

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ РОБИНСОНА НА СЛУЧАЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВСТРОЕННЫХ ПРЕДИКАТОВ

С. А. Нигиян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 5, 1996

К известному правилу резолюции Робинсона добавляется правило унарной резолюции R_u . Правило R_u применяется к дизъюнкту, использующему интерпретированный на эбрановском универсуме вычислимый предикат. Рассматриваются так называемые разумные ограничения R_u и доказывается полнота модифицированного правила резолюции в случае любых разумных ограничений R_u .

ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой работе модифицируется метод резолюций Робинсона на случай использования встроенных предикатов (интерпретированных на эбрановском универсуме вычислимых предикатов). Модификация заключается в определении обобщенного правила резолюции R , которое помимо правила резолюции Робинсона включает в себя правило унарной резолюции R_u , применяемое к дизъюнкту, использующему встроенный предикат. Правило R_u оказывается не эффективным правилом, так как вопрос о том можно ли R_u именно таким образом применить к дизъюнкту или нет сталкивается с алгоритмически нерешаемой проблемой. Поэтому нас будут интересовать его эффективные ограничения, а если точнее, то так называемые эффективные разумные ограничения, которые по своим возможностям эквивалентны R_u .

Правило резолюции Робинсона, дополненное некоторым (эффективным) разумным ограничением R_u , будем называть (эффективным) разумным ограничением правила R . Нами доказана полнота любого разумного ограничения правила R (теорема о полноте). Полнота понимается следующим образом : из конечного

множества дизъюнктов S выводим пустой дизъюнкт тогда и только тогда, когда S противоречиво на множестве эрбрановских интерпретаций.

В §1 вводятся необходимые понятия и обозначения, в §2 дается определение модифицированного правила резолюции R и его (эффективных) разумных ограничений, §3 посвящен доказательству теоремы о полноте.

§1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим три непересекающихся счетных множества F , P и X . F – множество функциональных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$, F содержит счетное число символов местности n . X – множество предметных переменных. Из элементов множеств F и X строятся *термы* :

1. каждый 0-местный символ из F есть терм,
2. каждая переменная из X есть терм,
3. если $t_1, \dots, t_n$ ($n > 0$) – термы и f – n -местный символ из F , то $f(t_1, \dots, t_n)$

есть терм,

4. никаких других термов не существует.

Через M обозначим множество всех термов, не использующих переменных.

Пусть P_1 – множество предикатных символов с приписанной каждому символу местностью, причем для любого $n \geq 0$ P_1 содержит счетное число местности n ; P_2 – некоторое множество интерпретированных предикатных символов (*встроенных предикатов*), каждый k -местный ($k > 0$) встроенный предикат является вычислимым отображением $M^k \mapsto \{true, false\}$. Положим $P = P_1 \cup P_2$.

Атом определяется традиционным образом :

1. каждый 0-местный символ из P есть атом,
2. если $t_1, \dots, t_n$ ($n > 0$) – термы и p – n -местный символ из P , то $p(t_1, \dots, t_n)$

есть атом,

3. никаких других атомов не существует.

Литерой назовем атом или его отрицание. Литеру, использующую предикатный символ из P_2 , назовем *интерпретированной литерой (и.литерой)*. Дизъюнкт представляет собой литеру, либо дизъюнкцию конечного числа литер. Пустой

дизъюнкт условимся обозначать $\circ$. Далее, говоря "выражение E " мы будем понимать терм, литеру, дизъюнкт или множество дизъюнктов. Обозначим через $Var(E)$ множество всех переменных, входящих в выражение E .

Напомним определения подстановки, унификатора, наиболее общего унификатора, взятые из [2]. Подстановка σ есть множество вида

$$\sigma = \{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}, \quad t_i \neq x_i, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad n \geq 0,$$

где t_i — терм, x_i — переменная. Пустую подстановку условимся обозначать через ε . Традиционным образом вводится композиция подстановок, которая является ассоциативной операцией. Введем обозначения :

$$Arg(\sigma) = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{и} \quad Var(\sigma) = Var(t_1) \cup \dots \cup Var(t_n).$$

Пусть E — выражение. Через $E\sigma$ обозначим выражение, полученное из E путем одновременной подстановки термов t_i , $i = 1, \dots, n$ вместо соответствующих переменных x_i , $i = 1, \dots, n$. Напомним, что для любых подстановок σ, δ и выражения E имеем $(E\sigma)\delta = E(\sigma\delta)$.

Будем говорить, что выражения $E_1, \dots, E_n$ ($n > 1$) *унифицируемы*, если существует такая подстановка δ , что $E_1\delta = \dots = E_n\delta$. Подстановку δ назовем *унификатором* этих выражений. Унификатор σ называется *наиболее общим унификатором* выражений $E_1, \dots, E_n$ ($\sigma = mgu(E_1, \dots, E_n)$), если для любого их унификатора δ существует подстановка γ такая, что $\sigma\gamma = \delta$.

Опишем рассматриваемые нами интерпретации. Предметным множеством рассматриваемых интерпретаций будет множество M . Функциональные символы интерпретируются следующим образом : каждому 0-местному символу из F сопоставляется он сам, каждому n -местному ($n > 0$) символу $f \in F$ сопоставляется отображение $M^n \rightarrow M$, которое n -ке $(t_1, \dots, t_n) \in M^n$ ставит в соответствие терм $f(t_1, \dots, t_n)$. Каждому 0-местному символу из P_1 сопоставляется один из элементов множества $\{true, false\}$, а каждому n -местному ($n > 0$) символу из P_1 сопоставляется некоторое отображение $M^n \rightarrow \{true, false\}$. Заметим, что описанные интерпретации могут отличаться одна от другой лишь отображениями, сопоставляемыми символам множества P_1 . Обозначим через H описанное множество интерпретаций.

Пусть D – непустой дизъюнкт, $Var(D) = \emptyset$ и I – интерпретация из H . Через $Val_I(D)$ условимся обозначать значение дизъюнкта D на интерпретации I . Если дизъюнкт не использует символов из P_1 , то значение D на любой интерпретации из H будет одним и тем же. Условимся обозначать его $Val(D)$. Будем говорить, что интерпретация $I \in H$ есть модель непустого дизъюнкта D , если $Val(D\sigma) = true$ для любой подстановки σ такой, что $Var(D\sigma) = \emptyset$.

Пусть S – непустое множество непустых дизъюнктов. Будем говорить, что множество S противоречиво, если не существует такой интерпретации $I \in H$, которая была бы моделью всех дизъюнктов множества S .

§2. МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРАВИЛО РЕЗОЛЮЦИИ

R И ЕГО РАЗУМНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Модифицированное правило резолюции R может быть применено как к паре дизъюнктов, так и к одному дизъюнкту. В обоих случаях результатом является дизъюнкт. Может оказаться так, что R не применимо к данной паре дизъюнктов или к данному дизъюнкту. Правило R определяется, используя следующие три вспомогательных правила: склейку R_s , бинарную резолюцию R_b , унарную резолюцию R_u . Напомним правила R_s и R_b , используемые в определении правила резолюции Робинсона, и введем правило R_u . Ввиду того, что дизъюнкция является коммутативной и ассоциативной логической операцией, то дизъюнкт мы будем рассматривать как множество литер.

Правило R_s применимо к любому непустому дизъюнкту D . $R_s(D) = D\sigma$, где либо $\sigma = \epsilon$, либо $\sigma = mgu(L_1, \dots, L_m)$, где $L_1, \dots, L_m$ – некоторые унифицируемые литеры из D , $m > 1$.

Правило R_b применимо к паре дизъюнктов D, D' , если они не имеют общих переменных и существуют такие унифицируемые атомы A и A' , что $A \in D$ и $\neg A' \in D'$.

$$R_b(D, D') = R_b(D', D) = (D\sigma \setminus \{A\sigma\}) \cup (D'\sigma \setminus \{\neg A'\sigma\}), \quad \sigma = mgu(A, A').$$

Правило R_u применимо к дизъюнкту D , если существуют такие литера $L \in D$ и подстановка σ , которые удовлетворяют следующим трем условиям:

- a) $Arg(\sigma) \subset Var(L)$;
- b) $Var(\sigma) \cap (Var(D) \setminus Var(L)) = \emptyset$;
- c) $Val(L\sigma) = false$ для любой подстановки γ такой, что $Var(L\sigma\gamma) = \emptyset$.

В этом случае будем говорить, что Ru L -применимо к D и $Ru(D) = D\sigma \setminus \{L\sigma\}$.

Определение правила R :

$$R(D) = Ru(Rs(D)), \quad R(D, D') = Rb(Rs(D), (Rs(D'))),$$

где D, D' – дизъюнкты, не имеющие общих переменных.

Рассмотрим правило Ru . Правило Ru является не эффективным правилом, так как проверка пункта c) “упирается” в алгоритмически неразрешимую проблему (см, например, [3]). Введем понятие *разумного ограничения* Ru . Пусть Ru L -применимо к дизъюнкту D , где L – литерала из D . Рассмотрим множество всех L -применений Ru к D . Каждое такое L -применение определяется некоторой подстановкой σ . Пусть $\Xi(D, L)$ – множество подстановок, определяющих все возможные L -применения Ru к D . Рассмотрим подмножество некоторых L -применений Ru к D , определяемое подмножеством подстановок $\Xi'(D, L) \subset \Xi(D, L)$. Будем говорить, что данное подмножество L -применений Ru к D *разумно*, если для любой подстановки δ такой, что $Var(L\delta) = \emptyset$ и $Val(L\delta) = false$, существуют такие подстановки $\sigma \in \Xi'(D, L)$, γ и γ_1 , что

$$\sigma\gamma = \delta\gamma_1, \quad \text{и} \quad x \in Var(D) \setminus Var(L) \implies t/x \in \gamma \Leftrightarrow t/x \in \delta,$$

где t – терм. Очевидно, что в этом случае $D\sigma\gamma = D\delta$.

Пример. Пусть c – 0-местный, g – 1-местный, f – 2-местный символы из F ; p – 2-местный символ из P_1 ; π – 1-местный, $=$ – 2-местный встроенные предикаты из P_2 ; x, y – различные переменные из X и

$$Val(\pi(t)) = false \iff t = f(t_1, t_2), \quad t_1, t_2 \in M.$$

Пусть дизъюнкт $D = \{L_1, L_2, L_3\}$, где L_1 есть $\neg(x = f(c, g(y)))$, L_2 есть $\pi(x)$, L_3 есть $p(x, y)$. Тогда

$$\Xi'(D, L_1) = \{ mgu(x, f(c, g(y))) \}$$

есть разумное множество L_1 -применений Ru к D ;

$$\Xi'(D, L_2) = \{ \{ f(x, z)/x \} : z \in X, z \neq x, z \neq y \}$$

есть разумное множество L_2 -применений Ru к D .

Пусть для каждого дизъюнкта D и каждой и.литеры L таких, что Ru L -применимо к D , выделено некоторое разумное подмножество $\Xi'(D, L)$ L -применений Ru к D . Ограничимся только такими применениями Ru . В этом случае будем говорить, что имеем некоторое разумное ограничение Ru . Обозначим его через $R'u$. Правило $R'u$ назовем *эффективным разумным ограничением* Ru , если вопрос о принадлежности подстановки к множеству $\Xi'(D, L)$ решается эффективным образом для любых D и L .

Заметим, что если для любых D и L $\Xi'(D, L) = \Xi(D, L)$, то $R'u = Ru$ и $R'u$ есть разумное ограничение Ru , однако эффективность $R'u$ зависит от множества встроенных предикатов P_2 . Если для любых D и L подмножество $\Xi'(D, L)$ состоит из всех тех подстановок $\sigma \in \Xi(D, L)$, для которых $Val(L\sigma) = \emptyset$ и $Val(L\sigma) = false$, то $R'u$ будет эффективным разумным ограничением Ru при любом P_2 .

Будем говорить, что правило R' есть (*эффективное*) *разумное ограничение* правила R , если для некоторого $R'u$ — эффективного разумного ограничения Ru имеем

$$R'(D) = R'u(Rs(D)), \quad R'(D, D') = R(D, D'),$$

где D, D' — дизъюнкты, не имеющие общих переменных.

§3. ПОЛНОТА ЛЮБОГО РАЗУМНОГО

ОГРАНИЧЕНИЯ ПРАВИЛА R

Пусть R' — некоторое разумное ограничение правила R и S — некоторое непустое множество дизъюнктов. Мы считаем, что дизъюнкты множества S не имеют общих переменных, так как в противном случае их всегда можно переименовать. Будем говорить, что из множества S *R' -выводим* дизъюнкт D и обозначать это $S \vdash_{R'} D$, если существует конечная последовательность дизъюнктов $D_1, \dots, D_n$ ($n > 1$) такая, что $D_n = D$, и каждый дизъюнкт D_i ($1 \leq i \leq n$) либо принадлежит

S , либо получен из предыдущих дизъюнктов последовательности с помощью правила R' . Последовательность $D_1, \dots, D_n$ назовем R' -выводом дизъюнкта D из S .

Теорема о полноте. Пусть R' – разумное ограничение правила R и S – конечное непустое множество непустых дизъюнктов. Тогда S противоречиво тогда и только тогда, когда $S \vdash_{R'} \circ$.

Перед тем, как перейти к непосредственному доказательству теоремы докажем три леммы.

Лемма 1. Пусть D, D' – дизъюнкты, $D'' = R'(D, D')$ (или $D'' = R'(D)$), $D'' \neq \circ$ и интерпретация $I \in H$ есть модель дизъюнктов D, D' . Тогда I будет моделью дизъюнкта D'' .

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} D'' = R'(D, D') &= Rb(Rs(D), Rs(D')) = Rb(D\sigma_1, D'\sigma_1) = \\ &= (D\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}) \cup (D'\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg A'\sigma_1\sigma_2\}), \end{aligned}$$

где σ_1 – подстановка, A, A' – атомы

$$\sigma_2 = \text{mgu}(A\sigma_1, A'\sigma_1), \quad A \in D, \quad \neg A' \in D'.$$

Пусть θ – подстановка такая, что

$$\text{Arg}(\theta) = \text{Var}(D\sigma_1\sigma_2) \cup \text{Var}(D'\sigma_1\sigma_2), \quad \text{Var}(\theta) = \emptyset.$$

Тогда $\text{Val}_I(D''\theta) = \text{true}$, так как

$$\text{Val}_I(D\sigma_1\sigma_2\theta) = \text{Val}_I(D'\sigma_1\sigma_2\theta) = \text{true}, \quad A\sigma_1\sigma_2\theta = A'\sigma_1\sigma_2\theta.$$

Следовательно, I – модель D'' . Пусть теперь

$$D'' = R'(D) = R'u(Rs(D)) = R'u(D\delta_1) = D\delta_1\delta_2 \setminus \{L\delta_1\delta_2\},$$

где L – литерал из D , δ_1, δ_2 – подстановки. Пусть γ – подстановка такая, что

$$\text{Arg}(\gamma) = \text{Var}(D\delta_1\delta_2), \quad \text{Var}(\gamma) = \emptyset.$$

Тогда $\text{Val}_I(D''\gamma) = \text{true}$, так как $\text{Val}_I(D\delta_1\delta_2\gamma) = \text{true}$ и $\text{Val}_I(L\delta_1\delta_2\gamma) = \text{false}$.

Следовательно, I – модель D'' . Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть D, D' – дизъюнкты и $\circ = R'(D, D')$ (или $\circ = R'(D)$). Тогда не существует такой интерпретации $I \in H$, которая была бы моделью дизъюнктов D и D' .

Доказательство. Пусть

$$\circ = R'(D, D') = (D\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}) \cup (D'\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg A'\sigma_1\sigma_2\}).$$

Тогда $D\sigma_1\sigma_2\theta = A\sigma_1\sigma_2\theta$ и $D'\sigma_1\sigma_2\theta = \neg A'\sigma_1\sigma_2\theta$, где $\sigma_1, \sigma_2, \theta$ – подстановки из доказательства леммы 1. Так как $A\sigma_1\sigma_2\theta = A'\sigma_1\sigma_2\theta$, то не существует такой интерпретации $I \in H$, для которой

$$Val_I(D\sigma_1\sigma_2\theta) = Val_I(D'\sigma_1\sigma_2\theta) = true.$$

Пусть

$$\circ = R'(D) = D\delta_1\delta_2 \setminus \{L\delta_1\delta_2\}.$$

Тогда $D\delta_1\delta_2\gamma = L\delta_1\delta_2\gamma$, где $\delta_1, \delta_2, \gamma$ – подстановки из доказательства леммы 1. Так как $Val(L\delta_1\delta_2\gamma) = false$, то для любой интерпретации $I \in H$ $Val_I(D\delta_1\delta_2\gamma) = false$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть S_0 – бесконечное противоречивое множество дизъюнктов, не использующих встроженных предикатов. Тогда $S_0 \vdash_{R'} \circ$.

Доказательство. Множество S_0 содержит конечное противоречивое подмножество S'_0 , так как полному семантическому дереву множества S_0 соответствует конечное замкнутое семантическое дерево (см. [2]). Из [2] имеем $S'_0 \vdash_{R'} \circ$, так как правило R' , применяемое к дизъюнктам, не использующим встроженных предикатов, является по существу правилом резолюции Робинсона. Следовательно, $S_0 \vdash_{R'} \circ$. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть $S \vdash_{R'} \circ$ и $D_1, \dots, D_n$ ($n > 1$) есть R' -вывод пустого дизъюнкта из S такой, что $D_i \neq \circ$, $i = 1, \dots, n-1$. Предположим, что S не противоречиво. Это означает существование интерпретации $I \in H$, являющейся моделью всех дизъюнктов из S . Но тогда по

лемме 1 I будет моделью дизъюнктов $D_1, \dots, D_{n-1}$. Получили противоречие, так как $D_n = \circ$, а по лемме 2 это невозможно.

Необходимость. Пусть S – противоречие. Покажем, что $S \vdash_{R'} \circ$. Обозначим через $P_2(S)$ множество предикатов из S . Каждому встроенному предикату π из $P_2(S)$ сопоставим предикатный символ $p_\pi \in P_1$ так, что местность p_π совпадает с местностью π , p_π не входит в S и если $\pi', \pi'' \in P_2(S)$, $\pi' \neq \pi''$, то $p_{\pi'} \neq p_{\pi''}$. Если в выражении E каждый встроенный предикат $\pi \in P_2(S)$ заменить на p_π , то такое выражение будем обозначать через $\bar{E}$. Пусть S_1, S_2 – два множества дизъюнктов :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{p_\pi(t_1, \dots, t_k) : \pi \in P_2(S), \text{Val}(\pi(t_1, \dots, t_k)) = \\ &= \text{true}, t_i \in M, i = 1, \dots, k, k > 0\}, \\ S_2 &= \{\neg p_\pi(t_1, \dots, t_k) : \pi \in P_2(S), \text{Val}(\pi(t_1, \dots, t_k)) = \\ &= \text{false}, t_i \in M, i = 1, \dots, k, k > 0\} \end{aligned}$$

и $S_0 = \bar{S} \cup S_1 \cup S_2$. Легко видеть, что из противоречивости S следует противоречивость S_0 . Применяя лемму 3, получим $S_0 \vdash_{R'} \circ$. Пусть $D_1, \dots, D_n = \circ$ ($n > 1$) есть R' -вывод пустого дизъюнкта из S_0 . Покажем существование R' -вывода пустого дизъюнкта из S . Из последовательности $D_1, \dots, D_n$ выделим подпоследовательность $D_{i_1}, \dots, D_{i_m}$ ($1 < m \leq n$) всех таких дизъюнктов, которые не принадлежат множеству $S_1 \cup S_2$. Покажем, что существует R' -вывод $D'_1, \dots, D'_m$ из S такой, что $\bar{D}'_j \theta_j = D_{i_j}$ для некоторой подстановки θ_j , $j = 1, \dots, m$. Отсюда будет следовать, что $D'_m = \circ$ и $S \vdash_{R'} \circ$.

Дизъюнкт D'_1 определим следующим образом : $\bar{D}'_1 = D_{i_1}$ и $\theta_1 = \varepsilon$. Пусть $1 \leq k < m$, $\bar{D}'_j \theta_j = D_{i_j}$ для всех $1 \leq j \leq k$ и $D'_1, \dots, D'_k$ есть R' -вывод из S . Покажем, что существуют такие D'_{k+1} и θ_{k+1} , что $\bar{D}'_{k+1} \theta_{k+1} = D_{i_{k+1}}$ и $D'_1, \dots, D'_k, D'_{k+1}$ есть R' -вывод из S . Возможны три случая :

- 1) $D_{i_{k+1}} \in \bar{S}$.
- 2) $D_{i_{k+1}} = R'(D_{i_v}, D_r)$, где $D_r \in S_1 \cup S_2$, $1 \leq r < i_{k+1}$, $1 \leq v \leq k$.
- 3) $D_{i_{k+1}} = R'(D_{i_v}, D_u)$, где $1 \leq v, u \leq k$.

Случай 1. Положим $D'_{k+1} \in S$ и $\overline{D'_{k+1}} = D_{i_{k+1}}$. Очевидно, что в этом случае $\theta_{k+1} = \varepsilon$.

Случай 2. Пусть

$$D_{i_{k+1}} = Rb(Rs(D_{i_v}), Rs(D_r)) = Rb(D_{i_v}\sigma_1, D_r) = D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{L\sigma_1\sigma_2\},$$

где L — и-литера из D_{i_v} , σ_1 — подстановка, $\sigma_2 = \text{ngu}(L\sigma_1, \neg D_r)$, где $\neg D_r$ мы отождествляем с атомом, если D_r использует отрицание. Рассмотрим дизъюнкт D'_v .

Так как $v \leq k$, то $\overline{D'_v}\theta_v\sigma_1\sigma_2 = D_{i_v}\sigma_1\sigma_2$. Пусть $L'_1, \dots, L'_s$ — все такие и-литеры из D'_v , что $\overline{L'_j}\theta_v\sigma_1\sigma_2 = L\sigma_1\sigma_2$, $j = 1, \dots, s$, $s \geq 1$. Пусть для некоторой подстановки δ

$$\sigma'_1 = \begin{cases} \text{ngu}(L'_1, \dots, L'_s) & \text{при } s > 1, \\ \varepsilon & \text{при } s = 1, \end{cases} \quad \sigma'_1\delta = \theta_v\sigma_1\sigma_2$$

и L' — и-литера из D'_v такая, что $\overline{L'}\theta_v = L$. Так как

$$\overline{L'}\theta_v\sigma_1\sigma_2 = L\sigma_1\sigma_2 = \neg D_r, \quad D_r \in S_1 \cup S_2,$$

то

$$Val(L'\sigma'_1\delta) = Val(L'\theta_v\sigma_1\sigma_2) = \text{false}.$$

Так как R' является разумным ограничением R , то к дизъюнкту $Rs(D'_v) = D'_v\sigma'_1$ можно применить правило $R'u$ так, что $R'u(D'_v\sigma'_1) = D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{L'\sigma'_1\sigma'_2\}$, где σ'_2 — подстановка, для которой существуют такие подстановки γ и γ_1 , что $\sigma'_2\gamma = \delta\gamma_1$ и $D'_v\sigma'_1\sigma'_2\gamma = D'_v\sigma'_1\delta$.

Дизъюнкт D'_{k+1} определим следующим образом :

$$D'_{k+1} = R'(D'_v) = D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{L'\sigma'_1\sigma'_2\}.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \overline{D'_{k+1}}\gamma &= \overline{D'_v\sigma'_1\sigma'_2\gamma} \setminus \{\overline{L'\sigma'_1\sigma'_2\gamma}\} = \overline{D'_v\sigma'_1\delta} \setminus \{\overline{L'\sigma'_1\delta}\} = \\ &= \overline{D'_v}\theta_v\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\overline{L'}\theta_v\sigma_1\sigma_2\} = D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{L\sigma_1\sigma_2\} = D_{i_{k+1}} \end{aligned}$$

и $\theta_{k+1} = \gamma$.

Случай 3. Пусть

$$D_{i_{k+1}} = R'(D_{i_v}, D_{i_u}) = Rb(Rs(D_{i_v}), Rs(D_{i_u})) = Rb(D_{i_v}\sigma_1, D_{i_u}\sigma_1) = \\ = (D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}) \cup (D_{i_u}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg B\sigma_1\sigma_2\}),$$

где σ_1 - подстановка, A, B - атомы, $\sigma_2 = \text{mgu}(A\sigma_1, B\sigma_1)$, $A \in D_{i_v}$, $\neg B \in D_{i_u}$.

Рассмотрим дизъюнкты D'_v и D'_u . Мы считаем, что дизъюнкты D'_v и D'_u не имеют общих переменных. Тогда $\theta = \theta_v \cup \theta_u$ есть подстановка и $\overline{D'_v}\theta = D_{i_v}$, $\overline{D'_u}\theta = D_{i_u}$. Пусть $A'_1, \dots, A'_s$ - все такие атомы из D'_v , что $\overline{A'_j}\theta\sigma_1\sigma_2 = A\sigma_1\sigma_2$, $j = 1, \dots, s$; пусть $\neg B'_1, \dots, \neg B'_r$ - все такие литеры из D'_u , что $\overline{B'_h}\theta\sigma_1\sigma_2 = B\sigma_1\sigma_2$, $h = 1, \dots, r$. Пусть

$$\delta_1 = \begin{cases} \text{mgu}(A'_1, \dots, A'_s) & \text{при } s > 1, \\ \varepsilon & \text{при } s = 1, \end{cases} \\ \delta_2 = \begin{cases} \text{mgu}(B'_1, \dots, B'_r) & \text{при } r > 1, \\ \varepsilon & \text{при } r = 1, \end{cases} \quad \sigma'_1 = \delta_1 \cup \delta_2$$

и $\sigma'_1\delta = \theta\sigma_1\sigma_2$ для некоторой подстановки δ . Пусть A' - атом из D'_v такой, что $\overline{A'}\theta = A$ и $\neg B'$ - литера из D'_u такая, что $\overline{B'}\theta = B$. Так как $A\sigma_1\sigma_2 = B\sigma_1\sigma_2$, то $A'\theta\sigma_1\sigma_2 = B'\theta\sigma_1\sigma_2$ и $A'\sigma'_1\delta = B'\sigma'_1\delta$. Следовательно $A'\sigma'_1$ и $B'\sigma'_1$ унифицируемы и Rb применимо к дизъюнктам $Rs(D'_v) = D'_v\sigma'_1$ и $Rs(D'_u) = D'_u\sigma'_1$. Пусть

$$Rb(D'_v\sigma'_1, D'_u\sigma'_1) = (D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{A'\sigma'_1\sigma'_2\}) \cup (D'_u\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{\neg B'\sigma'_1\sigma'_2\}),$$

где $\sigma'_2 = \text{mgu}(A'\sigma'_1, B'\sigma'_1)$. Пусть γ - такая подстановка, что $\sigma'_2\gamma = \delta$. Дизъюнкт D'_{k+1} определим следующим образом:

$$D'_{k+1} = R'(D'_v, D'_u) = (D'_v\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{A'\sigma'_1\sigma'_2\}) \cup (D'_u\sigma'_1\sigma'_2 \setminus \{\neg B'\sigma'_1\sigma'_2\}).$$

Далее получим

$$\overline{D'_{k+1}}\gamma = (\overline{D'_v}\sigma'_1\sigma'_2\gamma \setminus \{\overline{A'}\sigma'_1\sigma'_2\gamma\}) \cup (\overline{D'_u}\sigma'_1\sigma'_2\gamma \setminus \{\neg\overline{B'}\sigma'_1\sigma'_2\gamma\}) = \\ = (\overline{D'_v}\sigma'_1\delta \setminus \{\overline{A'}\sigma'_1\delta\}) \cup (\overline{D'_u}\sigma'_1\delta \setminus \{\neg\overline{B'}\sigma'_1\delta\}) = \\ = (\overline{D'_v}\theta\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\overline{A'}\theta\sigma_1\sigma_2\}) \cup (\overline{D'_u}\theta\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg\overline{B'}\theta\sigma_1\sigma_2\}) = \\ = (D_{i_v}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{A\sigma_1\sigma_2\}) \cup (D_{i_u}\sigma_1\sigma_2 \setminus \{\neg B\sigma_1\sigma_2\}) = D_{i_{k+1}}$$

и $\theta_{k+1} = \gamma$. Теорема доказана.

ABSTRACT. A unary resolution rule Ru is considered together with the well-known Robinson's resolution rule. The rule Ru is applied to a disjunct, which uses a computable predicate interpreted in the Herbrand's universe. The so-called reasonable restrictions of Ru are considered and completeness of the modified resolution rule for any reasonable restrictions of Ru is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Robinson, "A machine-oriented logic based on the resolution principle", Journal of ACM, vol 12, № 1, pp. 23 - 41, 1965.
2. Ch. Chang, R. Lee, Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, NY, 1973.
3. С. А. Нигиян, "О разрешимости алгоритмических проблем", сб. Прикладная математика, ЕГУ, № 2, стр. 82 - 90, 1983.

12 апреля 1996

Ереванский государственный университет
E-mail : algorithm@ysu.am