

ЭКВИВАРИАНТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АРЕНСА-ИЛЛЗА

П. С. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 5, 1996

В работе [1] Р. Аренсом и Р. Иллизом были получены теоремы о замкнутом равномерно (изометричном) вложении равномерного (метризуемого) пространства в локально-выпуклое (нормируемое) топологическое пространство. В настоящей работе получены эквивариантные аналоги указанных результатов (теоремы 2 и 4), которые являются теоремами линеаризации тихоновских (метризуемых) G -пространств, обобщающие известные результаты Г. Д. Мостова [2] и Р. С. Палле [3] в случае компактной группы Ли, Ю. М. Смирнова [4] и Ян де Вриса [5] в случае любой локально-компактной группы.

Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $M(X)$ множество действительных функций $m : X \rightarrow \mathbb{R}$ следующего вида :

$$m(x) = \begin{cases} \lambda_i \neq 0 & \text{для } x = x_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Множество $M(X)$ является вещественным линейным пространством с поточечно определенными алгебраическими операциями. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in X$ условимся через λx обозначить ту функцию, определенную на X , которая принимает значение λ в точке x и 0 в остальных точках. Тогда ясно, что всякую функцию $m \in M(X)$ можно представить в виде $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, где $x_i \in X$, а $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Для фиксированной точки $x_0 \in X$ обозначим

$$B_{x_0} = \{x - x_0 : x \in X, x \neq x_0\}.$$

Лемма 1 (Аренс-Иллз, [1]). B_{x_0} является базисом Гамеля линейного пространства $M(X)$.

B_{x_0} называется базисом Гамеля в точке x_0 . Если для пространства $M(X)$ выбран базис Гамеля B_{x_0} , то это пространство обозначим через $M(X, x_0)$. Оказывается, что если X – равномерное (метризуемое) пространство, то $M(X)$ локально-выпуклое линейное (нормируемое) топологическое пространство. В самом деле, пусть $P = \{\rho_a : a \in A\}$ – комплект псевдометрик, порождающий равномерность на X . Каждой псевдометрике из комплекта $\rho \in P$ сопоставляется некоторая псевдонорма s_a на линейном пространстве $M(x)$ формулой

$$s_a(m) = \inf \left\{ \sum_j |\mu_j| \rho_a(y_j, z_j) \right\}, \quad (1)$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям $m = \sum_j \mu_j(y_j - z_j)$ элемента m . Тем самым комплекту псевдометрик P будет соответствовать семейство псевдонорм $S = \{s_a : a \in A\}$ на линейном пространстве $M(X)$. Этим семейством S порождается совместимая с линейной структурой локально-выпуклая топология. При этом, как нетрудно заметить, если X метризуемо, то $M(X)$ нормируемо (см. [1]).

Лемма 2 (Аренс-Иллз, [1]). Для любых $x, y \in X$ и $a \in A$

$$s_a(x - y) = \rho_a(x, y).$$

Пусть теперь (X, ρ) – метризуемое G -пространство, где G – произвольная группа. Действие группы G на X обозначим через $\pi : G \times X \rightarrow X$. Условимся вместо $\pi(g, x)$ писать gx , если из контекста ясно о каком действии идет речь. Рассмотрим соответствующее X нормируемое пространство $M(X, x_0)$. Определим отображение $\tilde{\pi} : G \times M(X, x_0) \rightarrow M(X, x_0)$ формулой

$$\tilde{\pi}(g, m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(gx_i - x_0), \quad g \in G, \quad (2)$$

где $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i - x_0)$ – произвольная точка из $M(X, x_0)$.

Лемма 3. Пусть X – метрическое G -пространство с инвариантной метрикой ρ и неподвижной точкой x_0 . Тогда отображение, определенное формулой (2), задает линейное действие группы G на нормируемое пространство $M(X, x_0)$.

Доказательство. Следует доказать :

1. $em = m$, где e – единичный элемент группы G ;
2. $g'(gm) = (g'g)m$,
3. $g(\lambda m) = \lambda(gm)$,
4. $g(m + m') = gm + gm'$ для любых $g, g' \in G$, $m, m' \in M(X, x_0)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;
5. $\tilde{\pi}$ – непрерывное отображение.

Пункты 1 – 4 доказываются просто. Проверим, например, пункт 2. Предположим, что $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} g'(gm) &= g' \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (gx_i - x_0) \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (g'(gx_i) - x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i ((g'g)x_i - x_0) = (g'g) \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0) = (g'g)m. \end{aligned}$$

Для доказательства непрерывности отображения $\tilde{\pi}$ оказываются существенными следующие две леммы :

Лемма 4. Пусть L – линейное топологическое пространство, а B – его базис Гамеля. Линейное действие $\pi : G \times L \rightarrow L$ группы G непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в точках подмножества $G \times B$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность, как нетрудно заметить, вытекает из следующих двух утверждений :

- а) если линейное действие π непрерывно в точке (g, x) , то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ оно будет непрерывным и в точке $(g, \lambda x)$,
- б) если π непрерывно в точках (g, x_1) и (g, x_2) , то оно непрерывно и в точке $(g, x_1 + x_2)$.

Докажем а) (утверждение б) доказывается аналогичным образом). Пусть U – произвольная окрестность точки $\pi(g, \lambda x) = g(\lambda x)$ в пространстве L . Так как операция умножения на скаляр непрерывна и $g(\lambda x) = \lambda \cdot gx \in U$, то существует

такая окрестность U_1 точки gx , что $\lambda \cdot U_1 \subset U$. А так как действие π непрерывно и в точке (g, x) , то для выбранного U_1 существуют такие окрестности V и U_2 элементов g и x , соответственно, что $V \cdot U_2 \subset U_1$. Положим $W = \lambda \cdot U_2$. Нетрудно проверить, что V и W — искомые окрестности точек g и λx , соответственно, т.е. $V \cdot W \subset U$.

Лемма 5. Если X — метрическое G -пространство с инвариантной метрикой ρ , то норма в G -пространстве $M(X)$, порожденная формулой (1), тоже инвариантна относительно $\tilde{\pi}$.

Доказательство. Следует доказать равенство $s(gm) = s(m)$. Рассмотрим все возможные представления $\sum_k \nu_k(h_k - t_k)$ элемента gm . Согласно формуле (1) имеем

$$\begin{aligned} s(gm) &= \inf \left\{ \sum_k |\nu_k| \rho(h_k, t_k) \right\} = \inf \left\{ \sum_k |\nu_k| \rho(gg^{-1}h_k, gg^{-1}t_k) \right\} = \\ &= \inf \left\{ \sum_k |\nu_k| \rho(g^{-1}h_k, g^{-1}t_k) \right\} = s(m). \end{aligned}$$

Теперь мы в состоянии доказать непрерывность отображения $\tilde{\pi}$. В силу леммы 4 достаточно доказать непрерывность отображения $\tilde{\pi}$ в точках множества $G \times B_{x_0}$.

Пусть $(g_0, y_0 - x_0) \in G \times B_{x_0}$ — произвольная точка, а $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое число. Так как $\pi : G \times X \rightarrow X$ непрерывно, то существует такая окрестность V точки g_0 , что $\rho(gy_0, g_0y_0) < \varepsilon/2$ для всех $g \in V$. В пространстве $M(X, x_0)$ рассмотрим открытый шар $B(y_0 - x_0, \varepsilon/2)$ радиуса $\varepsilon/2$ с центром в точке $y_0 - x_0$. V и $B(y_0 - x_0, \varepsilon/2)$ — искомые окрестности точек g_0 и $y_0 - x_0$. Действительно, для всех $g \in V$ и $m \in B(y_0 - x_0, \varepsilon/2)$ выполняется

$$\begin{aligned} \|gm - g_0(y_0 - x_0)\| &\leq \|gm - g_0(y_0 - x_0)\| + \|g(y_0 - x_0) - g_0(y_0 - x_0)\| = \\ &= \|g(m - g_0(y_0 - x_0))\| + \|gy_0 - g_0y_0\| = \|m - (y_0 - x_0)\| + \rho(gy_0, g_0y_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма 3 полностью доказана.

Теорема 1. Всякое метрическое G -пространство с инвариантной метрикой и неподвижной точкой эквивариантно, изометрично и замкнуто вкладывается в некоторое нормированное линейное G -пространство.

Доказательство. Пусть X – метрическое пространство с инвариантной метрикой ρ и фиксированной точкой x_0 . Согласно лемме 5, $M(X, x_0)$ является линейным G -пространством. Отображение $\varphi: X \rightarrow M(X, x_0)$, заданное формулой $\varphi(x) = x - x_0$, будет искомым вложением. Действительно, замкнутость и изометричность вложения φ доказаны Р. Аренсом и Р. Иллизом [1]. Эквивариантность отображения φ следует из соотношения

$$\varphi(gx) = gx - x_0 = g(x - x_0) = g\varphi(x).$$

Теорема 2. *Всякое метрическое G -пространство с инвариантной метрикой эквивариантно, замкнуто и изометрично вкладывается в некоторое нормированное линейное G -пространство.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) – метрическое G -пространство без неподвижных точек. Рассмотрим дискретное объединение $X' = X \cup \{w\}$ G -пространства X и одноточечного тривиального G -пространства $\{w\}$. В X' определим инвариантную метрику d формулами

$$\begin{cases} d(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2), & \text{если } x_1, x_2 \in X, \\ d(x, w) = \text{dist}(x, [a]) + \frac{1}{2} \text{diam } [a], & x \in X, \end{cases}$$

где

$$\text{diam } [a] = \sup_{g, g' \in G} \{\rho(ga, g'a)\}, \quad \text{dist}(x, [a]) = \inf_{g \in G} \{\rho(x, ga)\},$$

$[a]$ – орбита некоторой точки $a \in X$ с конечным $\text{diam } [a]$. X является замкнутым, инвариантным подмножеством метрического G -пространства X' с инвариантной метрикой d и неподвижной точкой w . Остается применить теорему 1.

Теорема 3. *Пусть G – счетно-компактная группа. Тогда всякое метризуемое G -пространство эквивариантно и замкнуто вкладывается в некоторое нормируемое линейное G -пространство.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2 и следующей известной леммы [7], [8].

Лемма 6. *Пусть G – счетно-компактная группа. Тогда на всяком метризуемом G -пространстве существует инвариантная метрика.*

Определение 1. Пусть X – равномерное пространство с комплектом псевдометрик $P\{\rho_\alpha, \alpha \in A\}$, а $\pi: G \times X \rightarrow X$ – непрерывное действие произвольной группы G на X . Равномерность пространства X назовем *инвариантной*, если инвариантна каждая псевдометрика из P .

Определение 2. Тихоновское G -пространство X назовем *инвариантным*, если на X существует инвариантная равномерность, порождающая топологию пространства X .

Теорема 4. Всякое инвариантное тихоновское G -пространство эквивариантно и замкнуто вкладывается в некоторое локально-выпуклое линейное G -пространство.

Теорема 5. Пусть G – счетно-компактная группа. Тогда всякое тихоновское G -пространство эквивариантно и замкнуто вкладывается в некоторое локально-выпуклое линейное G -пространство.

Доказательства теорем 4 и 5 подобны доказательствам теорем 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, R. Ellis, "On embedding uniform and topological spaces", Pac. J. Math., vol. 6, № 3, 1956.
2. G. D. Mostov, "Equivariant embedding in Euclidean space", Ann. of Math., vol. 65, 1957.
3. R. S. Palais, "The classification of G -spaces", Mem. AMS, vol. 36, 1960.
4. Ю. М. Смирнов, "Об эквивариантных вложениях G -пространств", УМН, т. 5(191), 1976.
5. J. De Vries, "Universal topological transformation groups", Gen. Top. and Its Appl., vol. 5, 1975.
6. П. С. Геворкян, "Линеаризация тихоновских G -пространств", Тезисы V Тифлиского симпозиума по общей топологии и ее приложениям, 1985.
7. E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
8. G. Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, NY, London, 1972.

18 января 1996

Карабахский государственный университет
Степанакерт, НКР
E-mail: pgev@nic.nc.am