ФУНКЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

Т. Н. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 6, 1996

Вводится понятие функции собственных значений семейства операторов Дирака. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности функции этому классу.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим краевую задачу

$$ly \equiv \left\{ B\frac{d}{dx} + \Omega(x) \right\} y = \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < x < \pi \quad \lambda \in \mathbf{C}, \tag{1.1}$$

$$y_1(0)\cos\gamma + y_2(0)\sin\gamma = 0, \tag{1.2}$$

$$y_1(\pi) = 0, \tag{1.3}$$

для канонической (см. [1]) системы (1.1) дифференциальных уравнений Дирака, где $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$.

Если p и q – действительные и абсолютно суммируемые функции на $[0, \pi]$, т. е. $p, q \in L^1_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, то дифференциальные операторы $L(\Omega, \gamma)$, порожденные в гильбертовом пространстве $L^2(0, \pi; \mathbf{C}^2)$ двухкомпонентных вектор–функций дифференциальным выражением l на области определения[1]

$$\mathcal{D}_{L(\Omega,\gamma)} = \left\{ y: \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ y_k \in AC[0, \pi], \ (ly)_k \in L^2[0, \pi], \ k = 1, 2; \right.$$

$$\left. y_1(0)\cos\gamma + y_2(0)\sin\gamma = 0, \ y_1(\pi) = 0 \right\},$$

[1] $AC[0, \pi]$ – множество абсолютно непрерывных функций на $[0, \pi]$

самосопряженные при любых действительных γ. Известно ([1], [2]), что $L(\Omega,\gamma)$ имеет простой дискретный спектр однократных собственных значений $\lambda_n(\Omega,\gamma)$, $n \in \mathbb{Z}$, образующих неограниченную (и сверху и снизу) последовательность.

Имея целью дать корректную нумерацию собственных значений, рассмотрим сначала оператор $L(\Omega,\frac{\pi}{2})$. Пронумеруем собственные значения $\lambda_n(\Omega,\pi/2) = \lambda_n(\pi/2)$ в порядке возрастания индекса $n \in \mathbb{Z}$, причем через $\lambda_0(\pi/2)$ обозначим наименее удаленное от нуля неположительное собственное значение оператора $L(\Omega,\pi/2)$, т.е.

$$... < \lambda_{-2}(\pi/2) < \lambda_{-1}(\pi/2) < \lambda_0(\pi/2) \le 0 < \lambda_1(\pi/2) < \lambda_2(\pi/2) < .... \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *Если $\alpha \in (-\pi/2,\pi/2)$, то между $\lambda_n(\pi/2)$ и $\lambda_{n+1}(\pi/2)$ лежит ровно одно собственное значение оператора $L(\Omega,\alpha)$.*

Это собственное значение мы обозначим через $\lambda_n(\alpha)$, т.е. для $\alpha \in (-\pi/2,\pi/2)$

$$\lambda_n(\pi/2) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\pi/2), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Лемма 1.2. *Если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то между $\lambda_n(\pi/2)$ и $\lambda_n(\alpha)$ лежит ровно одно собственное значение оператора $L(\Omega,\beta)$.*

Это собственное значение пронумеруем номером n, т.е.

$$\lambda_n(\pi/2) < \lambda_n(\beta) < \lambda_n(\alpha) < \lambda_{n+1}(\pi/2), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Неравенства (1.4) и (1.5) дают однозначную нумерацию собственных значений операторов $L(\Omega,\alpha)$ для всех $\alpha \in (-\pi/2,\pi/2]$.

Чтобы задать нумерацию собственных значений для всех действительных значений параметра γ из (1.2), поступим следующим образом. Произвольное действительное γ представим в виде $\gamma = \alpha - \pi m$ при некоторых $\alpha \in (-\pi/2,\pi/2]$ и $m \in \mathbb{Z}$. Собственное значение $\lambda_n(\gamma)$ определим следующим образом :

$$\lambda_n(\gamma) = \lambda_n(\alpha - \pi m) \overset{def}{=\!=} \lambda_{n+m}(\alpha). \tag{1.7}$$

Формула (1.7) задает единую нумерацию собственных значений для всех действительных значений параметра γ из краевого условия (1.2).

Определение. Функцию, определенную для каждого действительного числа $\gamma = \alpha - \pi m$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$, $m \in \mathbb{Z}$, по формуле

$$\lambda(\gamma) = \lambda(\alpha - \pi m) \stackrel{def}{=\!=} \lambda_m(\alpha),$$

где $\lambda_m(\alpha)$, $m \in \mathbb{Z}$ – собственные значения оператора $L(\Omega, \alpha)$, пронумерованные согласно (1.4) — (1.5), будем называть функцией собственных значений (*ФСЗ*) семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha) : \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$.

Замечание. По существу, мы назвали *ФСЗ* собственное значение $\lambda_0(\gamma)$, продолженное с $(-\pi/2, \pi/2]$ на всю действительную ось по формуле (1.7) (при $n = 0$).

Теорема 1. *Пусть $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$. Тогда ФСЗ $\lambda(\cdot)$ семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha), \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$ обладает следующими свойствами :*

1. Как функция действительного переменного она строго монотонно убывающая действительнозначная функция, определенная на всей оси. Существует точка $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2]$ такая, что $\lambda(\alpha_0) = 0$.

2. Для каждой действительной точки γ существует некоторая комплексная окрестность V_γ, в которой определена однозначная аналитическая функция $\widetilde{\lambda}(\cdot)$, совпадающая с $\lambda(\cdot)$ при действительных значениях аргумента.

3. Функция $c(\gamma) \stackrel{def}{=\!=} \lambda(\gamma) + \gamma/\pi$ обладает свойством :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c^2(\alpha - \pi n) < \infty \quad \text{для каждого} \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2].$$

4. Для любых α и β таких, что $-\pi/2 < \alpha < \beta \le \pi/2$ и любого $n \in \mathbb{Z}$

$$\left.\frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma}\right|_{\gamma = \alpha - \pi n} = \frac{\lambda(\alpha - \pi n) - \lambda(\beta - \pi n)}{\sin(\beta - \alpha)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \ne n}}^{\infty} \frac{\lambda(\beta - \pi k) - \lambda(\alpha - \pi n)}{\lambda(\alpha - \pi k) - \lambda(\alpha - \pi n)}. \tag{1.8}$$

Теорема 2. *Пусть функция $\lambda(\cdot)$ обладает свойствами 1) — 4) из теоремы 1. Тогда существует единственная матрица–функция $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$ с элементами $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что $\lambda(\cdot)$ есть ФСЗ семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha), \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$, т.е. для любого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ значение $\lambda(\alpha - \pi n)$ есть собственное значение $\lambda_n(\Omega, \alpha)$ оператора $L(\Omega, \alpha)$, пронумерованное согласно (1.4) — (1.5).*

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим через $\varphi(x,\lambda,\alpha)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} ly = \lambda y, \\ y(0) = \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.1}$$

При каждом фиксированном $x \in [0,\pi]$ компоненты $\varphi_1(x,\lambda,\gamma)$ и $\varphi_2(x,\lambda,\gamma)$ есть целые функции двух комплексных переменных λ и γ ([3]). Через $u(x,\lambda)$ обозначим решение задачи Коши

$$\begin{cases} ly = \lambda y, \\ y(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Компоненты $u_1(x,\lambda)$ и $u_2(x,\lambda)$ есть целые функции λ. Рассмотрим мероморфную по λ функцию

$$m(\lambda) = \frac{u_1(0,\lambda)\cos\alpha + u_2(0,\lambda)\sin\alpha}{u_2(0,\lambda)}, \qquad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{2.2}$$

Нули функции $m(\lambda)$ есть собственные значения $\lambda_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$ оператора $L(\Omega,\alpha)$, а полюса – собственные значения $\lambda_n(\pi/2)$ оператора $L(\Omega,\pi/2)$. Нетрудно показать, что имеет место тождество

$$\operatorname{Im}\{m(\lambda)\} = \frac{\int_0^\pi |u(x,\lambda)|^2\, dx \cdot \cos\alpha}{|u_2(0,\lambda)|^2} \cdot \operatorname{Im}\lambda,$$

откуда следует, что $m(\lambda)$ есть "вещественная" (т.е. $\operatorname{Im}\{m(\lambda\} = 0$ при $\operatorname{Im}\lambda = 0$) мероморфная функция, переводящая верхнюю полуплоскость в верхнюю. Для таких функций известна следующая (см. [5], стр. 388)

Теорема 2.0. *Чтобы некоторая вещественная мероморфная функция $m(\lambda)$ переводила верхнюю полуплоскость в верхнюю, необходимо и достаточно, чтобы эта функция представлялась в виде*

$$m(\lambda) = c\frac{\lambda - a_0}{\lambda - b_0} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{a_k}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{b_k}\right)^{-1}, \tag{2.3}$$

где $c > 0$ и

$$b_k < a_k < b_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a_{-1} < 0 < b_1. \tag{2.4}$$

В случае функции (2.2) $a_k = \lambda_k(\alpha)$, $b_k = \lambda_k(\pi/2)$ и поэтому, из теоремы 2.0, в частности, следует лемма 1.1. Кроме того, именно в принятой нами нумерации (1.4) и (1.5) верны представление (2.3) и неравенства (2.4).

Рассмотрим также мероморфную функцию

$$\tilde{m}(\lambda) = \frac{u_1(0,\lambda)\cos\alpha + u_2(0,\lambda)\sin\alpha}{u_1(0,\lambda)\cos\beta + u_2(0,\lambda)\sin\beta}, \quad \text{где} \quad -\pi/2 < \alpha < \beta \leq \pi/2, \tag{2.5}$$

нули которой есть опять $\lambda_n(\alpha)$, а полюса – собственные значения $\lambda_n(\beta)$, $n \in \mathbb{Z}$ оператора $L(\Omega, \beta)$. Из тождества ([4])

$$\mathrm{Im}\{\tilde{m}(\lambda)\} = \frac{\int_0^\pi |u(x,\lambda)|^2\, dx \cdot \sin(\beta-\alpha)}{|u_1(0,\lambda)\cos\beta + u_2(0,\lambda)\sin\beta|^2} \cdot \mathrm{Im}\lambda$$

следует, что $\tilde{m}(\lambda)$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю и, следовательно, для нее имеют место представление (2.3) и неравенства (2.4), где $a_k = \lambda_k(\alpha)$, $b_k = \lambda_k(\beta)$. Отсюда следует лемма 1.2 и неравенства (1.6), из которых следует, что (при нашей нумерации) каждое собственное значение $\lambda_n(\cdot)$ есть строго монотонно убывающая функция на отрезке $(-\pi/2, \pi/2]$.

Из определения *ФСЗ* следует, что она есть строго монотонно убывающая функция на отрезках $(\pi m - \pi/2, \pi m + \pi/2]$, $m \in \mathbb{Z}$, покрывающих действительную ось. Докажем теперь, что определенная нами *ФСЗ* есть аналитическая функция на действительной оси. Для этого мы воспользуемся теоремой о неявной функции в следующей формулировке (см. [6], стр. 166) :

Теорема 2.1. *Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$, $\gamma \in \mathbf{C}$ и $F(\lambda,\gamma)\colon\ U \to \mathbf{C}$ – аналитическая в некоторой окрестности U точки (λ_0, γ_0) функция, причем*

$$\frac{\partial F(\lambda_0,\gamma_0)}{\partial \lambda} \neq 0.$$

Тогда равенство $F(\lambda,\gamma) = F(\lambda_0,\gamma_0)$ определяет единственным образом функцию $\lambda = \lambda(\gamma)\colon\ V \to \mathbf{C}$, аналитическую в некоторой окрестности V точки γ_0 и такую, что при $\gamma \in V$ $(\lambda(\gamma),\gamma) \in U$, $\lambda(\gamma_0) = \lambda_0$ и $F(\lambda(\gamma),\gamma) = F(\lambda_0,\gamma_0)$ при всех $\gamma \in V$.

В качестве $F(\lambda,\gamma)$ мы возьмем $F(\lambda,\gamma) = \varphi_1(\pi,\lambda,\gamma)$, которая является целой функцией двух комплексных переменных λ и γ. Собственные значения оператора $L(\Omega,\gamma)$ есть нули (по λ) функции $\varphi_1(\pi,\lambda,\gamma)$. Пусть γ_0 – произвольное действительное число, которое мы представим в виде $\gamma_0 = \alpha_0 - \pi m$, где $\alpha_0 \in (\pi/2, \pi/2]$, $m \in \mathbb{Z}$, и пусть $\lambda_0 = \lambda(\gamma_0) = \lambda(\alpha_0 - \pi m) = \lambda_m(\alpha_0)$ есть значение *ФСЗ* в γ_0. Тогда $\varphi_1(\pi,\lambda_0,\gamma_0) = \varphi_1(\pi,\lambda_m(\alpha_0),\alpha_0 - \pi m) = 0$, ибо собственная функция

$\varphi(x, \lambda_m(\alpha_0), \alpha_0 - \pi m)$ удовлетворяет краевому условию (1.3). Докажем, что значение производной $\dfrac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda_0, \gamma_0)}{\partial \lambda}$ в точке (λ_0, γ_0) отлично от нуля. Для этого заметим, что для решения $\varphi(x, \lambda, \gamma)$ задачи Коши (2.1) имеет место тождество

$$\frac{\partial \varphi_2(\pi, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda}\varphi_1(\pi, \lambda, \gamma) - \frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda, \gamma)}{\partial \lambda}\varphi_2(\pi, \lambda, \gamma) = \int_0^\pi \left[\varphi_1^2(x, \lambda, \gamma) + \varphi_2^2(x, \lambda, \gamma)\right]\, dx$$

(см., например, [1], стр. 81). Учитывая, что $\varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) = 0$, получаем

$$\frac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\varphi_2(\pi, \lambda(\gamma), \gamma)} \int_0^\pi \left[\varphi_1^2(x, \lambda(\gamma), \gamma) + \varphi_2^2(x, \lambda(\gamma), \gamma)\right]\, dx. \tag{2.6}$$

В силу самосопряженности операторов $L(\Omega, \gamma)$ при действительных γ компоненты φ_1 и φ_2 собственных вектор–функций $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)$ можно считать действительными, поэтому $|\varphi|^2 \equiv |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$. Отсюда следует, что квадрат L^2–нормы

$$a(\gamma) = \int_0^\pi |\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)|^2\, dx \tag{2.7}$$

собственной функции $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)$, который обычно называют нормировочной постоянной, совпадает с интегралом в правой части формулы (2.6) и всегда отличен от нуля при $\gamma \in \mathbb{R}$. Очевидно также, что $\varphi_2(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) \neq 0$, ибо иначе, из единственности решения задачи Коши последовало бы (поскольку $\varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) = 0$), что $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma) \equiv 0$, а это противоречит тому, что $\varphi(x, \lambda(\gamma), \gamma)$ есть собственная функция.

Таким образом, согласно (2.6) значение производной $\dfrac{\partial \varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma)}{\partial \lambda}$ отлично от нуля для любой действительной точки γ. Поэтому, согласно теореме 2.1 существует комплексная окрестность $V \subset \mathbf{C}$ действительной точки γ_0, в которой определена однозначная аналитическая функция $\lambda(\gamma)$, $\gamma \in V$ такая, что $\lambda(\gamma_0) = \lambda_0$ и $\varphi_1(\pi, \lambda(\gamma), \gamma) = 0$ для всех $\gamma \in V$. Поскольку γ_0 – произвольное действительное число, то нами доказана аналитичность $\lambda(\cdot)$ на всей действительной оси. Точнее, существует некоторое открытое множество, содержащее действительную ось, где определена однозначная аналитическая функция $\widetilde{\lambda}(\cdot)$, совпадающая с определенной нами *ФСЗ* при действительных значениях аргумента.

Из непрерывности *ФСЗ* $\lambda(\gamma)$ следует, что при изменении γ на $[-\pi/2, \pi/2]$ эта функция принимает все значения от

$$\lambda(-\pi/2) = \lambda(\pi/2 - \pi) = \lambda_1(\pi/2) > 0 \quad \text{до} \quad \lambda(\pi/2) = \lambda_0(\pi/2) \leq 0.$$

Следовательно, существует точка $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2]$ такая, что $\lambda(\alpha_0) = 0$. Таким образом, доказаны утверждения 1) и 2) теоремы 1.

Известно ([7], [8]), что если $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, то для собственных значений операторов $L(\Omega, \alpha)$ имеет место асимптотика :

$$\lambda_n(\alpha) = n - \frac{\alpha}{\pi} + c_n(\alpha), \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2(\alpha) < \infty \tag{2.8}$$

для любого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$. В терминах *ФСЗ* эту асимптотику можно записать в виде $\lambda(\gamma) = -\dfrac{\gamma}{\pi} + c(\gamma)$, где $c(\gamma)$ – аналитическая в каждой действительной точке функция ($c(\alpha - \pi n) \stackrel{def}{=\!=} c_n(\alpha)$), обладающая свойством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2(\alpha) < \infty \qquad \text{для любого} \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2].$$

Для доказательства представления (1.8), во–первых, заметим, что для любых действительных γ и β имеет место тождество

$$[\lambda(\gamma) - \lambda(\beta)] \cdot (\varphi(\cdot, \lambda(\gamma), \gamma), \varphi(\cdot, \lambda(\beta), \beta)) = \sin(\beta - \gamma), \tag{2.9}$$

где (φ, ψ) означает скалярное произведение.

Разделив обе стороны (2.9) на $\gamma - \beta$ и устремив $\beta \to \gamma$, получаем

$$\frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma} \cdot \|\varphi(\cdot, \lambda(\gamma), \gamma)\|^2 = -1,$$

т.е. (см. (2.7))

$$\frac{\partial \lambda(\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{1}{a(\gamma)}. \tag{2.10}$$

С другой стороны, хорошо известно ([7], [4]) представление нормировочных постоянных $a_n(\alpha) \stackrel{def}{=\!=} a(\alpha - \pi n)$ через два спектра :

$$\frac{1}{a_n(\alpha)} = \frac{\lambda_n(\beta) - \lambda_n(\alpha)}{\sin(\alpha - \beta)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\beta) - \lambda_n(\alpha)}{\lambda_k(\alpha) - \lambda_n(\alpha)} \tag{2.11}$$

для любых β таких, что $-\pi/2 < \alpha < \beta \leq \pi/2$. Из определения $\lambda(\alpha - \pi n) = \lambda_n(\alpha)$ *ФСЗ* и равенств (2.10) и (2.11) следует представление (1.8). Теорема 1 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть α и α_1 – произвольные точки из $(-\pi/2, \pi/2]$, $-\pi/2 < \alpha < \alpha_1 \leq \pi/2$. Рассмотрим последовательности

$$\mu_k = \lambda(\alpha - \pi k), \qquad \nu_k = \lambda(\alpha_1 - \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из строгой убываемости функции $\lambda(\cdot)$ следует, что последовательности $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ перемежаются, т.е.

$$\ldots < \nu_k < \mu_k < \nu_{k+1} < \mu_{k+1} < \ldots, \tag{3.1}$$

и имеют асимптотики (см. свойство 3) :

$$\begin{cases} \mu_k = k - \dfrac{\alpha}{\pi} + c(\alpha - \pi k) = k - \dfrac{\alpha}{\pi} + c_k(\alpha), & \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2(\alpha) < \infty, \\ \nu_k = k - \dfrac{\alpha_1}{\pi} + c(\alpha_1 - \pi k) = k - \dfrac{\alpha_1}{\pi} + c_k(\alpha_1), & \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2(\alpha_1) < \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Известна следующая ([7], теорема 4.2, [8])

Теорема 3.1. *Чтобы последовательности $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ были спектрами $L(\Omega, \alpha)$ и $L(\Omega, \alpha_1)$, соответственно, с матрицей $\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, где $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$, необходимо и достаточно, чтобы они перемежались и имели асимптотики (3.2).*

Из этой теоремы следует, что существует матрица $\Omega_1(x)$ с элементами $p, q \in$ $\in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$ такая, что

$$\lambda_k(\Omega_1, \alpha) = \mu_k \qquad \text{и} \qquad \lambda_k(\Omega_1, \alpha_1) = \nu_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом (см. [7], теорема 2.1) величины $a_n(\Omega_1, \alpha)$, определенные равенствами

$$\frac{1}{a_n(\Omega_1, \alpha)} = \frac{\nu_n - \mu_n}{\sin(\alpha - \alpha_1)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\nu_k - \mu_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются нормировочными постоянными оператора $L(\Omega_1, \alpha)$, т.е. квадратами норм собственных функций $\varphi(x, \mu_n, \alpha)$, являющихся решениями задач Коши

$$\begin{cases} \left\{ B\dfrac{d}{dx} + \Omega_1(x) \right\} y = \mu_n y, \\ y(0) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Обозначим через $\{\lambda_k(\pi/2)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ последовательность значений $\lambda_k(\pi/2)\stackrel{def}{=\!=}\lambda(\pi/2-\pi k)$ функции $\lambda(\cdot)$. Из свойства 1 следует, что эта последовательность будет удовлетворять неравенствам (1.4), а последовательность $\lambda_k(\alpha)\stackrel{def}{=\!=}\lambda(\alpha-\pi k)$ – неравенствам (1.5) для любого $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Если взять вместо α_1 любую другую точку α_2 такую, что $\alpha < \alpha_2 \leq \pi/2$, то, совершенно аналогично, последовательности

$$\mu_k = \lambda(\alpha - \pi k) \quad \text{и} \quad \xi_k = \lambda(\alpha_2 - \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

будут перемежаться $(\ldots < \xi_k < \mu_k < \xi_{k+1} < \mu_{k+1} < \ldots)$ и ξ_k будут иметь асимптотику

$$\xi_k = k - \frac{\alpha_2}{\pi} + c_k(\alpha_2), \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2(\alpha_2) < \infty.$$

Согласно упомянутой выше теореме 3.1 существует каноническая матрица $\Omega_2(x)$ с элементами $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ такая, что

$$\mu_k = \lambda_k(\Omega_2, \alpha), \qquad \xi_k = \lambda_k(\Omega_2, \alpha_2), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При этом величины $a_n(\Omega_2, \alpha)$, определяемые равенствами

$$\frac{1}{a_n(\Omega_2,\alpha)} = \frac{\xi_n - \mu_n}{\sin(\alpha - \alpha_2)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k - \mu_n}{\mu_k - \mu_n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются нормировочными постоянными оператора $L(\Omega_2, \alpha)$. В силу свойства 4 получаем, что $a_n(\Omega_2,\alpha) = a_n(\Omega_1,\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, имеем

$$\lambda_n(\Omega_1,\alpha) = \lambda_n(\Omega_2,\alpha), \quad a_n(\Omega_1,\alpha) = a_n(\Omega_2,\alpha), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Согласно теореме В. А. Марченко ([10], [11]) отсюда следует, что $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду.

Аналогичная ситуация будет иметь место для любой пары (α, α_n) такой, что $-\pi/2 < \alpha < \alpha_n \leq \pi/2$. Если выбрать последовательность α_n сходящейся к α, то из вышеприведенных рассуждений следует, что существует единственная каноническая матрица Ω с элементами $p, q \in L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ такая, что

$$\lambda_k(\Omega, \alpha_n) = \lambda(\alpha_n - \pi k)$$

для любых $k \in \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Отсюда будет следовать, что *ФСЗ* семейства операторов Дирака $\{L(\Omega, \alpha), \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2]\}$ совпадает с функцией $\lambda(\cdot)$ на сходящихся последовательностях $\alpha_n - \pi k \to \alpha - \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку обе эти функции аналитические (свойство 2), то совпадают всюду, где они определены. Теорема 2 доказана.

ABSTRACT. The concept of an eigenvalue function of a family of Dirac operators is introduced. Necessary and sufficient conditions ensuring that a function belongs to this class are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в спектральную теорию, Наука, М., 1970.
2. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения,", Наукова Думка, Киев, 1977.
3. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, "Теория обыкновенных дифференциальных уравнений", М., 1955.
4. Т. Н. Арутюнян, "Обратная задача для системы Дирака на полуоси с дискретным спектром", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 20, № 4, стр. 245 – 268, 1985.
5. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
6. Ю. Н. Бибиков, Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1981.
7. М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, "Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам", Труды летней школы по спектральной теории операторов и теория представлений групп, Элм, Баку, стр. 46 — 71, 1975.
8. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака, I", Теория функций, функциональный анализ и их приложения, т. 30, Харьков, стр. 90 – 101, 1978.
9. Т. В. Мисюра, "Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака, II", Теория функций, функциональный анализ и их приложения, т. 31, Харьков, стр. 102 – 109, 1979.
10. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы дифференциальных операторов второго порядка, I", Труды ММО, т. 1, 1951.
11. Т. Н. Арутюнян, "Изоспектральные операторы Дирака", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 2, стр. 1 – 10, 1994.

27 ноября 1996 Ереванский государственный университет