятностная мера) •

Воспользовавшись равенством (1.2), нетрудно проверить, что $S(\Delta^0) = S_{\mathbf{R}}(\Delta^0) + iS_{\mathbf{I}}(\Delta^0)$, где $S_{\mathbf{R}}(\Delta^0)$ – пространство всех вещественных гармонических функций.

Пусть $C\tau(\Delta)$ – пространство всех непрерывных функций на Δ , гармонических в Δ^0 .

Лемма 1.2. Сужение $C\tau(\Delta)$ на G есть $C(G)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ – семейство всех гармонических полиномов. Очевидно, $\mathcal{P} \subset C\tau(\Delta)$ и для всех $p \in \mathcal{P}$ справедливо $\sup_G |p| = \sup_{\Delta} |p|$ (лемма 1.1). Из непрерывности (1.2) в $\sup_{\Delta}$ -норме следует, что замыкание $\mathcal{P}$ в $\sup_{\Delta}$ -норме содержится в $C\tau(\Delta)$. Сужение $\mathcal{P}$ на G плотно в $C(G)$, следовательно, $C\tau(\Delta)|_G = C(G)$.

Функцию $f \in C(\Delta^0)$ можно разложить на $G_r = G \times \{r\}$ в ряд

$$f_r(\alpha) \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^f(r) \chi^a(\alpha) r^{|a|},$$

где $f_r(\alpha) = f(\alpha r)$, а коэффициенты

$$c_a^f(r) = \frac{1}{r^{|a|}} \int_G f_r(\alpha) \chi^{-a}(\alpha) d\sigma(\alpha),$$

вообще говоря, не зависят от r .

Отметим, что $c_a^f(r)$ – непрерывная функция на r .

Лемма 1.3. Функция $f \in C(\Delta^0)$ гармоническая тогда и только тогда, когда для всех $a \in \Gamma$ коэффициенты $c_a^f(r)$ не зависят от r .

Доказательство. Пусть $f \in S(\Delta^0)$. Для $0 < r_1 < r_2 < 1$ и $r = r_1/r_2$ имеем

$$\begin{aligned} c_a^f(r_1) &= \frac{1}{r_1^{|a|}} \int_G \left(\int_G f_{r_2}(\alpha\beta) dm_r(\beta) \right) \chi^{-a}(\alpha) d\sigma(\alpha) = \\ &= \frac{1}{r_1^{|a|}} \int_G \left(\int_G f_{r_2}(\alpha\beta) \chi^{-a}(\alpha) d\sigma(\alpha) \right) dm_r(\beta) = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{|a|} c_a^f(r_2) \int_G \chi^a(\beta) dm_r(\beta). \end{aligned}$$

Так как последний интеграл равен значению функции φ^a в точке $\alpha_0 r$, т.е. числу $(r_1/r_2)^{|a|}$, то $c_a^f(r_1) = c_a^f(r_2) = c_a^f$. Обратно, пусть $f \in C(\Delta^0)$ — такая функция, что c_a^f не зависит от r для всех $a \in \Gamma$. Зафиксируем $\rho < 1$, и пусть $g = f_\rho$. Тогда $g \in C(\Delta)$ и $c_a^g = c_a^f \rho^{|a|}$ для всех $a \in \Gamma$. По лемме 1.2 найдется такая функция $h \in Cr(\Delta)$, что $g = h$ на G . Отсюда $c_a^h = c_a^g$ для всех $a \in \Gamma$. Следовательно, в силу единственности ряда Фурье, $h = g$, т.е. $g \in S(\Delta^0)$. Поэтому для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$ справедливо

$$f_{r_1}(\alpha\rho) = \int_G f_{r_2}(\alpha\beta\rho) dm_r(\beta), \quad r = r_1/r_2.$$

Устремляя $\rho \rightarrow 1$, получим $f \in S(\Delta^0)$ •

Пусть теперь $\rho = e^{-1}$ ($e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$). Обозначим через $S^p(\Delta^0)$, $p < \infty$ семейство тех функций $f \in S(\Delta^0)$, для которых

$$\|f\|_p = \sup_{r < 1} \sup_{\alpha \in G} \left(\int_G |f_r(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\beta) \right)^{1/p} < \infty. \quad (1.4)$$

Если $p = \infty$, то

$$S^\infty(\Delta^0) = \left\{ f \in S(\Delta^0): \|f\|_\infty = \sup_{\xi \in \Delta^0} |f(\xi)| < \infty \right\}. \quad (1.5)$$

Отметим, что

$$S^p(\Delta^0) = S_{\mathbb{R}}^p(\Delta^0) + iS_{\mathbb{I}}^p(\Delta^0),$$

где $S_{\mathbb{R}}^p(\Delta^0)$ — пространство вещественных функций из $S^p(\Delta^0)$.

Лемма 1.4. Если $0 < r_1 < r_2 < 1$ и $f \in S(\Delta^0)$, то при $p \geq 1$ выполняется неравенство

$$\sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_1}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha) \leq \sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_2}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha).$$

Доказательство. Пусть $r = r_1/r_2$. Воспользовавшись неравенством Гёльдера и теоремой Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_1}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha) &= \sup_{\beta \in G} \int_G \left| \int_G f_{r_2}(\alpha\beta\gamma) dm_r(\gamma) \right|^p dm_\rho(\alpha) \leq \\ &\leq \sup_{\beta \in G} \iint_{G \times G} |f_{r_2}(\alpha\beta\gamma)|^p dm_\rho(\alpha) dm_r(\gamma) \leq \sup_{\beta \in G} \int_G |f_{r_2}(\alpha\beta)|^p dm_\rho(\alpha). \end{aligned}$$

Приведем три утверждения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 1.1 (см. [6]). $S^p(\Delta^0)$ – банахово пространство в норме $\|\cdot\|_p$.

Обозначим $HB^p(\Delta^0) = S^p(\Delta^0) \cap \mathcal{V}(\Delta^0)$. Пусть $M(G)$ – пространство всех регулярных борелевских мер на группе G .

Теорема 1.2 ([4]). Пусть $f \in S^p(\Delta^0)$, $1 \leq p \leq \infty$ или $f \in HB^p(\Delta^0)$. Тогда

- а) предел $f^*(\alpha) = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\alpha)$ существует по мере m_ξ для всех $\xi \in \Delta^0$;
- б) $f^*(\alpha) \in \bigcap_{\xi \in \Delta^0} L^p(G, dm_\xi)$;
- в) если $1 < p < \infty$, то для всех $\xi \in \Delta^0$

$$\|f_r\|_{L^p(G, dm_\xi)} \rightarrow \|f^*\|_{L^p(G, dm_\xi)} \quad \text{при} \quad r \rightarrow 1;$$

- г) при $r \rightarrow 1$

$$\|f_r\|_{L^\infty(G, dm_\xi)} \rightarrow \|f^*\|_{L^\infty(G, dm_\xi)};$$

- д) если $p = 1$, то последовательность мер $f_r m_r$ сходится при $r \rightarrow 1$ в слабой топологии к некоторой мере $\mu \in M(G)$ и $\|\mu\|_\infty = \lim_{r \rightarrow 1} \|f_r m_r\|_\infty$, где $\|\cdot\|_\infty$ – норма в $M(G)$.

Замыкание $C_r(\Delta)$ в норме пространства $S^p(\Delta^0)$ будем обозначать через $C_r^p(\Delta)$.

Теорема 1.3 ([12]). Для всех $1 \leq p \leq \infty$ $C_r^p(\Delta^0)$ – замкнутое собственное подпространство пространства $S^p(\Delta^0)$.

В дальнейшем пространство функций $\left\{ f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r : f \in S^p(\Delta^0) \right\}$ будем обозначать через S^p , а пространство $\left\{ f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r : f \in C_r^p(\Delta^0) \right\}$ – через C_r^p .

Непосредственным следствием теорем 1.2 и 1.3 является

Теорема 1.4. а) $C_r^p \subset S^p$, $1 < p \leq \infty$;

- б) если $1 \leq p < \infty$, то S^p и C_r^p – банаховы пространства в норме

$$\|f^*\|_p = \sup_{\beta \in G} \left(\int_G |f^*(\beta \alpha)|^p dm_p(\alpha) \right)^{1/p} = \|f\|_p.$$

§2. ПРОСТРАНСТВА S^p , $1 < p < \infty$

Пусть $L^p(G, dm_p)$ – пространство всех функций, интегрируемых в L^p -норме по мере m_p ($p = e^{-1}$). Обозначим через $L_A^p(G)$, $1 < p < \infty$, семейство всех

тех измеримых функций, которые удовлетворяют следующему условию : для $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$ и $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$, $q = \frac{p}{p-1}$ функция

$$f^g(\beta) = \int_G f(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha) \quad (2.1)$$

непрерывна на G .

Теорема 2.1. $\mathcal{L}_A^p(G)$ – банахово пространство в норме

$$\|f\|_p = \left(\sup_{\beta \in G} \int_G |f(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$. Покажем, что $\|f\|_p < \infty$. Из (2.1) следует, что семейство непрерывных линейных функционалов, F_β , $\beta \in G$, определенных на $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$ формулой

$$F_\beta(g) = \int_G f(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha),$$

удовлетворяет неравенству

$$|F_\beta(g)| \leq C = \sup_G |f^g|.$$

Применяя теорему Банаха–Штейнгауза к семейству функционалов F_β , $\beta \in G$, получим

$$\sup_{\beta} \|F_\beta\|_q^* < \infty, \quad (2.3)$$

где $\|F_\beta\|_q^*$ – норма функционала F_β в пространстве, сопряженном к $L^q(G, dm_\rho)$.

И поскольку

$$\|F_\beta\|_q^* = \left(\int_G |f(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p},$$

из (2.3) следует, что $\|f\|_p < \infty$.

Покажем теперь, что $\mathcal{L}_A^p(G)$ полно в норме (2.1). Пусть $\{f_n\}$ – последовательность Коши функций из $\mathcal{L}_A^p(G)$. Тогда при каждом фиксированном $\beta \in G$ семейство $\{f_n(\beta \alpha)\}$ будет последовательностью Коши в пространстве $\mathcal{L}^p(G, dm_\rho)$. Пусть $f_0(\beta \alpha)$ – предел этой последовательности. Из (2.1) следует, что для любого $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$ последовательность

$$f_n^g(\beta) = \int_G f_n(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha)$$

фундаментальна в $C(G)$. Поэтому функция

$$f_0^g(\beta) = \int_G f_0(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha)$$

непрерывна на G . Отсюда $f_0(\beta) \in \mathcal{L}_A^p(G)$ •

Для $t \in \mathbb{R}$ определим $\alpha_t(a) = e^{iat} \in G$, $a \in \Gamma$. Хорошо известно, что отображение $t \rightarrow \alpha_t$ порождает плотное вложение вещественной оси $\mathbb{R}$ в группу G . Это вложение отображает меру Пуассона

$$\frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (t_0 - t)^2} dt, \quad y > 0 \quad (2.4)$$

в меру m_ξ , где $\xi = \alpha_{t_0} e^{-y}$. В частности, меру m_ρ можно отождествить с мерой $\frac{1}{\pi} \frac{dt}{1+t^2}$ и, следовательно

$$\mathcal{L}^q(G, dm_\rho) = \mathcal{L}^q\left(\mathbb{R}, \frac{dt}{1+t^2}\right). \quad (2.5)$$

Пусть $K_\rho^\xi(\alpha)$ — производная Радона–Никодима меры m_ξ , где $\xi = \alpha_t e^{-y}$ относительно меры m_ρ . Так как эти меры взаимно абсолютно непрерывны, то $m_\xi = K_\rho^\xi m_\rho$.

Обозначим через $\mathcal{L}$ линейное многообразие, порожденное функциями K_ρ^ξ , $\xi = \alpha_t e^{-y}$, $t \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

Лемма 2.1. $\mathcal{L}$ плотно в банаховом пространстве $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}^p(G, dm_\rho)$ — такая функция, что

$$\int_G f g dm_\rho = 0$$

для всех $g \in \mathcal{L}$. Отсюда в силу (2.4) и (2.5) для всех $y > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha_t) \frac{y dt}{y^2 + (t_0 - t)^2} = 0.$$

Так как интеграл Пуассона от ненулевой функции не обращается в нуль, то $f \equiv 0$. Пространство, сопряженное к $\mathcal{L}^q$ есть $\mathcal{L}^p$. Поэтому по теореме о биполярах $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{L}^q$ •

Лемма 2.2. Функцию $f^* \in \mathcal{L}_A^p(G)$ можно расширить до функции $f \in S^p(\Delta^0)$ так, что $f^*(\alpha) = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\alpha)$ для почти всех $\alpha \in G$ по мерам m_ξ , $\xi \in \Delta^0$.

Доказательство. Поскольку $m_r = K_r^* m_\rho$ и $K_\rho^* \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$, то из определения пространства $\mathcal{L}_A^p(G)$ следует, что функция

$$f_r(\beta) = \int_G f^*(\beta \alpha) dm_r(\alpha)$$

непрерывна на G . Если $r \rightarrow r_0$, то $K_r^* \rightarrow K_{r_0}^*$ в норме пространства $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$. Отсюда функция $f(\beta r) = f_r(\beta)$ непрерывна на Δ^0 . Подсчитаем коэффициенты $c_a^f(r)$, $a \in \Gamma$:

$$c_a^f(r) = \frac{1}{r|a|} \iint_{G \times G} f^*(\alpha \beta) \chi^{-a}(\beta) d\sigma(\beta) dm_r(\alpha) = \frac{c_a^{f^*}}{r|a|} \int_G \chi^a(\alpha) dm_r(\alpha) = c_a^{f^*}.$$

Воспользовавшись леммой 1.3, получим $f \in S(\Delta^0)$. Покажем, что $f \in S^p(\Delta^0)$.

Действительно

$$\sup_{\substack{r < 1 \\ \beta \in G}} \left(\int_G |f_r(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p} \leq \sup_{\substack{r < 1 \\ \beta \in G}} \left(\int_G \left| \int_G f^*(\beta \alpha \gamma) dm_r(\gamma) \right|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p}.$$

Применив к внутреннему интегралу неравенство Гёльдера, а затем используя теорему Фубини, получим $\|f\|_p \leq \|f^*\|_p$.

Таким образом, $\mathcal{L}_A^p$ содержится в S^p .

Теорема 2.2. $S^p = \mathcal{L}_A^p(G)$.

Доказательство. Пусть $f^* \in S^p$ и $f \in S^p(\Delta^0)$ — такая функция, что $f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r$.

Для $\xi \in \Delta^0$ функция

$$f_\xi(\beta) = \int_G f^*(\beta \alpha) dm_\xi(\alpha) = \int_G f^*(\beta \alpha) K_\rho^\xi(\alpha) dm_\rho(\alpha) \quad (2.6)$$

непрерывна на G . Очевидно

$$\sup_{\beta \in G} |f_\rho^g(\beta)| = \|f_\rho^g\|_\infty \leq \|f^*\|_p \|g\|_q, \quad (2.7)$$

где

$$f_\rho^g(\beta) = \int_G f^*(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha), \quad g \in \mathcal{L}^q(G, dm_\rho).$$

Так как $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{L}^q(G, dm_p)$, то из (2.6) и (2.7) следует, что f_p^g можно на G равномерно приблизить линейными комбинациями функций f_ξ , $\xi \in \Delta^0$. Поэтому f_p^g — непрерывная функция и, следовательно, $f^* \in \mathcal{L}_a^p(G)$. Теперь, воспользовавшись леммой 2.2, получим $S^p = \mathcal{L}_a^p(G)$.

Определим на $\mathcal{L}_a^p(G)$ слабую топологию. За базу окрестностей функции $f_0 \in \mathcal{L}_a^p(G)$ возьмем множество вида

$$U(f_0; g_1, \dots, g_n, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{L}_a^p(G) : \|f^{g_i} - f_0^{g_i}\|_\infty < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

где $\varepsilon > 0$ и $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$.

Скажем, что сеть $\{f_i\}_I \subset \mathcal{L}_a^p(G)$ слабо сходится, если существует такая функция $f \in \mathcal{L}_a^p(G)$, что для всех $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$ справедливо

$$\lim_I \|f_i^g - f^g\|_\infty = 0.$$

В дальнейшем слабую и равномерную сходимости будем обозначать, соответственно, $f = \omega - \lim_I f_i$ и $f^q = \|\cdot\|_\infty - \lim_I f_i^q$.

Теорема 2.3. Пространство $\mathcal{L}_a^p(G)$ слабо полно, т.е. если сеть $\{f_i^g\}_I$ фундаментальна в $C(G)$ для всех $g \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$, то найдется такая функция $f_0 \in \mathcal{L}_a^p(G)$, что

$$f_0 = \omega - \lim_I f_i.$$

Доказательство. Пусть K_p^r — производная Радона–Никодима меры m_r относительно m_p . Тогда функции

$$\widehat{f}_i(\beta r) = \int_G f_i(\alpha \beta) K_p^r(\alpha) dm_p(\alpha)$$

принадлежит $S^p(\Delta^0)$. Так как $K_p^r \in \mathcal{L}^q(G, dm_p)$, то предел

$$\widehat{f}_r(\beta) = \widehat{f}(\beta r) = \|\cdot\|_\infty - \lim_I \widehat{f}_i(\beta r) \quad (2.8)$$

существует при каждом фиксированном $r < 1$. Поскольку все $f_i \in S^p(\Delta^0)$, $i \in I$, из (2.8) и леммы 1.4 следует, что $f \in S(\Delta^0)$. Покажем, что $f \in S^p(\Delta^0)$.

Пусть $F: \mathcal{L}^q(G, dm_\rho) \rightarrow C(G)$ – линейный оператор, порожденный сетью f_i , $i \in I$: $F(g) = \|\cdot\|_\infty - \lim_I f_i^g$. Расширим функцию $F(g)$ до функции $\widehat{F}(g) \in Cr(\Delta)$. Согласно лемме 1.1

$$\limsup_I \sup_{\Delta} |\widehat{F}(g) - \widehat{f}_i^g| = \lim_I \|F(g) - f_i^g\|_\infty = 0.$$

Следовательно

$$\|\cdot\|_\infty - \lim_{r \rightarrow 1} \widehat{f}_r^g = \|\cdot\|_\infty - \lim_{r \rightarrow 1} \lim_I (f_i^g)_r = F(g).$$

Применяя снова теорему Банаха–Штейнгауза к семейству непрерывных операторов

$$F_r: \mathcal{L}^q(G, dm_\rho) \rightarrow C(G),$$

где $F_r(g) = \widehat{f}_r^g$, а операторная норма F_r равна $\|f_r\|_p$, получим, что семейство F_r , $r \in (0, 1)$ равномерно ограничено. Пусть E – единичный шар в $\mathcal{L}^q(G, dm_\rho)$. Тогда

$$\|F_r\| = \sup_{\beta \in G} \sup_{g \in E} \left| \int_G \widehat{f}_r(\beta \alpha) g(\alpha) dm_\rho(\alpha) \right| = \sup_{\beta \in G} \left| \int_G |\widehat{f}(\beta r)|^p dm_\rho(\alpha) \right|^{1/p} < c,$$

где постоянная c не зависит от r . Поэтому $\widehat{f} \in S^p(\Delta^0)$. Отсюда $f \in S^p$ •

Теорема 2.4. Пространство $C(G)$ слабо плотно в $\mathcal{L}_A^p(G)$.

Доказательство. Если $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$, то $\widehat{f}_r \in C(G)$ и $f = \omega - \lim_{r \rightarrow 1} f_r$ •

Все теоремы данного параграфа имеют аналоги в теории обобщенных аналитических функций.

Пусть НВ^p – множество всех функций $f \in \mathcal{L}_A^p(G)$ таких, что спектр $S_p f$ содержится в Γ_+ . Используя ту же технику, которая была приведена выше, можно доказать следующее.

Теорема 2.5. а) Пространство НВ^p , $1 < p < \infty$, является слабо замкнутым подпространством пространства $\mathcal{L}_A^p(G)$;

б) НВ^p – банахово пространство в норме

$$\|f\|_p = \sup_{\beta \in G} \left(\int_G |f(\beta \alpha)|^p dm_\rho(\alpha) \right)^{1/p};$$

в) HB^p совпадает с пространством

$$\left\{ f^* = \|\cdot\|_p - \lim_{r \rightarrow 1} f_r : f \in HB^p(\Delta^0) \right\}.$$

Теорема 2.6. а) Замыкание A в норме $\|\cdot\|_p$ есть собственное подпространство в HB^p ;

б) A слабо плотно в HB^p .

§3. ПРОСТРАНСТВА $S^1(\Delta^0)$

В данном параграфе изучим радиальные пределы функций из $S^1(\Delta^0)$. Для обобщенных гармонических функций существуют два подхода к исследованию этих пределов.

I. Пусть $M(G)$ – пространство всех регулярных борелевских мер на G . Каждую меру $\mu \in M(G)$ можно представить в виде формального ряда Фурье–Стилтьеса

$$\mu \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^\mu \chi^a$$

с коэффициентами Фурье–Стилтьеса

$$c_a^\mu = \int_G \chi^{-a} d\mu.$$

Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^\mu \neq 0$, называется спектром меры μ и обозначается через $S_p \mu$. Заметим, что так как

$$\int_G \chi^a dm_r = r^{|a|}, \quad (3.1)$$

то $S_p m_r = \Gamma$ для всех $0 < r < 1$. Поэтому спектр свертки $\mu_r = \mu * m_r$ совпадает с $S_p \mu$.

Лемма 3.1. Пусть $f \in S^1(\Delta^0)$ и $\mu(\alpha) = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Тогда $\mu * m_r = f_{r\rho}(\alpha) d\sigma(\alpha)$.

Доказательство. Поскольку a -тый коэффициент Фурье–Стилтьеса свертки двух мер равен произведению a -тых коэффициентов сомножителей, то из (3.1) следует, что a -тый коэффициент меры $\mu * m_r$ совпадает с $c_a^f(r\rho)^{|A|}$. Из леммы 1.3 следует, что $c_a^f(r\rho)^{|A|}$ – a -тый коэффициент меры $f_{r\rho}(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Поэтому эти меры равны •

Пусть $S^1(\sigma)$ – семейство тех мер $\mu \in M(G)$, для которых мера $\mu_r = \mu * m_r$ представима в виде $f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$, где $f_r(\alpha) \in C(G)$ и

$$\sup_{\substack{r < 1 \\ \beta \in G}} \int_G |f_r(\alpha)| dm_\rho(\beta \alpha) < \infty. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1 (ср. [7]). Отображение $\mu_r \rightarrow f_r$ порождает взаимно однозначное отображение пространства $S^1(\sigma)$ на $S^1(\Delta^0)$.

Доказательство. Для фиксированного $f \in S^1(\Delta^0)$ определим семейство мер $\mu_r = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$, $0 < r < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mu_r\|_\infty &= \int_G |f_r(\alpha)| d\sigma(\alpha) = \iint_{G \times G} |f_r(\alpha \beta)| d\sigma(\alpha) dm_\rho(\beta) \leq \\ &\leq \int_G \left(\sup_{r < 1} \int_G |f_r(\alpha \beta)| dm_\rho(\beta) \right) d\sigma(\alpha) = \|f\|_1, \end{aligned}$$

поэтому найдутся последовательность $r_n \rightarrow 1$ и мера $\mu \in M(G)$ такие, что $\mu = \omega^* - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{r_n}$. Из $\mu_r = \mu * m_r = \omega^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{r_n} * m_r) = \|\cdot\|_\infty - \lim_{n \rightarrow \infty} f_r(\alpha r_n) d\sigma(\alpha) = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$, поскольку $f_n \in C(G)$, мы заключаем, что $\mu \in S^1(\sigma)$.

Из единственности ряда Фурье–Стилтьеса и равенства $S_\rho m_r = \Gamma$ следует независимость μ от выбора последовательности $r_n \rightarrow 1$. Пусть теперь $\mu \in S^1(\sigma)$ и $\mu_r = f_r(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Покажем, что функция $f(\alpha r) = f_r(\alpha)$ принадлежит $S^1(\Delta^0)$. Так как $\mu * m_r = f_r d\sigma$, то $c_a^\mu r^{|a|} = c_a^{f_r} r^{|a|}$ для всех $a \in \Gamma$. Отсюда, из леммы 1.3 и формулы (3.2) следует $f \in S^1(\Delta^0)$ •

Отметим, что для любого $f \in C(G)$ мера $\mu^f = f d\sigma \in S^1(\sigma)$. Поэтому замыкание $S^1(\sigma)$ в норме пространства $M(G)$ содержит меры вида $g d\sigma$, где $g \in \mathcal{L}^1(G, d\sigma)$. Но не каждую интегрируемую по мере σ функцию можно расширить до гармонической функции на Δ^0 . Отсюда следует, что $S^1(\sigma)$ не замкнуто на $M(G)$.

II. Каждой функции $f \in S^1(\Delta^0)$ поставим в соответствие семейство мер $\mu^f = \{\mu_\beta^f\}_{\beta \in G}$, где

$$\mu_\beta^f = \omega^* - \lim_{r \rightarrow 1} f_r(\alpha) dm_\rho(\beta^{-1} \alpha)$$

(существование μ_β^f следует из теоремы 1.2 д)). Семейство мер μ^f , $f \in S^1(\Delta^0)$ обозначим через $S^1(m_\rho)$. Очевидно $\mu^f + \mu^g = \mu^{f+g}$.

Теорема 3.2. а) $S^1(m_\rho)$ – банахово пространство в норме

$$\|\mu^f\|_\infty = \sup_{\beta \in G} \|\mu_\beta^f\|_\infty;$$

$$б) \|\mu^f\|_\infty = \|f\|_1.$$

Доказательство. Из теоремы 1.2 д) следует

$$\|\mu_\beta^f\|_\infty = \lim_{r \rightarrow 1} \int_G |f_r(\beta \alpha)| dm_\rho(\alpha).$$

Следовательно, $\|\mu^f\|_\infty = \|f\|_1$ и отображение $\mu^f \rightarrow f$ является взаимно однозначным изометрическим отображением нормированного пространства $S^1(\Delta^0)$.

Отсюда вытекает а) •

Следующая теорема является фактически переформулировкой для обобщенных гармонических функций известной теоремы Фату о поведении гармонических функций в единичном круге.

Теорема 3.3. Пусть $f \in S^1(\Delta^0)$ и $f^* = \lim_{r \rightarrow 1} f_r$ (см. теорему 1.2). Тогда

$$а) \mu_\beta^f = f^*(\alpha) dm_\rho(\beta^{-1} \alpha) + \gamma^f,$$

где мера γ^f сингулярна относительно меры $m_\rho(\beta^{-1} \alpha)$;

$$б) f_{\beta r} = (f^* * m_r)(\beta) + (K_r^* * \gamma^f)(\beta), \quad m_r = K_r^* m_\rho.$$

Из нижеприведенного примера следует, что сингулярная мера может по сути быть любой.

Пример. Пусть $2\pi \in \Gamma$ и $K = \{\alpha \in G: \chi^{2\pi}(\alpha) = 1\}$. Очевидно, $\alpha_n \in K$ ($\chi^a(\alpha_n) = e^{ia_n}$). Группа G получается из декартова произведения $K \times [0, 1]$ путем отождествления точки $(\alpha, 1)$ с $(\alpha\alpha_1, 0)$. Изоморфизм $\psi: K \times [0, 1] \rightarrow G$ определяется следующим образом: $\psi(\beta, t) = \beta\alpha_t$. Зафиксируем $\beta_0 \in K$. Пусть $f(\alpha, t)$ – такая функция на $X = K \times [0, 1]$, что а) $f(\beta, 0) = f(\beta, 1) = 0$ для всех $\beta \in K$;

$$б) f(\beta, t) \text{ непрерывен на } X \setminus (\beta_0, 1/2) \text{ и } f(\beta_0, t) = 0 \text{ для всех } t \in [0, 1];$$

$$в) f \geq 0 \text{ и для любой сети } \beta \rightarrow \beta_0, \int_0^1 f(\beta, t) dt \rightarrow 1.$$

Пусть δ_0 – атомарная мера, сосредоточенная в точке $(\beta_0, 1/2)$. Из в) следует, что если $\beta \rightarrow \beta_0$, то

$$\delta_0 = \omega^* - \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \mu(\beta),$$

где $\mu(\beta) = f(\beta, t) dt$. Поэтому функция

$$g(\beta\tau) = (\hat{f} * m_\tau)(\beta) + (K_\rho^\tau * \delta_0)(\beta), \quad m_\tau = K_\rho^\tau m_\rho,$$

где $\hat{f} = f \circ \psi^{-1}$, принадлежит $S^1(\Delta^0)$.

§4. СТРУКТУРА БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ НА $S^p(\Delta^0)$, $1 < p < \infty$

Произведением Адамара функций $f, g \in S^p(\Delta^0)$ называется функция $h = f \times g$, равная $(f \times g)(\alpha\tau) = (f_{\tau_1} * g_{\tau_2})(\alpha)$, где $\tau = \tau_1\tau_2$.

Теорема 4.1 (см. [7]). Для любых $f, g \in S^p(\Delta^0)$, $1 \leq p < \infty$

$$f \times g \in S^p(\Delta^0) \quad \text{и} \quad \|f \times g\|_p \in \|f\|_p \cdot \|g\|_p.$$

Приведем доказательство этой теоремы, которое намного проще, чем в [7].

Доказательство. Поскольку $p \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_G |(f \times g)(\alpha\tau^2)|^p dm_\rho(\alpha) &\leq \iint_{G \times G} |f_\tau(\alpha\beta^{-1}) g_\tau(\beta)|^p d\sigma(\beta) dm_\rho(\alpha) \leq \\ &\leq \int_G |g_\tau(\beta)|^p \left(\int_G |f_\tau(\alpha\beta^{-1})|^p dm_\rho(\alpha) \right) d\sigma(\beta) \leq \|f\|_p^p \int_G |g_\tau(\beta)|^p d\sigma(\beta). \end{aligned}$$

Поскольку m_ρ – вероятностная мера, а мера σ инвариантна, то

$$\int_G |g_\tau(\beta)|^p d\sigma(\beta) \leq \int_G \left(\int_G |g_\tau(\beta\alpha)|^p dm_\rho(\beta) \right) d\sigma(\alpha) \leq \|g\|_p^p.$$

Таким образом, произведение Адамара задает структуру банаховой алгебры на $S^p(\Delta^0)$. Опишем идеалы этой алгебры.

Лемма 4.1. Пусть $\mathcal{J}$ – одномерный идеал алгебры $S^p(\Delta^0)$. Тогда найдется $a \in \Gamma$ такое, что $\mathcal{J} = I_a$, где $I_A = \mathbb{C}\varphi^a$.

Доказательство. Можно проверить, что

$$f \times \varphi^a = c_a^f \varphi^a \in \mathcal{J}$$

для всех $f \in \mathcal{J}$ и $a \in \Gamma$. Поэтому конечные линейные комбинации вида

$\sum_{f \in \mathcal{J}} c_a^f \varphi^a$ принадлежат $\mathcal{J}$. Отсюда и из условия $\dim \mathcal{J} = 1$ следует существование единственного $a \in \Gamma$ такого, что $c_A^f \neq 0$ для всех $f \in \mathcal{J}$, $f \neq 0$. Поэтому $\mathcal{J} = \mathbb{C}\varphi^a$.

Пусть I – замкнутый идеал алгебры $S^p(\Delta^0)$. Оболочкой идеала I называется множество тех $a \in \Gamma$, для которых $c_a^f = 0$ для всех $f \in I$.

Теорема 4.2. *Между слабо замкнутыми идеалами алгебры $S^p(\Delta^0)$ и подмножествами группы Γ существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}$ – слабо замкнутый идеал алгебры $S^p(\Delta^0)$ и $\text{hull } \mathcal{J}$ – оболочка идеала $\mathcal{J}$. Из леммы 4.1 следует, что если $a \notin \text{hull } \mathcal{J}$, то $I_a \subset \mathcal{J}$. Следовательно, $I = \{f \in Cr(\Delta): Spf \cap \text{hull } \mathcal{J} = \emptyset\}$ содержится в $\mathcal{J}$. Поэтому $\mathcal{J}_1$ – слабое замыкание I в $S^p(\Delta^0)$ – содержится в $\mathcal{J}$. Из определения слабой замкнутости в $S^p(\Delta^0)$ следует, что любую функцию $f \in S^p(\Delta^0)$ можно слабо аппроксимировать гармоническими полиномами p такими, что $Sp(p) \subset Spf$. Поэтому $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}$. Обратно, пусть $F \subset \Gamma$ и $I_F = \{f \in S^p(\Delta^0): Spf \cap F = \emptyset\}$. Тогда I_F слабо замкнуто и $\text{hull } I_F = F$. •

Свертка двух функций из $\mathcal{L}^p(G, d\sigma)$ принадлежит $C(G)$. Следовательно, произведение Адамара двух функций из $S^p(\Delta^0)$ принадлежит $Cr(\Delta)$.

Теорема 4.3. *$Cr^p(\Delta)$ – минимальный среди замкнутых идеалов в $S^p(\Delta^0)$ такой, что $\text{hull } Cr^p(\Delta) = \emptyset$.*

Доказательство. Так как $Cr(\Delta) \subset Cr^p(\Delta)$, то $Cr^p(\Delta)$ – замкнутый идеал в $S^p(\Delta^0)$. Очевидно, $\text{hull } Cr^p(\Delta) = \emptyset$ и $Cr^p(\Delta)$ – минимальный среди замкнутых идеалов, содержащих $Cr(\Delta)$. •

Следствием теорем 4.2 и 4.3 является следующее утверждение.

Следствие 4.1. Пусть I – замкнутый максимальный идеал в $S^p(\Delta^0)$. Тогда либо существует такой элемент $a \in \Gamma$, что $I = \{f \in S^p(\Delta^0): c_a^f = 0\}$, либо I – замкнутая гиперповерхность в $S^p(\Delta^0)$, содержащая $Cr(\Delta^0)$.

Замечание. Поскольку $\text{НВ}^p(\Delta^0)$ является идеалом в $S^p(\Delta^0)$, то любой идеал алгебры $\text{НВ}^p(\Delta^0)$ является также идеалом и для $S^p(\Delta^0)$. Поэтому исследование идеалов алгебры $\text{НВ}^p(\Delta^0)$ можно свести к исследованию тех идеалов из $S^p(\Delta^0)$, оболочка которых содержит $\Gamma_- = \{a \in \Gamma: a < 0\}$.

§5. ТЕОРЕМА ФАТУ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ B^p , $1 \leq p \leq \infty$

Теорема Фату о радиальных пределах гармонических функций может быть отнесена скорее к результату из теории мер, чем к теории функций. Особенно это видно при $p = 1$, когда формулировка теоремы Фату приводится на языке

мер. В данном и в следующем параграфе мы используем именно такой взгляд при изучении пространств HL^p и B^p .

Определение 5.1 Отображение

$$\mu: (0, 1) \mapsto M(G)$$

называется обобщенно гармонической мерой, если для любых $0 < r_1 < r_2 < 1$, $\mu(r_1) = \mu(r_2) * m_r$, где $r = r_1/r_2$.

Так как оператор свертки является линейным, то пространство всех обобщенных гармонических мер является линейным пространством.

Простейшим примером обобщенной гармонической меры является отображение вида $\mu(r) = \mu_0 * m_r$, где $\mu_0 \in M(G)$. Действительно, если $r = r_1 r_2$, то $m_r = m_{r_1} * m_{r_2}$. Отсюда $\mu(r_1) = \mu(r_2) * m_r$.

Лемма 5.1. Пусть $\mu \in B$. Тогда

а) отображение μ непрерывно в $\|\cdot\|_\infty$ -норме;

б) $\|\mu(r_1)\|_\infty \leq \|\mu(r_2)\|_\infty$ при $r_1 < r_2$.

Доказательство. а) Не теряя общности предположим, что $\mu(r) = \mu_0 * m_r$, где $\mu_0 \in M(G)$. В противном случае, зафиксировав $r_0 \in (0, 1)$, можно рассмотреть гармоническую меру $\nu \in B$ такую, что $\nu(r) = \mu(r_0) * m_r$. Очевидно, $\nu(r) = \mu(r_0 r)$. Пусть $\mu(r) = \mu_0 * m_r$. Поскольку $\lim_{r' \rightarrow r} K_r^r = 1$ по мере m_r (см. (2.4)), то $m_r = \|\cdot\|_\infty - \lim_{r' \rightarrow r} m_{r'}$. Отсюда

$$\lim_{r' \rightarrow r} \|\mu(r') - \mu(r)\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty \lim_{r' \rightarrow r} \|m_{r'} - m_r\|_\infty = 0.$$

б) очевидно •

Если $f \in C(G)$, то $f(\alpha r) = (f * m_r)(\alpha)$ является непрерывной на Δ и гармонической в Δ^0 функцией. Пусть $\mu^f \in B$, где $\mu^f(r) = (f d\sigma) * m_r$. Тогда $\mu^f(r) = (f * m_r)(\alpha) d\sigma(\alpha)$. Следовательно, обобщенная гармоническая мера μ^f однозначно определяется гармонической функцией $f(\alpha r)$. Отметим, что μ^f продолжается до непрерывного отображения из $[0, 1]$ в $M(G)$.

Лемма 5.2. Пусть формальный ряд Фурье функции $f \in L^1(G, d\sigma)$ равен

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma} c_a^f \chi^a.$$

Тогда для любого $\tau \in [0, 1]$ существует функция $f_\tau \in L^1(G, d\sigma)$ такая, что

а) ряд Фурье функции f_τ есть $\sum_{\alpha \in \Gamma} c_\alpha^f \chi^\alpha \tau^{|\alpha|}$;

б) f_τ как функция от τ порождает непрерывное отображение из $[0, 1]$ в $L^1(G, d\sigma)$.

Доказательство. Пусть последовательность непрерывных функций $\{f^{(n)}\}_1^\infty$ сходится в L^1 -норме к f . Тогда

$$\mu^f = \|\cdot\|_\infty - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{(n)},$$

где $\mu^{(n)} = f^{(n)} d\sigma$, $\mu^f = f d\sigma$. Из вышесказанного следует, что обобщенная гармоническая мера $\mu^{(n)}: (0, 1) \mapsto M(G)$, $\mu^{(n)}(\tau) = f_\tau^{(n)} d\sigma$, $(f_\tau^{(n)}) = f^{(n)} * m_\tau$ непрерывно продолжается до отображения из $[0, 1]$ в $M(G)$. По теореме 3.2, б) последовательность $\mu^{(n)}(\tau)$ равномерно на $[0, 1]$ сходится в $\|\cdot\|_\infty$ -норме к $\mu^f(\tau)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому последовательность функций $f_\tau^{(n)}$ равномерно на $[0, 1]$ сходится к некоторой непрерывной функции f_τ на $[0, 1]$ со значениями в $L^1(G, d\sigma)$. Так как $f_1^{(n)} \rightarrow f$, то ряд Фурье функции $f_1^{(n)}$ сходится (покоэффициентно) к ряду функции f . Применяя теперь свойства ряда гармонической функции, получим, что ряд f_τ есть $\sum c_\alpha^f \chi^\alpha \tau^{|\alpha|}$.

Заметим, что $f_0 = c_0^f$.

Следствие 5.1. Пусть $\mu: (0, 1) \mapsto M(G)$ — такая обобщенная гармоническая мера, что $\mu(\tau_0) = f d\sigma$ для некоторого $\tau_0 \in (0, 1)$. Тогда μ расширяется до непрерывного отображения $\mu': [0, 1] \rightarrow M(G)$.

Определение 5.2. Обобщенная гармоническая мера $\mu: (0, 1) \mapsto M(G)$ называется p -гармонической, $p \geq 1$, если

а) $\mu(\tau) = f_\tau d\sigma$, где $f_\tau \in L^p(G, d\sigma)$;

б) $\sup_\tau \|f_\tau\|_p < \infty$.

Пространство p -гармонических мер будем обозначать через B^p . Заметим, что на B^p естественным образом можно распространить свойства пространства L^p .

Теорема 5.1. Пусть $\mu: (0, 1) \rightarrow M(G)$ — p -гармоническая мера. Тогда

а) если $1 < p \leq \infty$, то найдется функция $f \in L^p(G, d\sigma)$ такая, что $\mu(r) = \mu^f * m_r$, где $\mu^f = f d\sigma$ и μ продолжается до непрерывного отображения $\mu': [0, 1] \rightarrow M(G)$;

б) если $p = 1$, то найдется функция $\mu \in M(G)$ такая, что $\mu(r) = \mu_0 * m_r$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться леммой 5.1 и методом доказательства теоремы Фату о радиальных пределах для гармонической функции [14] (стр. 55).

§6. ТЕОРЕМА ФАТУ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ HL^p

Мера $\mu \in M(G)$ называется A -аналитической, если $Sp\mu \subset \Gamma_+$. Пространство A -аналитических мер будем обозначать через M_A . Если Γ изоморфна группе целых чисел $\mathbb{Z}$, то любая мера из M_A абсолютно непрерывна относительно меры σ и ее производная Радона-Никодима принадлежит пространству Харди (теорема Рисса). В случае, когда Γ не изоморфна $\mathbb{Z}$, существуют A -аналитические меры, сингулярные относительно σ .

Теорема 6.1. Пусть $\mu \in M_A$. Предположим, что $\mu(r) = \mu * m_r$ при некотором $r \in (0, 1)$ абсолютно непрерывна относительно нормированной меры Хаара σ группы G . Тогда найдется такая функция $f \in L^1(G, d\sigma)$, что $Spf \subset \Gamma_+$ и $\mu = f d\sigma$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы укажем на одно свойство A -аналитических мер (см. [15]).

Не теряя общности допустим, что $2\pi \in \Gamma$. Пусть $K = \{\alpha \in G: \chi^{2\pi}(\alpha) = 1\}$. Для $t \in \mathbb{R}$ пусть $\alpha_t \in G$ — такой элемент, что $\chi^a(\alpha_t) = e^{iat}$ для всех $a \in \Gamma$. Отображение $t \rightarrow \alpha_t$ является вложением аддитивной группы $\mathbb{R}$ в G . С помощью этого отображения определим гомоморфизм $\Phi: K \times \mathbb{R} \rightarrow G$, $\Phi(\alpha, t) = \alpha \cdot \alpha_t$. Очевидно, ядро Φ есть $\mathcal{F} = \{(\alpha_n, -n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, а фундаментальной областью является $F = K \times [0, 1)$.

В дальнейшем мы будем отождествлять группу G с множеством F . Пусть M — пространство локально конечных мер на $K \times \mathbb{R}$, инвариантных относительно сдвигов элементами группы $\mathcal{F}$. Сужение M на F совпадает с $M(G)$. При этом мера $\gamma \times dt$, где γ — нормированная мера Хаара группы K , переходит в меру σ .

Пусть H^1 – пространство Харди на единичной окружности T . Конформное отображение $\omega(z) = \frac{i-z}{i+z}$ порождает отображение $\mathbb{R}$ на $T \setminus \{1\}$. Обозначим через $\mathcal{H}^1$ пространство тех функций на $\mathbb{R}$, которые можно представить в виде суперпозиции $(f \circ \omega)(t)$, $f \in H^1$. Каждую функцию из $\mathcal{H}^1$ можно расширить (по мере Лебега) до аналитической функции в верхней полуплоскости.

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство мер на $K \times \mathbb{R}$ вида $f(\alpha, t)\nu \times dt$, где

- а) ν – вероятностная мера на K ;
- б) $f(\alpha, t) \in \mathcal{L}^1\left(\nu \times \frac{dt}{1+t^2}\right)$ и при каждом фиксированном $\alpha \in K$ принадлежит $\mathcal{H}^1$ (почти для всех α по мере ν);
- в) мера $f(\alpha, t)\nu \times dt$ принадлежит M ;
- г) меры $|f(\alpha, t)|\nu \times dt$ и $\nu \times dt$ взаимно абсолютно непрерывны.

Из теоремы 3.2 [15] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.1. Пространство M_A совпадает с сужением $\mathcal{H}$ на F .

Лемма 6.2. Пусть $\mu \in M(G)$ – A -аналитическая мера и $\mu' = f(\alpha, t)\nu \times dt \in \mathcal{H}$ – такая мера, что $\mu'|_F = \mu$. Тогда мере $\mu'(\tau) = f_\tau(\alpha, t)\nu \times dt$ соответствует мера $\mu(\tau) = \mu * m_\tau$, где

$$f_\tau(\alpha, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha, x+t) \frac{y_0 dx}{y_0^2 + x^2}, \quad y_0 = -\log \tau.$$

Доказательство. Линейные комбинации мер $\mu = \chi^a d\sigma$, $a \in \Gamma_+$ слабо* плотны в M_A . Оператор свертки сохраняет слабую сходимость. Поэтому лемму достаточно доказать для меры вида $\mu = \chi^a d\sigma$. Этой мере соответствует мера $\mu' = \chi^a(\alpha) e^{iat} \gamma \times dt$ из $\mathcal{H}$. Мере $\mu(\tau) = \mu * m_\tau = \chi^a \tau^{|a|} d\sigma$ будет соответствовать мера $\mu'(\tau) = \chi^a(\alpha) e^{iat} \tau^{|a|} \gamma \times d\sigma$. Очевидно

$$e^{iat} \tau^{|a|} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ia(t+x)} \frac{y_0 dx}{y_0^2 + x^2}.$$

Лемма 6.2 доказана.

Заметим, что для любых $\mu \in M_A$ и $a > 0$

$$\int_G \chi^a d\mu = 0,$$

т.е. мера μ ортогональна к идеалу I алгебры A , порожденному характеристиками χ^a , $a > 0$. По теореме 7.7, гл. II из [5] меру μ можно представить в виде

$$\mu = \mu^f + \mu_s,$$

где $\mu^f = f d\sigma$, μ_s сингулярна относительно σ и $\mu^f, \mu_s \in M_A$.

Доказательство теоремы 6.1. Покажем, что если $\mu \in M_A$, μ сингулярна относительно σ и $\mu(r)$ абсолютно непрерывна относительно σ , то $\mu = 0$. Допустим противное. Так как $\mu \in M_A$, то соответствующая ей мера $\mu' \in \mathcal{H}$ имеет вид

$$\mu' = f(\alpha, t) \nu \times dt,$$

где ν сингулярна относительно γ -нормализованной меры Хаара группы K . Для любого $r \in (0, 1)$ $\mu'(r) = f_r(\alpha, t) \nu \times dt$. Поэтому $\mu'(r)|_F$ сингулярна относительно σ , т.е. мы пришли к противоречию. •

Определение 6.2. Отображение

$$\mu: (0, 1) \rightarrow M_A$$

называется обобщенной аналитической мерой, если $\mu(r_1) = \mu(r_2) * m_r$, где $r_1 < r_2$ и $r = r_1 \cdot r_2$.

Обозначим через HL пространство обобщенных аналитических мер. Пространство обобщенных аналитических мер, являющихся p -гармоническими, обозначим через HL^p .

Теорема 6.2. Пусть $\mu \in HL^p$, $p \geq 1$. Тогда найдется такая мера $\mu_0 \in M_A$, что $\mu(r) = \mu_0 * m_r$, $\mu_0 = f d\sigma$.

Доказательство. При $p > 1$ теорема 6.2 является следствием теоремы 5.1 а), а при $p = 1$ – следствием теоремы 6.1 •

ABSTRACT. The paper considers classes of generalized analytic functions such as : Hardy spaces defined in terms of Fourier series (Hardy–Helson–Lowdenslager or HL^p spaces) and Hardy spaces connected with analytic almost periodic functions (Hardy–Bohr or HB^p). The purpose is to extend Fatou's theorem on radial limits to these spaces as well as to the classes

of generalized harmonic functions (Bezikovitch or B^p and Stepanov type or S^p spaces).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. M. Singer, "Generalized analytic functions", T. A. M. S., vol. 81, pp. 379 — 393, 1956.
2. H. Helson, D. Lowdenslager, "Prediction theory and Fourier series in several variables, I", Acta Math., vol. 99, pp. 165 — 202, 1958.
3. H. Helson, D. Lowdenslager, "Prediction theory and Fourier series in several variables, II", Acta Math., vol. 106, pp. 175 — 213, 1961.
4. K. Hoffman, "Boundary behavior of generalized analytic function", T. A. M. S., vol. 87, pp. 447 — 466, 1958.
5. Т. В. Гамелин, Равномерные алгебры, Мир, М., 1973.
6. J. P. Milaszewicz, "Hardy spaces of almost periodic functions", Ann Scuola Norm, Sup. Pisa, vol. 24, № 4, pp. 401 — 428, 1970.
7. J. P. Milaszewicz, "Cleason part and certain counter examples in the big disc context", Amer. Math. Soc., vol. 45, № 1, pp. 217 — 224, 1974.
8. H. Helson, "Analyticity on compact Abelian groups", In : Algebras in Analysis, Academic Press, New York, pp. 1 — 62, 1975.
9. T. V. Tonev, "The algebra of bounded hyperanalytic functions on the big disc has no corona", Analytic Function (Kozubnik 1979), Lecture Notes in Math., vol. 798, pp. 435 — 438, 1979.
10. P.A. Owens, "A density problem for Hardy spaces of almost periodic functions", Bull. Austral. Math. Soc., vol. 29, pp. 315 — 327, 1984.
11. R. Curto, P. Muhly and J. Xia, "Wiener-Hopf operators and generalized analytic functions", Integral Equations Operator Theory, vol. 8, pp. 650 — 673, 1985.
12. С. А. Григорян, "Об одном свойстве почти периодических аналитических функций", Матем. заметки, т. 45, № 4, стр. 13 — 18, 1989.
13. S. A. Grigorian, T. V. Tonev, "Inductive limits of algebra of generalized analytic functions", Michigan Math. J., vol. 42, pp. 615 — 619, 1995.
14. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.
15. С. А. Григорян, "Обобщенные аналитические функции", УМН, т. 49, № 2 (296), стр. 3 — 42, 1994.

18 октября 1996

Институт математики
НАН Армении