О ПОСТРОЕНИИ ЦЕЛЫХ И КВАЗИЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, РАВНОМЕРНО УБЫВАЮЩИХ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ, I

Г. В. Бадалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 6, 1996

В настоящей работе рассматривается задача о наиболее быстром убывании целой функции в угловой области $|\arg z| \le \alpha/2$ для случая $0 < \alpha < \pi$. В отличие от теоремы Н. У. Аракеляна не делается каких–либо утверждений относительно расположения нулей целых функций. Целью является выяснение вопроса о существенности условия $p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \to \infty$, а также вывод условий, при которых оставались бы в силе аналоги результатов Аракеляна для целых и квазицелых функций. Случай $\pi \le \alpha < 2\pi$ рассматривается нами в другой работе того же названия, но с индексом II.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования целых функций со свойствами наибыстрейшего убывания в угловых областях были начаты М. В. Келдышем [1] (см. приведенную в [2] библиографию). Исследование доведено до конца Н. У. Аракеляном, установившим следующий результат (см. [2], стр. 189).

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max\left\{\dfrac{\pi}{\alpha}, \dfrac{\pi}{2\pi - \alpha}\right\}$, *и пусть* $p(r)$, $r \ge 1$ – *неотрицательная функция такая, что*

$$p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \qquad \int_1^\infty r^{-(\pi/\alpha+1)}\, p(r)\, dr \le k < \infty. \tag{1}$$

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ *порядка* ρ *и нормального типа, все нули которой лежат вне угла* $|\arg z| \le \dfrac{\alpha}{2}$ *и которая удовлетворяет неравенствам*

$$\exp\left(-k|z|^{\pi/\alpha}\right) < |\omega_\alpha(z)| < \exp\left(-[Re z^{\pi/\alpha} + p(|z|)]\right), \qquad |\arg z| \le \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \ge 1. \tag{2}$$

Указанный порядок или тип нельзя понизить.

По данному вопросу известна также теорема К. Н. Хачатряна [3] :

Теорема. *Пусть $0 < \alpha < 2\pi$, и пусть $p(r)$, $r \geq 1$ – положительная неубывающая функция такая,* что

$$\int_1^\infty r^{-(\pi/\alpha+1)}\, p(r)\, dr < \infty \quad \text{и} \quad \rho^* = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln p(r)}{\ln r}. \tag{3}$$

Тогда существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ порядка $\rho = \max\left[\dfrac{\pi}{2\pi-\alpha}, \rho^*\right]$ (и нормального типа в случае $\rho < \dfrac{\pi}{2\pi-\alpha}$), удовлетворяющая в угле $\Delta = |\arg z| \leq \dfrac{\alpha}{2}$) неравенствам

$$\exp\left(-c|z|^{\pi/\alpha}\int_{|z|}^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)}\, p(t)\, dt\right) < |\omega_\alpha(z)| < \exp\left(-p(|z|)\right), \quad |z| \geq 1. \tag{4}$$

Указанный порядок (и тип в случае $\rho < \dfrac{\pi}{2\pi-\alpha}$) нельзя понизить.

Замечание 1. В случае $\pi < \alpha < 2\pi$ утверждения приведенных выше теорем сравнимы, чего нельзя сказать для $0 < \alpha \leq \pi$.

В настоящей работе рассматриваются аналогичные задачи для случая $0 < < \alpha < \pi$, но, в отличие от теоремы Аракеляна, без какого–либо утверждения относительно расположения нулей.

Мы хотим выяснить существенность условия $p(r)\, r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \to \infty$ в (1), а также вывести условия, при которых оставались бы в силе аналоги результатов Аракеляна для целых и квазицелых функций.

Пусть задана последовательность чисел $\{\lambda_k\}$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\lambda_\nu} = \infty, \tag{5}$$

и пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^{\lambda_k} \tag{6}$$

– заданная функция, определенная на римановой поверхности логарифмической функции $\mathrm{Ln}z$.

Если радиус сходимости ряда (6) равен бесконечности, то его сумма $f(z)$ будет называться квазицелой функцией. Для таких функций порядок и тип можно определить так же как это делается для целых функций, а имеено

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \lambda_n}{\ln |a_n|^{-1/\lambda_n}}, \qquad (\sigma e \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_n^{1/\rho} |a_n|^{1/\lambda_n}. \tag{7}$$

Как для целых, так и для квазицелых функций мы устанавливаем аналоги вышеуказанных теорем (без условия $p(r) r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ при $r \to \infty$ и какого–либо утверждения относительно расположения нулей) при условии, что плотность последовательности $\{\lambda_n\}$ не выше плотности $\{n\}$.

Наши методы в корне отличаются от методов [1] — [3] и основаны на изучении ненулевого решения уравнения Ватсона для угловой области, что позволяет нам представить искомые целые или квазицелые функции в явном виде.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Мы будем использовать следующие теоремы А и В С. Мандельбройта (см. [5]), стр. 24 –29 и [6], стр. 14) :

Теорема А. *Пусть $\{m_n\}$ – произвольная последовательность положительных чисел. Если существует функция $0 \not\equiv \varphi(x) \in C^\infty[0,1]$, удовлетворяющая условиям*

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le m_n, \qquad \varphi^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

то существует также функция $\psi(x)$, $x \in [0,1]$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 1)\, \psi(x) \not\equiv 0; \qquad 2)\, \psi(x) \ge 0; \qquad 3)\, \psi(x) = \psi(1-x); \\ 4)\, \psi^{(n)}(0) = \psi^{(n)}(1) = 0; \qquad 5)\, |\psi^{(n)}(x)| \le (8e)^n m_n \, (n = 0, 1, \ldots). \end{cases} \tag{9}$$

Напомним (см. [6], стр. 12 – 15), что функция $A(t)$, $t \ge 0$ называется *функцией следа* последовательности $\{\alpha_n\}$ относительно $\omega(t)$, если

$$\sup_{n \le \omega} (nt - \alpha_n) = A(t). \tag{10}$$

Последовательность $\{\alpha_n\}$, удовлетворяющая условию (10), называется производящей последовательностью функции следа $A(t)$.

Теорема B. *Среди всех производящих последовательностей функции следа $A(t)$ есть такая последовательность $\{a_n\}$, которая определяется равенством*

$$a_n = \sup_{\omega(t)\geq n} [nt - A(t)], \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{11}$$

и является наименьшей в том смысле, что последовательность $\{a_n\}$ является регуляризацией относительно $\omega(t)$ для всякой производящей последовательности $\{\alpha_n\}$ функции $A(t)$.

Примем $\omega(t) = \infty$, $t > 0$, $t = \ln x$

$$A(t) = A(\ln x) = \begin{cases} \ln T(x), & x \geq 1 \\ \ln T(1), & 0 < x < 1 \end{cases}, \qquad a_n = \ln m_n,\ n = 0, 1, 2, ..., m_n \geq 1.$$

Тогда из (11) получим

$$\ln m_n = \sup_{r\geq 0}[n \ln r - \ln T(r)], \quad \text{т.е.} \quad m_n = \sup_{r\geq 0} \frac{r^n}{T(r)}, \tag{11'}$$

где $\{m_n\}$ обладает свойством минимальности в смысле теоремы B.

Из объединения теорем A и B следует

Теорема C. *Из сходимости интеграла*

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr \tag{12}$$

следует сущесвование функции $0 \not\equiv \varphi \in C^{\infty}[u, 1]$, $0 < u < 1$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi^{(n)}(u) = \varphi^{(n)}(1) = 0; \quad |\varphi^{(n)}(x)| \leq cH^n m_n,\ x \in [u, 1],\ n = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

В самом деле, из сходимости интеграла (12) и теоремы B следует, что последовательность $\{m_n\}$ из (11′) определяет неквазианалитический класс функций $C_{\mathfrak{m}}[u, 1]$, где $0 < u < 1$, $\mathfrak{m} = \{m_n\}$. Поэтому к функции $\varphi(x)$ применима теорема A.

Приведем теперь аналог теоремы C в терминах обобщенных производных типа введенных в [7].

Пусть задана последовательность чисел

$$\beta_0 = 0 < \beta_1 < \beta_2 < .... \tag{14}$$

По определению (см. [7]) обобщенными производными функции $\varphi(x)$ являются

$$\varphi^{[0]}(x) = \varphi(x)_\beta,\ x > 0; \varphi^{[k+1]}(x)_\beta = \left(\varphi^{[k]}(x)_\beta / x^{\beta_k - \beta_{k-1} - 1}\right)',\ k = 1, 2, \ldots. \qquad (15)$$

Нам здесь понадобится более частный вид последовательности (14), а именно

$$\beta_0 = 0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots, \quad \beta_{k+1} - \beta_k \geq h > 0, \quad 0 < \beta_n - cn < l < \infty, \qquad (14')$$

где числа $c > 0$ и $l > 0$ не зависят от n.

Теорема 1. *Пусть монотонно возрастающая функция $T(r)$ такая, что сходится интеграл (12). Тогда существует функция $0 \not\equiv \varphi \in C^\infty[u, 1]$, где $0 < u < 1$, такая, что*

$$\varphi^{[n]}(u)_\beta = \varphi^{[n]}(1)_\beta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (16)$$

$$\varphi^{[n]}(x)_\beta \leq c^{n+1} m_n, \quad x \in [u, 1], \qquad (17)$$

где функции $\varphi^{[n]}(x)_\beta, n = 0, 1, 2, \ldots$ определены в (15), а последовательность $\{m_n\}$ определена в (11′).

Замечание 2. Заметим (см. [6], стр. 10 – 14), что в (17) последовательность $\{m_n\}$ может быть заменена на $\{m_n^c\}$, где $\{m_n^c\}$ – выпуклая регуляризация $\{m_n\}$.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства равенств (16) следует заметить, что для функции $\varphi(x)$ из теоремы A имеем

$$\varphi^{[n]}(t)_\beta = \sum_{k=0}^{n} b_k(t)\, \varphi^{(k)}(t), \qquad (18)$$

где $\varphi^{(k)}(x)$ – обычные производные $\varphi(x)$, а $b_k(t)$, $t \in [u, 1]$, $k = \overline{0, n}$ – ограниченные функции, не зависящие от $\varphi(x)$.

Для доказательства неравенств (17) представим функцию $\varphi(x)$ из теоремы C формулой Тейлора в левой окрестности точки $x = 1$. Будем иметь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_1^x \varphi^{(n+1)}(t)\, (x - t)^n\, dt = t \int_1^x \varphi^{(n+1)}(t)\, t^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(k/t)^{-\zeta}\, d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \nu)}\, dt, \qquad (19)$$

где контур C охватывает окрестности точек $0, -1, -2, \ldots, -n$.

Путем последовательного обобщенного дифференцирования в (19) в смысле (15) получаем

$$\varphi^{[n+1]}(x)_\beta = Q_n(x)\varphi^{(n+1)}(x)\, x^{n-\beta_n} \pm$$
$$\pm \int_1^x \varphi^{(n+1)}(t)\, t^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=1}^n (\zeta+\beta_\nu - 1)}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta+\nu)} t^\zeta x^{-\zeta-\beta_n}\, d\zeta \right) dt, \qquad (20)$$

где последовательность $\{\beta_\nu\}$ определена в (11′), $|Q_n(x)| \le c_0 c_1^n$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ не зависят от n и x. Полагая $\zeta - 1 = \zeta'$ и $C = C_n = l_n \bigcup L_n$, где $l_n = l_n(\zeta = = \delta + iy,\ -cn < y < cn)$, $c > 1$, $\delta > 0$, $L_n = L_n(|\zeta| = cn,\ \mathrm{Re}\zeta \ge \delta)$, получаем

$$\varphi^{[n+1]}(x)_\beta| \le c_1^{n+1} m_{n+1}, \quad x \in [u,1],\ n = 0,1,2,..., \qquad (17')$$

где $c_1 > 0$ зависит от u $(0 < u < 1)$ и не зависит от n и x •

2. ФУНКЦИИ $\overset{\circ}{\omega}(t,\alpha)$ И $\overset{\circ}{\omega}(t,\beta)$

Рассмотрим последовательности чисел $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$ такие, что $\beta_\nu \ge \alpha_\nu$, $\nu = 1,2,...$ и

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ..., \qquad \sum \frac{1}{\alpha_\nu} = \infty, \qquad \sum \frac{1}{\alpha_\nu^2} < \infty, \qquad (21)$$

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < ..., \qquad \sum \frac{1}{\beta_\nu} = \infty. \qquad (22)$$

Обозначим

$$\lambda_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu}, \qquad \lambda'_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\beta_\nu}, \qquad (23)$$

и положим

$$\sigma_0 = \lim_{n\to\infty} \exp(\lambda_n - \lambda_n') = \lim_{n\to\infty} \sigma_n < \infty. \qquad (24)$$

Определим функции $\overset{\circ}{\omega}(t,\alpha)$:

$$\overset{\circ}{\omega}(t,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \overset{\circ}{\omega}_n(t,\alpha), \qquad (25)$$

$$\overset{\circ}{\omega}_n(t,\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{t^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta\, \overset{\circ}{e}_{1,\infty}(\zeta,\alpha)}, \quad t > 0, \sigma > 0, \qquad (26)$$

где

$$\overset{\circ}{e}_{k,n}(\zeta,\alpha) = \prod_{\nu=k}^n \left(1 + \frac{\zeta}{\alpha_\nu}\right) \exp(-\zeta/\alpha_\nu), \qquad \alpha = \{\alpha_\nu\}. \qquad (27)$$

Теорема 2. *Пусть $\{\alpha_\nu\}$ и $\{\beta_\nu\}$ удовлетворяют условиям (21) и (22). Тогда справедливо представление*

$$\overset{\circ}{\omega}(t,\alpha) = \int_0^{\sigma_0} \overset{\circ}{\omega}\left(\frac{t}{t_0},\beta\right) dg(t_0), \qquad (28)$$

где функция $g(t_0)$ монотонно возрастает в $[0,\sigma_0]$ и

$$g(\sigma_0) - g(0) = V_0^{\sigma_0} g = 1.$$

Теорема 2 вытекает из следующих трех лемм.

Лемма 2.1. *В условиях теоремы 2 справедливо равенство*

$$\overset{\circ}{\omega}_n(t,\alpha) = \int_{t\exp(-\lambda_{n-1})}^{\exp\sigma_n} \overset{\circ}{G}_n(t_0,\alpha,\beta)\,\overset{\circ}{\omega}_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\beta\right)\frac{dt_0}{t_0}, \qquad \sigma_n = \lambda_n - \lambda'_{n+1}, \quad (29)$$

где $t \in (0, \exp(\lambda_n))$ и

$$\overset{\circ}{G}_n(t_0,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\, t_0^{-z}\,dz, \quad \sigma > 0. \quad (30)$$

Доказательство. Воспользуемся следующим равенством (см. [8], стр. 62) :

$$\omega_n(\frac{t}{u},\alpha) = \int_t^u G_n(\frac{t_0}{u},\alpha,\beta)\,\omega_{n-1}(\frac{t}{t_0},\beta)\,\frac{dt_0}{t_0}, \quad 0 \le t \le u \quad (31)$$

где

$$\omega_n(\frac{t}{u},\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(t/u)^{-\zeta}\,d\zeta}{\zeta\prod_{\nu=1}^{n}(1+\zeta/\alpha_\nu)}, \quad (32)$$

$$G_n(\frac{t_0}{u},\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}(1+z/\beta_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n}(1+z/\alpha_\nu)}\left(\frac{t_0}{u}\right)^{-z} dt. \quad (33)$$

Положим $u = \exp(\lambda_n)$, $0 \le t \le u$ и обозначим

$$\omega_n(t\exp(-\lambda_n),\alpha) = \overset{\circ}{\omega}_n(t,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{t^{-\zeta}}{\zeta\overset{\circ}{e}_{1,n}(\zeta,\alpha)}, \quad (34)$$

где

$$\overset{\circ}{e}_{1,n}(\zeta,\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}(1+\zeta/\alpha_\nu)\exp(-\zeta/\alpha_\nu). \quad (35)$$

После замены переменной $t_0 = t'_0\exp(\lambda'_{n-1})$ из (31) получим

$$\overset{\circ}{\omega}_n(t,\alpha) = \int_{t\exp(-\lambda_{n-1})}^{\exp\sigma_n} \overset{\circ}{G}_n(t_0,\alpha,\beta)\,\overset{\circ}{\omega}_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\beta\right)\frac{dt_0}{t_0}, \quad (31')$$

где $\overset{\circ}{G}_n(t_0,\alpha,\beta)$ определена в (30), а $\sigma_n = \exp(\lambda_n - \lambda'_{n-1})$.

Этим, равенство (31′) согласно (34) и (35) превращается в равенство (29) леммы 2.1, и доказательство завершено.

Лемма 2.2. *В условиях теоремы 2 функция* $g_n(t)$, *где*

$$dg_n(t_0) = \overset{\circ}{G}_n(t_0, \alpha, \beta)\,\frac{dt_0}{t_0},$$

монотонно возрастает на $[0, \sigma_0]$, *притом*

$$g_n(\sigma_0') - g_n(0+) = 1, \quad \sigma_0' \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \exp(\lambda_n - \lambda_{n-1}'). \tag{36}$$

Доказательство. То, что $g(t_0)$ монотонно возрастает, следует из условия $\alpha_\nu \leq \leq \beta_\nu$ и $\overset{\circ}{G}_n(t_0, \alpha, \beta) \geq 0$ (см. [8], стр. 82). Далее, при $\delta \in (0, \sigma_0)$ и $\sigma > 0$ имеем

$$g_n(\sigma_0') - g_n(\delta) = \int_\delta^{\sigma_0'} G_n(t_0, \alpha, \beta)\frac{dt_0}{t_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\,\frac{(\sigma_0')^{-z} - \delta^{-z}}{-z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\,\frac{\delta^{-z}}{z}\,dz,$$

так как

$$\mathcal{J}_n(\sigma_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\,\frac{(\sigma_0')^{-z}}{-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\,\frac{(\frac{\sigma_0'}{\sigma_n})^{-z}}{-z}\,dz,$$

$$e_{1,n}(z,\alpha) = \prod_{\nu=1}^{n}(1 + z/\alpha_\nu),$$

где $\sigma_0' \geq \sigma_0 \geq \sigma_n = \exp(\lambda_n - \lambda_{n-1}')$, и контур интегрирования можно замкнуть в правой полуплоскости, где подынтегральная функция не имеет особенностей и поэтому

$$\mathcal{J}_n(\sigma_0') = \mathcal{J}_n(\sigma_0) = 0, \quad \text{при} \quad \sigma_0' \geq \sigma_0.$$

Легко проверить, что для $-\alpha_1 < \kappa < 0$

$$\mathcal{J}_n(\delta) = \mathrm{Res}_{z=0}\frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\,\frac{\delta^{-z}}{z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\,\frac{\delta^{-z}}{z}\,dz =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{\overset{\circ}{e}_{1,n-1}(z,\beta)}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(z,\alpha)}\,\frac{\delta^{-z}}{z}\,dz = 1 + o(\delta^{-\kappa}) = 1 + o(\delta^{|\kappa|}), \quad \delta \to 0+. \tag{37'}$$

Следовательно, $\lim\limits_{\delta\to 0} \mathcal{J}_n(\delta) = 1$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Последовательность* $\{\overset{\circ}{\omega}_n(t,\beta)\}$ *равномерно сходится к функции*

$$\overset{\circ}{\omega}(t,\beta) = \lim_{n\to\infty} \overset{\circ}{\omega}_n(t,\beta), \quad t \in [0,\infty),$$

если только $\sum \frac{1}{\beta_\nu} = \infty$, $\sum \frac{1}{\beta_\nu^2} < \infty$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\overset{\circ}{\omega}_n(0,\beta) = \overset{\circ}{\omega}(0,\beta) = 1$, а при $t > 0$ и $0 < A < \infty$ имеем

$$|\overset{\circ}{\omega}_n(t,\beta) - \overset{\circ}{\omega}(t,\beta)| < \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iA}^{\sigma+iA} \left|1 - \frac{1}{\overset{\circ}{e}_{n+1,\infty}(\zeta,\beta)}\right| \left|\frac{t^{-\zeta}\,d\zeta}{\zeta\overset{\circ}{e}_{1,n}(\zeta,\beta)}\right| +$$
$$+ \frac{t^{-\sigma}}{2\pi i}\int_{\sigma+iA}^{\sigma+i\infty} \left|\frac{1}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(\zeta,\beta)} + \frac{1}{\overset{\circ}{e}_{1,\infty}(\zeta,\beta)}\right| \left|\frac{d\zeta}{\zeta}\right| +$$
$$+ \frac{t^{-\sigma}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-iA} \left|\frac{1}{\overset{\circ}{e}_{1,n}(\zeta,\beta)} + \frac{1}{\overset{\circ}{e}_{1,\infty}(\zeta,\beta)}\right| \left|\frac{d\zeta}{\zeta}\right|.$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 2 вытекает из лемм 2.1 — 2.3 •

3. УСЛОВИЯ КВАЗИЦЕЛОСТИ ФУНКЦИИ $\overset{\circ}{\omega}(x,\alpha)$

В работе [9] (стр. 1198 — 1200) доказано, что для последовательности $\{\alpha_n\}$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ..., \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n \geq h > 0, \quad \alpha_n < cn, \tag{37''}$$

функция (26) квазицелая и имеет представление

$$\overset{\circ}{\omega}(x,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha_n}, \quad a_n = -\frac{1}{2\widetilde{\Gamma}(\alpha_n,\alpha)} \prod_{n\neq\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2}\right), \quad \widetilde{\Gamma}(\alpha_n,\alpha) = \frac{1}{\zeta\overset{\circ}{e}_{1,\infty}(\zeta,\alpha)}. \tag{25'}$$

Порядок ρ этой функции конечен, если только

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\alpha_n}{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\alpha_\nu}} < \infty.$$

Для точного определения порядка ρ требуется некоторое усиление теоремы 2 ([9]) :

Теорема 3. *Для функции*

$$\widetilde{\Gamma}(x,\alpha) = \frac{1}{x\,\overset{\circ}{e}_{1,\infty}(x,\alpha)}, \quad x > 0$$

справедливы неравенства

$$\exp\left(x\sum_{\alpha_\nu\le x}\frac{1}{\alpha_\nu}-C_1x\right)\le x\widetilde{\Gamma}(x,\alpha)\le\exp\left(x\sum_{\alpha_\nu\le x}\frac{1}{\alpha_\nu}+C_2x\right),\qquad(38)$$

где числа C_1 и C_2 не зависят от x.

Доказательство. Второе неравенство в (38) вытекает из оценок (см. [9], доказательство теоремы 2)

$$0<x\widetilde{\Gamma}(x,\alpha)=\exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t\,dt}{\alpha_\nu\,(t+\alpha_\nu)}\right)\le$$

$$\le\exp\left(x\sum_{\alpha_\nu\le x}\frac{1}{\alpha_\nu}+x^2\sum_{\alpha_\nu>x}\frac{1}{\alpha_\nu^2}\right)<\exp\left(x\sum_{\alpha_\nu\le x}\frac{1}{\alpha_\nu}+C_2x\right).$$

Для доказательства первого заметим, что

$$x\widetilde{\Gamma}(x,\alpha)=\exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t\,dt}{\alpha_\nu\,(t+\alpha_\nu)}\right)\ge\exp\left(\sum_{\alpha_\nu\le x}\int_0^x\frac{t\,dt}{\alpha_\nu\,(t+\alpha_\nu)}\right)=$$

$$=\exp\left(x\sum_{\alpha_\nu\le x}\frac{1}{\alpha_\nu}-\ln\prod_{\alpha_\nu\le x}\frac{x+\alpha_\nu}{\alpha_\nu}\right)\ge\exp\left(x\sum_{\alpha_\nu\le x}\frac{1}{\alpha_\nu}-\ln\prod_{\nu=1}^{n(x)}\frac{[2x+1]}{\alpha_\nu}\right),$$

где $n(x)$ – числовая функция последовательности $\{\alpha_\nu\}$. Согласно (37′) имеем $n(x)=O(x)$, $x\to\infty$ и

$$\prod_{\nu=1}^{n(x)}\left(\frac{[2x+1]}{\alpha_\nu}\right)\le h_1^{n(x)}\prod_{\nu=1}^{n(x)}\left(\frac{[2x+1]}{\nu}\right)\le\exp\left(C_1\,x\right),\quad C_1>0.$$

Следовательно

$$x\widetilde{\Gamma}(x,\alpha)\ge\exp\left(x\sum_{\alpha_\nu\le x}\frac{1}{\alpha_\nu}-C_1x\right).$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 1. Порядок ρ квазицелой функции (26) определяется как

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\alpha_n}{\sum_{\alpha_\nu\le\alpha_n}\frac{1}{\alpha_\nu}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\alpha_n}{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\alpha_\nu}}.\qquad(39)$$

Доказательство. Имеем

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\alpha_n}{\ln|a_n|^{-1/\alpha_n}},$$

где a_n определены в (25′). Так как $\prod_{n\neq\nu=1}^{\infty}(1-\frac{\alpha_n^2}{\alpha_1^2}) = o\left(\widetilde{\Gamma}(\alpha_n,\alpha)\right)$, то получаем

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \alpha_n}{\ln |a_n|^{-1/\alpha_n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \alpha_n}{\sum_{\nu=1}^{n} 1/\alpha_\nu}. \quad \bullet$$

Замечание 3. В случае конечного ρ тип функции (25′) также окажется конечным, и его значение может быть точно определено только при достаточной регулярности последовательности $\alpha = \{\alpha_\nu\}$. Например, функция (25′) будет нормального типа, если $0 \le n\rho' - \alpha_n \le 1,\ n = 1,2,...,\rho' > 1$.

§3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 4. *Пусть $\rho \ge 1$ $(\rho = \frac{\pi}{\alpha} \ge 1)$, и пусть для монотонно возрастающей функции $T_*(r)$, $r > 0$ сходится интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\rho}}\, dr. \tag{40}$$

Тогда для любых $\rho' \ge \rho$ и последовательности чисел $\{\alpha_n'\}$, где

$$0 < \alpha_n' \le \rho' n, \quad n\rho' - \alpha_n' \le 1, \quad n = 1,2,.., \quad \alpha_0' = 0, \tag{41}$$

существует целая (если α_n' – целые числа) или квазицелая (если α_n' – произвольные числа) функция

$$0 \not\equiv f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\alpha_n'} \tag{42}$$

порядка ρ и нормального типа, удовлетворяющая условию

$$|f(z)| \le \frac{\exp(-C_0\, Re z^{\rho})}{T_*(|z|^{\rho'/\rho})}, \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{2\rho'}, \tag{43}$$

где числа $\{a_n\}$ определяются в явном виде

$$C_0 = C(\sigma_0), \qquad \sigma_0 = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_\nu'} - \frac{1}{\rho'\nu}\right)\right) < \infty. \tag{44}$$

Доказательство. Обозначим

$$T(r^{\rho}) = T_*(r). \tag{45}$$

Так как

$$\int^{\infty} \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\rho}}\, dr = \int^{\infty} \frac{\ln T(r^{\rho})}{r^{1+\rho}}\, dr = \frac{1}{\rho}\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{(1+\rho)/\rho}}\, r^{(1-\rho)/\rho}\, dr = \frac{1}{\rho}\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr,$$

то из (40) следует сходимость интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr. \tag{40'}$$

Обозначим

$$m_n = \sup_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)} \qquad \left(T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}, \quad r > 0\right). \tag{46}$$

Из сходимости интеграла (40′) следует сходимость ряда

$$\sum_{n \geq 0} \frac{m_n^c}{m_{n+1}^c}, \tag{47}$$

где $\{m_n^c\}$ – выпуклая регуляризация определенной в (46) последовательности $\{m_n\}$. Составим теперь функцию

$$f_1(z) = \int_u^1 \overset{\circ}{\omega}(zt, \alpha')\, \varphi(t)\, dt, \tag{48}$$

где последовательность $\alpha' = \{\alpha'_\nu\}$ удовлетворяет условиям (41), функция $\varphi(t)$ согласно (47) – условиям теоремы 1. Докажем, что при удобно подобранной постоянной $C > 0$ функция $f_1(Cz)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 4.

Нам следует доказать, что

1) $f_1(Cz)$ – целая или квазицелая функция порядка $\rho' \geq \rho$ и нормального типа.

2) $f_1(Cz)$ удовлетворяет неравенству (43).

Согласно следствию 1 и (41) для функции $\overset{\circ}{\omega}(z, \alpha')$, определенной в (26), имеем

$$\rho_\omega = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln \alpha'_n}{\sum_{\nu=1}^n 1/\alpha'_\nu} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln(\rho' n) + O(1)}{\sum_{\nu=1}^n \dfrac{1}{\rho' \nu} + O(1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\rho' \ln n}{\sum_{\nu=1}^n 1/\nu} = \rho'.$$

Это означает, что (см. [9]) функция

$$\overset{\circ}{\omega}(t, \alpha') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{t^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta\, \overset{\circ}{e}_{1,\infty}(\zeta, \alpha')} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\alpha'_n}, \tag{49}$$

где $\alpha' = \{\alpha'_\nu\}$, определена в (41) и

$$a_n = \left(-e \prod_{n \neq \nu = 1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha'_n}{\alpha'_\nu}\right) \exp\left(\frac{\alpha'_n}{\alpha'_\nu}\right)\right)^{-1} \tag{50}$$

– целая или квазицелая функция порядка ρ' и нормального типа σ, который определяется из равенства

$$(\sigma e\rho')^{1/\rho'} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n'^{1/\rho'} \, |a_n|^{1/\alpha_n'}.$$

Очевидно, что теми же свойствами обладает функция

$$f_1(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^{\alpha_k'}, \tag{48'}$$

где

$$C_0 = \int_u^1 \varphi(t)\,dt, \qquad C_k = a_k \int_u^1 t^{\alpha_k'} \varphi(t)\,dt, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

а числа $\{a_k\}$ определены в (50). Этим доказано утверждение 1).

Для доказательства 2) проинтегрируем по частям интеграл (48) n раз, при этом каждый раз будем создавать обобщенные производные функции $\varphi(t)$ относительно последовательности $\{\beta_n = n\rho'\}$ в смысле (15).

Полагая $\beta_n - \beta_{n-1} - 1 = \rho' - 1$ и $z = \mathrm{Re} z > 0$, будем иметь

$$f_1(z) = \int_u^1 \mathring{\omega}(zt, \alpha')\, t^{\rho'-1} \frac{\varphi(t)}{t^{\rho'-1}}\, dt =$$

$$= \frac{\varphi(t)}{t^{\rho'-1}} \left(\int_t^{\infty} \mathring{\omega}(t\tau, \alpha')\, \tau^{\rho'-1}\, d\tau \right) \Bigg|_{t=u}^{1} + \int_u^1 \omega^{[-1]}(z, t, \alpha')\, \varphi^{[1]}(t)_\beta\, dt, \tag{51}$$

где

$$\omega^{[-1]}(z, t, \alpha') = -\int_t^{\infty} \mathring{\omega}(z\tau, \alpha')\, \tau^{\rho'-1}\, d\tau, \tag{52}$$

откуда согласно теореме 1 получаем

$$f_1(z) = \int_u^1 \omega^{[-1]}(z, t, \alpha')\, \varphi^{[1]}(t)_\beta\, dt. \tag{51'}$$

Повторяя этот процесс n раз, получим

$$f_1(z) = \int_u^1 \omega^{[-n]}(z, t, \alpha')\, \varphi^{[n]}(t)_\beta\, dt, \tag{51''}$$

где

$$\omega^{[-n]}(z, t, \alpha') = (-1)^n \int_t^{\infty} \tau_n^{\rho'-1}\, d\tau_n \int_{\tau_n}^{\infty} \tau_{n-1}^{\rho'-1}\, d\tau_{n-1} \ldots \int_{\tau_2}^{\infty} \mathring{\omega}(z\tau, \alpha')\, \tau_1^{\rho'-1}\, d\tau_1. \tag{52'}$$

Если теперь в теореме 2 примем $0 < \alpha_n = \alpha'_n \le \beta_n = \rho' n$, $\beta_n - \alpha'_n \le 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то будем иметь

$$\overset{\circ}{\omega}(z\tau, \alpha') = \int_0^{\sigma_0} \overset{\circ}{\omega}\left(\frac{z\tau}{t_0}, \beta\right) dg(t_0), \tag{28'}$$

где

$$\sigma_0 = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha'_\nu} - \frac{1}{\beta_\nu}\right)\right) < \infty, \quad V_0^{\sigma_0} g = g(\sigma_0) - g(0=) = 1.$$

Согласно равенству (28′)

$$\omega^{[-n]}(z, t, \alpha') = \int_0^{\sigma_0} \omega^{[-n]}\left(\frac{z}{t_0}, t, \beta\right) dg(t_0). \tag{53}$$

С другой стороны (см. [10], стр. 511–512)

$$\overset{\circ}{\omega}(x, \beta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^{-\zeta}\, d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\zeta}{\rho'\nu}\right)\exp\left(-\frac{\zeta}{\rho'\nu}\right)} = \exp\left(-x^{\rho'} e^{-C_e}\right),$$

где C_e – постоянная Эйлера. Это значит, что для любого $\rho' \ge \rho$

$$-\int_t^{\infty} \tau^{\rho'-1}\exp\left(-\tau^{\rho'} C_e\right) d\tau = \frac{1}{\rho' C_e}\int_t^{\infty} d\left(\exp\left(-C_e \tau^{\rho'}\right)\right) = \frac{\exp\left(-C_e t^{\rho'}\right)}{\rho' C_e}.$$

Поэтому из (53) уже для комплексных z из области $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2\rho}$ и $t \in [u, 1]$ будем иметь

$$\omega^{[-n]}(z, t, \alpha') = \frac{\exp(nC_e)}{\rho'^n z^{n\rho'}}\int_0^{\sigma_0} \exp\left(-\left(\frac{zt}{t_0}\right)^{\rho'}\exp(-C_e)\right) t_0^{n\rho'}\, dg(t_0). \tag{53'}$$

Ясно, что (53′) остается в силе и тогда, когда $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{2\rho}$, и поэтому получаем неравенство

$$|\omega^{[-n]}(z, t, \alpha')| \le \frac{C_*^n}{|z^{n\rho'}|}\exp\left(\exp(-C_e)\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{\rho'} \mathrm{Re} z^{\rho'}\right), \tag{53''}$$

где $C_* = e^{C_0}\sigma_0^{\rho'}$, $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{2\rho}$, $\rho' \ge \rho \ge 1$.

Возвращаясь к (51″), согласно (53″) получаем

$$|f_1(z)| \le \frac{C_*^n}{|z|^{\rho' n}}\int_u^1 |\varphi^{[n]}(t)_\beta| \exp\left(-\exp(-C_e)\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)^{\rho'} \mathrm{Re} z^{\rho'}\right) dt \le$$

$$\le \frac{C_*^n m_n}{|z|^{\rho' n}}\exp\left(-\exp(-C_e)\left(\frac{u}{\sigma_0}\right)^{\rho'} \mathrm{Re} z^{\rho'}\right),$$

если только $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{2\rho'}$, где постоянная $C_* > 0$ не зависит от n и z.

Далее, согласно теореме 1 получаем

$$|f_1(z)| \le \frac{C_*^n m_n}{|z|^{\rho' n}} \exp\left(-C_1 \mathrm{Re} z^{\rho'}\right),$$

где $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{2\rho}$, $|z| \ge 1$, $C_1 = \exp(-C_\epsilon)\left(\dfrac{u}{\sigma_0}\right)^{\rho'}$, $C_* = e^{C_\epsilon}\sigma_0^{\rho'}$.

Значит для $f(z) = f_1(C_*^{-1/\rho'} z)$ имеем

$$|f(z)| = |f_1(C_*^{-1/\rho'} z)| \le \frac{m_n}{|z|^{\rho' n}} \exp\left(-C_1 C_*^{-1} \mathrm{Re} z^{\rho'}\right),$$

где $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{2\rho}$, $|z| \ge 1$, $C_1 = \exp(-C_\epsilon)\sigma_0^{-\rho'} u^{\rho'}$, $C_* = e^{C_\epsilon}\sigma_0^{\rho'}$.

Так как последние неравенства имеют место для всех $n = 0, 1, 2, ...$, то они остаются в силе и при

$$\inf_{n\ge 0} \frac{m_n}{|z|^{\rho' n}} = \left(\sup \frac{|z^{\rho'}|^n}{m_n}\right)^{-1} = \frac{1}{T(|z|^{\rho'})}.$$

Поэтому

$$|f(z)| \le \frac{\exp\left(-C' \mathrm{Re} z^{\rho'}\right)}{T_*(|z|^{\rho'/\rho})}, \qquad |\arg z| \le \frac{\pi}{2\rho},$$

где $C' > 0$ – постоянная, не зависящая от z. Теорема 4 доказана.

Замечание 4. Для $\rho = \dfrac{\pi}{\alpha} \ge 1$ теоремой 4 устанавливается связь между раствором угла, где целая или квазицелая функция убывает с наибольшей быстротой, и характером лакунарности его разложения в виде ряда (42).

Замечание 5. Условие (40) теоремы 4 не подлежит улучшению, потому что из решения проблемы Ватсона для угловой области $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2\rho}$ (здесь $\alpha = \pi/\rho \le \pi$) следует, что функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям

$$|f(z)| \le \frac{1}{T_*(|z|)}, \quad |\arg z| \le \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2\rho}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\ln T_*(r)}{r^{1+\rho}}\, dr = \int_0^\infty r^{-(\frac{\pi}{\alpha}+1)} \ln[T_*(r)]\, dr = \infty$$

равняется нулю тождественно.

ABSTRACT. The present paper considers the problem of maximal rate of decrease of an entire function in an angular domain $|\arg z| \le \alpha/2$

for the case $0 < \alpha < \pi$. In contrast to N. U. Arakelian's theorem, no a priori assumption concerning positions of zeros of entire functions is done. The purpose is to clarify whether the condition $p(r)\,r^{-\pi/\alpha} \downarrow 0$ as $r \to \infty$ is essential and to derive conditions under which analogs of Arakelian's results remain valid for entire and quasi-entire functions. The case $\pi \leq \alpha < 2\pi$ will be considered in the second paper under the same title.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми функциями", ДАН СССР, т. 47, № 4, стр. 243 — 245, 1945.
2. Н. У. Аракелян, "Построение целых функций, равномерно убывающих в угле", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 1, № 3, стр. 162 — 191, 1966.
3. К. Н. Хачатрян, "Построение целых функций минимального порядка, убывающих в угле с заданной скоростью", Изв. АН АрмССР, т. 11, № 1, стр. 34 – 55, 1976.
4. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2, Наука, М., 1968.
5. С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, ОНТИ, М., 1937.
6. С. Мандельбройт, Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, ИЛ, М., 1955.
7. Г. В. Бадалян, "Обобщенные факториальные ряды", Сообщ. ин-та матем. и мех. АН АрмССР, т. 50, стр. 13 — 64, 1950.
8. Г. В. Бадалян, Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций, Наука, М., 1990.
9. Г. В. Бадалян, "О некоторых свойствах единственности целых и квазицелых функций, представляемых лакунарными рядами", Сиб. мат. журнал, т. 12, № 6, стр. 1192 — 1210, 1971.
10. Г. В. Бадалян, "Применение преобразования типа свертки к теории обобщенной проблемы моментов Стилтьеса", Изв. АН СССР, Математика, т. 31, стр. 491 — 530, 1967.

2 июля 1996

Ереванский государственный университет