

S-ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ КАК ОГИБАЮЩИЕ S-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

В. А. Мирзоян

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 5, 1996**

Доказано, что в пространствах постоянной кривизны $M_n(\theta)$ m -мерное подмногообразие M класса C^∞ является огибающим s -го ($s \geq 3$) порядка семейства m -мерных s -параллельных подмногообразий тогда и только тогда, когда M имеет полупараллельные фундаментальные формы α_{s-1} и α_s . Рассмотрен случай симметрических фундаментальных форм. Показано, что подмногообразия с полупараллельными фундаментальными формами α_{s-1} и α_s удовлетворяют условию $R(X, Y) \cdot R = 0$.

§1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Подмногообразие M в пространстве постоянной кривизны $M_n(\theta)$ называется *полусимметрическим* (см. [1]), если его вторая фундаментальная форма (ф.ф.) α_2 удовлетворяет следующему условию :

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0 \quad (1.1)$$

для любых касательных к M векторных полей X и Y , где $\bar{R}(X, Y) = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X - \bar{\nabla}_{[X, Y]}$ — оператор кривизны связности Ван дер Вардена–Бортолотти $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$ (∇ — риманова связность, а $\nabla^\perp$ — нормальная связность). Условие (1.1) называется также *условием полупараллельности* ф.ф. α_2 (см. [2] – [4]).

В 1990 г. Ю. Г. Лумясте получил один из центральных в теории полусимметрических подмногообразий результатов. Им была доказана следующая характеристическая

Статья написана при финансовой поддержке "Zakneftegazstroy-Prometheus" Joint-Stock Company.

Теорема 1 ([5]). *m-мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ является полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства m-мерных локально симметрических подмногообразий.*

Напомним, что подмногообразие M называется *локально симметрическим*, если его вторая ф.ф. α_2 параллельна, т.е. удовлетворяет условию $\bar{\nabla}\alpha_2 = 0$ (см. [6]).

Теорема 1 сформировала новый взгляд на природу полусимметрических подмногообразий и открыла новые возможности в решении классификационных задач и геометрического описания полусимметрических подмногообразий. Обзор важнейших результатов относительно этого класса подмногообразий и подробная библиография приведены в [7] – [10]. Теорему 1 можно обобщать и развивать в двух диаметрально противоположных направлениях : в направлении усиления закона огибания или, наоборот, в направлении его ослабления.

В настоящей работе рассматривается обобщение в первом направлении : в случае объемлющего пространства постоянной кривизны дается положительное решение следующей общей задачи : являются ли подмногообразия с полупараллельными ф.ф. высших порядков огибающими для подмногообразий с параллельными ф.ф. соответствующих порядков ? Эта задача представляет из себя часть следующей более общей проблемы : являются ли полупараллельные структуры огибающими для соответствующих параллельных структур ? Например, являются ли подмногообразия, удовлетворяющие условию $R(X, Y) \cdot R = 0$ или $R(X, Y) \cdot Ric = 0$ (R – тензор кривизны, Ric – тензор Риччи, а $R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$) огибающими для семейств подмногообразий, удовлетворяющих, соответственно, условию $\nabla R = 0$ или $\nabla Ric = 0$?

Для того чтобы сформулировать полученные результаты, приведем сначала некоторые определения. Пусть M и $\widetilde{M}$ – два m -мерных подмногообразия в пространстве постоянной кривизны $M_n(\theta)$, имеющие общую точку z . Говорят, что z является *точкой касания второго порядка* для M и $\widetilde{M}$, если для каждой кривой $\gamma \in M$, проходящей через z , существует кривая $\tilde{\gamma} \in \widetilde{M}$, проходящая через z и имеющая в этой точке общую с γ касательную и вектор кривизны. В [5]

доказано, что $x \in M$ является точкой касания второго порядка тогда и только тогда, когда совпадают касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$, а также вторые ф.ф. α_{2x} и $\widetilde{\alpha}_{2x}$. В последней форме понятие касания второго порядка допускает следующее обобщение.

Определение 1. Общая точка x двух m -мерных подмногообразий M и $\widetilde{M}$ в $M_n(\theta)$ называется *точкой касания s -го порядка* ($s \geq 2$), если в точке x совпадают :

1) касательные пространства $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$,

2) все соответствующие ф.ф. подмногообразий M и $\widetilde{M}$ до s -го порядка включительно, т.е. $\alpha_{rx} = \widetilde{\alpha}_{rx}$, $r = 2, \dots, s$.

Такое понимание касания s -го порядка подмногообразий отличается от общепринятого (см. [11], стр. 190), но оно имеет то преимущество, что определяется с помощью фундаментальных объектов самих подмногообразий, характеризующих всю их геометрию.

Определение 2. m -мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ называется *огibaющим s -го порядка* ($s \geq 2$) некоторого семейства m -мерных подмногообразий $\{G\}$, если в каждой своей точке $x \in M$ оно имеет касание s -го порядка с каким-либо подмногообразием этого семейства.

Другие подходы в теории огibaющих освещены, например, в монографии [12] и цитированной там литературе.

Ф.ф. α_s называется *параллельной*, если $\overline{\nabla}_X \alpha_s = 0$ для любого X и *полупараллельной*, если $\overline{R}(X, Y) \cdot \alpha_s = 0$ для любых X и Y . Подмногообразия, удовлетворяющие первому условию, называются *s -параллельными*, а второму условию — *s -полупараллельными*.

Теперь мы можем сформулировать основные результаты работы.

Теорема 2. В пространстве постоянной кривизны $M_n(\theta)$ m -мерное подмногообразие класса C^∞ является *огibaющим s -го порядка* некоторого семейства m -мерных s -параллельных подмногообразий тогда и только тогда, когда оно имеет полупараллельные ф.ф. α_{s-1} и α_s при $s > 2$ и полупараллельную ф.ф. α_2 при $s = 2$.

В частном случае симметрических фундаментальных форм имеет место более сильное утверждение :

Теорема 3. Пусть m -мерное подмногообразие класса C^∞ в пространстве $M_n(\theta)$ имеет симметрические ф.ф. $\alpha_3, \dots, \alpha_{s-1}$ ($s > 4$). Тогда его ф.ф. α_s будет симметрической тогда и только тогда, когда M является огибающим $(s-2)$ -го порядка семейства m -мерных $(s-2)$ -параллельных подмногообразий, у каждого из которых все ф.ф. до $(s-2)$ -го порядка включительно также являются симметрическими.

Как известно (см. [2]) условие (1.1) влечет $R(X, Y) \cdot R = 0$. Эта импликация является частным проявлением следующего общего принципа.

Теорема 4. В пространстве $M_n(\theta)$ каждое подмногообразие, удовлетворяющее условиям $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_{s-1} = 0$, $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_s = 0$ ($s \geq 3$), удовлетворяет также условию $R(X, Y) \cdot R = 0$.

Условие $R(X, Y) \cdot R = 0$ характеризует полусимметрические римановы пространства, которым посвящено значительное количество публикаций (см., например, обзорную статью [8]). Их локальная классификация получена в [13].

§2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И УРАВНЕНИЯ

В настоящем параграфе, используя формализм расслоения адаптированных ортонормированных реперов подмногообразия, мы получаем основные уравнения и формулы, используемые в доказательствах основных результатов. Пусть $\omega = \omega^a \otimes e_a$ является канонической 1-формой на $M_n(\theta)$, а ω_a^b — формы связности Левы-Чивита в главном расслоении $O(M_n(\theta))$ ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в $M_n(\theta)$, где $a, b = 1, \dots, n$. Тогда $\omega_a^b + \omega_b^a = 0$ и имеют место следующие структурные уравнения :

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a, \quad d\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b - \theta \omega^a \wedge \omega_b^c.$$

Пусть M — m -мерное подмногообразие класса C^∞ в $M_n(\theta)$. Тогда расслоение

$O(M_n(\theta))$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, M_n(\theta))$ адаптированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что векторы $e_1, \dots, e_m$ принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а векторы $e_{m+1}, \dots, e_n$ — нормальному пространству $T_x^\perp(M)$ (см. [14], т. 2, стр. 11 – 15). В силу этого и первой группы структурных уравнений имеем

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad (2.1)$$

где вторая группа уравнений получается из первой путем внешнего дифференцирования и последующего применения леммы Картана. Аналогично, из второй группы уравнений в (2.1) получаются соотношения

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ij;k}^\alpha \omega^k, \quad h_{ij;k}^\alpha = h_{ik;j}^\alpha (= \bar{\nabla}_j h_{ik}^\alpha), \quad (2.2)$$

где $\bar{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена–Бортолотти, а ковариантный дифференциал $\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha$ определяется формулой

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij;\beta}^\alpha \omega^\beta - h_{k;j}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k. \quad (2.3)$$

В (2.1) и (2.2) функции $h_{ij}^\alpha, h_{ij;k}^\alpha$, симметрические по нижним индексам, являются компонентами второй α_2 и третьей α_3 фундаментальных форм (ф.ф.), соответственно. Это — $T^\perp(M)$ -значные формы, действующие, соответственно, по правилам

$$\alpha_2 : (X, Y) \mapsto h_{ij}^\alpha X^i Y^j e_\alpha, \quad (2.4)$$

$$\alpha_3 : (X, Y, Z) \mapsto h_{ijk}^\alpha X^i Y^j Z^k e_\alpha, \quad (2.5)$$

где $X = X^i e_i, Y = Y^j e_j, Z = Z^k e_k$. Из (2.2) следует, что $\alpha_3 = \bar{\nabla} \alpha_2$. Компоненты $h_{i_1 \dots i_{s+1}}^\alpha$ фундаментальных форм α_{s+1} определяются соотношениями

$$\bar{\nabla} h_{i_1 \dots i_s}^\alpha = h_{i_1 \dots i_s; i_{s+1}}^\alpha \omega^{i_{s+1}}, \quad s = 3, 4, \dots, \quad (2.6)$$

где левые части раскрываются по той же схеме, что и в (2.3). Формы $\alpha_s, s = 4, 5, \dots$ также являются $T^\perp(M)$ -значными и их действие определяется по формулам, аналогичным (2.4) и (2.5). Однако эти формы, в отличие от форм

α_2 и α_3 , симметричны только по первым трем аргументам и в общем случае симметрическими не являются. Из соотношений (2.6) следует, что $\alpha_{s+1} = \bar{\nabla}\alpha_s$.

Говорят, что ф.ф. α_s подмногообразия M является *параллельной* или *ковариантно постоянной*, если ее компоненты $h_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ удовлетворяют условию

$$dh_{i_1 \dots i_s}^\alpha + h_{i_1 \dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^\alpha \omega_{i_s}^k = 0. \quad (2.7)$$

Это условие более коротко можно записать в виде $\bar{\nabla} h_{i_1 \dots i_s}^\alpha = 0$ или $\bar{\nabla} \alpha_s = 0$.

В силу (2.6) условие (2.7) равносильно условию $h_{i_1 \dots i_s i_{s+1}}^\alpha = 0$, т.е. равенству $\alpha_{s+1} = 0$. Очевидно, что тогда $\alpha_j = 0$ для любого $j > s$.

Перейдем теперь к определению полупараллельности ф.ф. α_s . Дифференцируя внешним образом уравнения

$$dh_{i_1 \dots i_s}^\alpha + h_{i_1 \dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^\alpha \omega_{i_s}^k = h_{i_1 \dots i_s k}^\alpha \omega^k,$$

получим

$$h_{i_1 \dots i_s k l}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^\alpha \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha. \quad (2.8)$$

Формы

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = - \left(\sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{\alpha]j}^\alpha + \theta \delta_{i[k} \delta_{\alpha]j} \right) \omega^k \wedge \omega^l, \quad (2.9)$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{\alpha]j}^\beta \omega^k \wedge \omega^l \quad (2.10)$$

являются 2-формами кривизны связности Ван дер Вардена-Бортодотти $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$, где ∇ обозначает риманову связность на подмногообразии M , определенную 1-формами ω_i^j , а $\nabla^\perp$ — нормальную связность, определенную 1-формами ω_α^β .

Говорят, что ф.ф. α_s подмногообразия M является *полупараллельной*, если ее компоненты удовлетворяют следующему условию :

$$h_{k i_2 \dots i_s}^\alpha \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^\alpha \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0. \quad (2.11)$$

Из (2.8) следует, что (2.11) равносильно симметричности компонент $h_{i_1 \dots i_s k l}^\alpha$ ф.ф. α_{s+2} по двум последним нижним индексам, что, в свою очередь, равносильно

симметричности выражения $\alpha_{s+2}(X_1, \dots, X_s, X, Y)$ по аргументам X и Y . В формулах (2.9) и (2.10) коэффициенты

$$R_{ikl}^j = - \left(\sum_{\alpha} h_{i[k}^{\alpha} h_{l]j}^{\alpha} + \theta \delta_{i[k} \delta_{l]j} \right), \quad R_{\alpha kl}^{\beta} = - \sum_i h_{i[k}^{\alpha} h_{l]j}^{\beta} \quad (2.12)$$

при $\omega^k \wedge \omega^l$ являются компонентами тензоров кривизны R и $R^{\perp}$ связностей ∇ и $\nabla^{\perp}$, соответственно. Если $R = 0$, то подмногообразие M называется *локально-евклидовым*. Если $R^{\perp} = 0$, то говорят о подмногообразии с *плоской нормальной связностью*.

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.11) и учитывая, что 2-формы $\omega^p \wedge \omega^q$ являются базисными, получим следующее алгебраическое условие полупараллельности ф.ф. α_s :

$$h_{ki_2 \dots i_s}^{\alpha} R_{i_1 pq}^k + \dots + h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^{\alpha} R_{i_s pq}^k - h_{i_1 \dots i_s}^{\beta} R_{pq}^{\alpha} = 0. \quad (2.13)$$

Таким образом, как α_s , так и α_{s-1} являются полупараллельными, если ф.ф. α_s является параллельной. Действительно, если $\bar{\nabla} \alpha_s = 0$, то $h_{i_1 \dots i_s k}^{\alpha} = 0$ и $h_{i_1 \dots i_s kl}^{\alpha} = 0$. Первое равенство влечет полупараллельность α_{s-1} , а второе — полупараллельность α_s . Итак, если ф.ф. α_s является параллельной, то выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} h_{ki_2 \dots i_{s-1}}^{\alpha} \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots i_{s-2} k}^{\alpha} \Omega_{i_{s-1}}^k - h_{i_1 \dots i_{s-1}}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha} = 0, \\ h_{ki_2 \dots i_s}^{\alpha} \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^{\alpha} \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha} = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (2.2) и все уравнения системы (2.6), получим

$$h_{i_1 \dots i_s r t}^{\alpha} \omega^r \wedge \omega^t = h_{ki_2 \dots i_s}^{\alpha} \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^{\alpha} \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha} \quad s = 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Эта система и дает нам фактически условия интегрируемости системы уравнений (2.2) и (2.6).

Из системы (2.15) непосредственно следует, что ф.ф. $\alpha_4, \dots, \alpha_s$ подмногообразия M одновременно будут симметрическими тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$h_{ki_2 \dots i_s}^{\alpha} \Omega_{i_1}^k + \dots + h_{i_1 \dots i_{s-1} k}^{\alpha} \Omega_{i_s}^k - h_{i_1 \dots i_s}^{\beta} \Omega_{\beta}^{\alpha} = 0, \quad t = 2, \dots, s-2. \quad (2.16)$$

Очевидно, что у локально евклидовых подмногообразий с плоской нормальной связностью ф.ф. всех порядков являются симметрическими.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Необходимость. Пусть m -мерное подмногообразие M пространства $M_n(\theta)$ является огибающим s -го порядка семейства m -мерных подмногообразий $\{G\}$, имеющих параллельные ф.ф. α_s порядка s . Докажем, что ф.ф. α_{s-1} и α_s подмногообразия M являются полупараллельными (при $s = 2$ имеется ввиду только полупараллельность α_2).

Действительно, пусть $x \in M$ — произвольная фиксированная точка, а $\widetilde{M}$ — подмногообразие семейства $\{G\}$, которое в точке x имеет с M касание s -го порядка. Тогда имеем

$$\alpha_{2x} = \widetilde{\alpha}_{2x}, \quad \dots, \quad \alpha_{sx} = \widetilde{\alpha}_{sx}, \quad (3.1)$$

где $\widetilde{\alpha}_r$ ($r = 2, \dots, s$) — ф.ф. подмногообразия $\widetilde{M}$. Так как $\widetilde{\alpha}_s$ параллельна, то как $\widetilde{\alpha}_{s-1}$, так и $\widetilde{\alpha}_s$ являются полупараллельными. Следовательно, их компоненты $\widetilde{h}_{i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha$ и $\widetilde{h}_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ в любом базисе пространств $T_x(M)$ и $T_x(\widetilde{M})$ удовлетворяют условиям (ср. с (2.14)) :

$$\begin{cases} \widetilde{h}_{ki_2 \dots i_{s-1}}^\alpha \widetilde{R}_{i_1 pq}^k + \dots + \widetilde{h}_{i_1 \dots i_{s-2} k}^\alpha \widetilde{R}_{i_{s-1} pq}^k - \widetilde{h}_{i_1 \dots i_{s-1}}^\beta \widetilde{R}_{\beta pq}^\alpha = 0, \\ \widetilde{h}_{ki_2 \dots i_s}^\alpha \widetilde{R}_{i_1 pq}^k + \dots + \widetilde{h}_{i_1 \dots i_{s-1} k}^\alpha \widetilde{R}_{i_s pq}^k - \widetilde{h}_{i_1 \dots i_s}^\beta \widetilde{R}_{\beta pq}^\alpha = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\widetilde{R}_{ijl}^k$ — компоненты тензора кривизны подмногообразия $\widetilde{M}$. Условия (3.2) выполняются в любой точке подмногообразия $\widetilde{M}$, в частности, в точке x . В силу (3.1) компоненты форм α_2, α_{s-1} и α_s подмногообразия M в точке x будут совпадать с соответствующими компонентами форм $\widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_{s-1}$ и $\widetilde{\alpha}_s$. Следовательно, в точке x они будут удовлетворять таким же алгебраическим условиям, что и (3.2), т.е. условиям, эквивалентным (2.14).

Таким образом, мы доказали, что в каждой точке $x \in M$ компоненты ф.ф. α_{s-1} и α_s удовлетворяют условиям (2.14), что и доказывает их полупараллельность.

Достаточность. Доказательство будем проводить с помощью метода подвижного репера Картана и теории вполне интегрируемых дифференциальных систем Фробениуса–Картана. Идейная сторона доказательства такая же, как и в [5].

Пусть E_n — n -мерное евклидово пространство, $x \in E_n$ — произвольная точка, T — m -мерная плоскость, проходящая через x , γ_r ($r = 2, \dots, s$) — линейное

отображение из $\underbrace{T \times \dots \times T}_r \text{ раз}$ в $T^\perp$, где $T^\perp$ — ортогональное дополнение к T в E_n , причем γ_2 и γ_3 симметричны. Пусть L_s обозначает многообразие всех наборов $(x, T, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$ в евклидовом пространстве E_n . Число $s \geq 2$ будем называть *длиной набора* L_s . Если мы дополним такой набор адаптированным ортонормированным репером $(x, e_1, \dots, e_n)$, где $e_i \in T$ при $i = 1, \dots, m$ и $e_\alpha \in T^\perp$ при $\alpha = m+1, \dots, n$, то получим *реперированный набор*. Многообразие всех реперированных наборов длины s в E_n обозначим через L_s^{fr} . Локальными координатами в L_s^{fr} являются $(x_1, \dots, x_n)$ -координаты точки x , параметры φ_p , $p = 1, \dots, n(n-1)/2$ таких ортогональных матриц A в $O(n, R)$, которые преобразуют базис $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ в базис $\{e_\alpha\}$ после стандартной ортогонализации, компоненты $\bar{h}_{i_1 \dots i_s}^\alpha$ форм γ_k , $k = 2, \dots, s$ в базисе $\{e_\alpha\}$.

На многообразии L_s^{fr} рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{cases} \omega^\alpha = 0, \\ \omega_i^\alpha - \bar{h}_{ij}^\alpha \omega^j = 0, \\ d\bar{h}_{ij}^\alpha + \bar{h}_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - \bar{h}_{kj}^\alpha \omega_i^k - \bar{h}_{ik}^\alpha \omega_j^k - \bar{h}_{ij}^\alpha \omega^k = 0, \\ \dots \dots \dots \\ d\bar{h}_{i_1 \dots i_{s-1}}^\alpha + \bar{h}_{i_1 \dots i_{s-1}}^\beta \omega_\beta^\alpha - \bar{h}_{ki_2 \dots i_{s-1}}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - \bar{h}_{i_1 \dots i_{s-2}k}^\alpha \omega_{i_{s-1}}^k - \bar{h}_{i_1 \dots i_s}^\alpha \omega^{i_s} = 0, \\ d\bar{h}_{i_1 \dots i_s}^\alpha + \bar{h}_{i_1 \dots i_s}^\beta \omega_\beta^\alpha - \bar{h}_{ki_2 \dots i_s}^\alpha \omega_{i_1}^k - \dots - \bar{h}_{i_1 \dots i_{s-1}k}^\alpha \omega_{i_s}^k = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

в предположении, что функции $\bar{h}_{i_1 \dots i_s}^\alpha$, $k = 2, \dots, s$, удовлетворяют

1) второму уравнению системы (2.14) при $s = 2$,

2) уравнениям (2.14) при $s = 3$,

3) системе (2.14) и первым $s - 3$ уравнениям системы (2.15) при $s > 3$.

Определим $\bar{R}_{ikl}^\alpha$, $\bar{R}_{\alpha kl}^\beta$, $\bar{\Omega}_i^j$ и $\bar{\Omega}_\alpha^\beta$, используя (2.12), (2.9), (2.10), соответственно, при этом подставим $\bar{h}_{ij}^\alpha$ вместо h_{ij}^α . Путем прямых вычислений можно убедиться, что внешние дифференциалы левых частей уравнений системы (3.3) равны нулю. Это значит, что система (3.3) вполне интегрируема.

Реперированные наборы $(x, T, \gamma_2, \dots, \gamma_s, e_1, \dots, e_n)$ и $(x', T', \gamma'_2, \dots, \gamma'_s, e'_1, \dots, e'_n)$ длины s называются *эквивалентными*, если $e'_i = A_i^j e_j$ и $e'_\alpha = A_\alpha^\beta e_\beta$, где

$$\|A_i^j\| \in O(m, R), \quad \|A_\alpha^\beta\| \in O(n-m, R).$$

Для любого $r = 2, \dots, s$ имеем

$$\bar{h}_{i_1 \dots i_r}^\alpha = \bar{h}_{j_1 \dots j_r}^\beta A_\beta^\alpha A_{i_1}^{j_1} \dots A_{i_r}^{j_r}.$$

Эта эквивалентность определяет отображение $L_s^{fr} \rightarrow L_s$, которое проецирует систему (3.3) в корректно определенную, вполне интегрируемую дифференциальную систему на L_s . Отсюда следует, что для каждого фиксированного набора из L_s локально существует единственное интегральное подмногообразие этой дифференциальной системы, которое имеет максимально возможную размерность, равную размерности инволютивного распределения на L_s , соответствующего этой системе, т.е. m . Уравнения системы (3.3) показывают, что фундаментальными формами этого подмногообразия будут $\gamma_2, \dots, \gamma_s$. Последнее уравнение системы (3.3) показывает, что форма γ_s параллельна.

Пусть у m -мерного подмногообразия M в $M_n(\theta)$ ф.ф. α_{s-1} и α_s являются полупараллельными (при $s = 2$ полупараллельной будем считать только α_2). Если $x \in M_n(\theta)$, то в качестве E_n будем рассматривать касательное n -мерное евклидово пространство в этой точке. Если к тому же $x \in M$, то в качестве m -мерной плоскости T будем брать касательное пространство $T_x(M)$. Тогда каждый фиксированный набор $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \dots, \alpha_{sx})$ определит некоторое m -мерное подмногообразие $\widetilde{M}$ (проходящее через точку x), порожденное соответствующим интегральным подмногообразием системы (3.3). Так как в точке $x \in M \cap \widetilde{M}$ наборы $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \dots, \alpha_{sx})$ и $(x, T_x(\widetilde{M}), \tilde{\alpha}_{2x}, \dots, \tilde{\alpha}_{sx})$ совпадают, то M является огибающим s -го порядка всех таких $\widetilde{M}$.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Необходимость. Будем рассуждать так же, как и при доказательстве достаточности условий теоремы 2. Однако теперь на многообразии L_s^{fr} мы рассмотрим дифференциальную систему, которая получается из системы (3.3) при замене s на $s - 2$. Обозначим эту новую систему через (3.3') и будем предполагать, что в ней функции $\bar{h}_{i_1 \dots i_k}^\alpha$, $k = 2, \dots, s - 2$ удовлетворяют условиям (2.16). Тогда непосредственной проверкой можем убедиться, что система (3.3') является вполне интегрируемой. Далее, рассуждая так же, как и в §3, приходим к выводу, что для каждого фиксированного набора из L_s локально существует единственное интегральное подмногообразие дифференциальной системы (3.3'), которое имеет максимально возможную размерность, равную размерности инволютивного распределения на L_s , соответствующего этой системе, т.е. m . Из (3.3') следует, что

фундаментальными формами этого подмногообразия являются $\gamma_2, \dots, \gamma_{s-2}$. Так как их компоненты удовлетворяют условиям (2.16), то все эти формы являются симметрическими. Последнее уравнение системы (3.3') показывает, что форма γ_{s-2} параллельна.

Если теперь m -мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ имеет симметрические ф.ф. $\alpha_4, \dots, \alpha_s$, то ф.ф. $\alpha_2, \dots, \alpha_{s-2}$ одновременно будут полупараллельными, а их компоненты будут удовлетворять условиям (2.16). Как и в §3, каждый фиксированный набор $(x, T_x(M), \alpha_{2x}, \dots, \alpha_{sx})$ подмногообразия M определит некоторое m -мерное подмногообразие $\widetilde{M}$ (проходящее через точку x), у которого все ф.ф. до порядка $s-2$ включительно будут симметрическими, а ф.ф. порядка $s-2$ будет параллельной. Очевидно, M и $\widetilde{M}$ будут иметь в точке x касание $s-2$ -го порядка. Это и означает, что M является огибающим $(s-2)$ -го порядка всех таких $\widetilde{M}$.

Достаточность. Пусть M — m -мерное подмногообразие в $M_n(\theta)$, имеющее симметрические ф.ф. $\alpha_3, \dots, \alpha_{s-1}$ ($s \geq 4$), и пусть M является огибающим $(s-2)$ -го порядка семейства m -мерных подмногообразий $\{G\}$, обладающих свойствами, указанными в теореме 3. Докажем, что ф.ф. α_s подмногообразия M симметрическая. Действительно, так как ф.ф. строятся по рекуррентной формуле $\alpha_r = \bar{\nabla} \alpha_{r-1}$ (см. §2), то из симметричности ф.ф. $\alpha_3, \dots, \alpha_{s-1}$ следует симметричность формы α_s по первым $s-1$ аргументам. Докажем, что α_s симметрична также по последним двум аргументам.

Пусть $x \in M$ — произвольная точка, и пусть $\widetilde{M}$ — подмногообразие семейства $\{G\}$, которое в точке x имеет касание с M $(s-2)$ -го порядка. Тогда выполняются равенства

$$\alpha_{2x} = \widetilde{\alpha}_{2x}, \quad \dots, \quad \alpha_{(s-2)x} = \widetilde{\alpha}_{(s-2)x}, \quad (4.1)$$

где $\widetilde{\alpha}_r$ ($r = 2, \dots, s-2$) — ф.ф. подмногообразия $\widetilde{M}$. Так как $\widetilde{\alpha}_{s-2}$ параллельна по условию, то она автоматически полупараллельна. В силу алгебраического характера условия полупараллельности, равенств (4.1) и произвольности точки x мы заключаем, что ф.ф. α_{s-2} также является полупараллельной, что, в свою очередь, равносильно симметричности α_s по последним двум аргументам. Теорема 3 доказана.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

Пусть m -мерное подмногообразие M в $M_n(\theta)$ удовлетворяет условиям $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_{s-1} = 0$, $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_s = 0$, и пусть $x \in M$ – произвольная точка. Согласно теореме 2 M является огибающим s -го порядка семейства m -мерных s -параллельных подмногообразий $\{G\}$. Пусть $\tilde{M} \in \{G\}$ – подмногообразие с параллельной ф.ф. $\tilde{\alpha}_s$, которое в точке x имеет касание s -го порядка с M . Так как $\nabla \tilde{\alpha}_s = 0$, то непосредственной проверкой, с учетом первой формулы в (2.12) для компонент тензора кривизны $\tilde{R}$ подмногообразия $\tilde{M}$, убеждаемся, что $\nabla^{2s-3} \tilde{R} = 0$. Отсюда, на основании известного результата К. Номидзу и Х. Одзеки, утверждающего, что для любого риманова многообразия с тензором кривизны R условие $\nabla^k R = 0$ для некоторого $k \geq 1$ влечет $\nabla R = 0$ (см. [14], т. 1, стр. 279), получаем $\nabla \tilde{R} = 0$. (Подробнее о результатах К. Номидзу и Х. Одзеки см. [15].) Тогда $\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{R} = 0$ и, в силу тождества Риччи

$$(\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{R})(U, V) =$$

$$= \tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{R}(U, V) - \tilde{R}(\tilde{R}(X, Y)U, V) - \tilde{R}(U, \tilde{R}(X, Y)V) - \tilde{R}(U, V) \cdot \tilde{R}(X, Y),$$

имеем

$$\tilde{R}(X, Y) \cdot \tilde{R}(U, V) - \tilde{R}(\tilde{R}(X, Y)U, V) - \tilde{R}(U, \tilde{R}(X, Y)V) - \tilde{R}(U, V) \cdot \tilde{R}(X, Y) = 0. \quad (5.1)$$

Пусть $\tilde{R}_{ikl}^j$ – компоненты тензора $\tilde{R}$ в некотором адаптированном к $\tilde{M}$ поле ортонормированных реперов. Легко показать, что последнее равенство равносильно следующему :

$$\tilde{R}_{ikl}^t \tilde{R}_{tpq}^j - \tilde{R}_{ikl}^j \tilde{R}_{tpq}^t - \tilde{R}_{ist}^j \tilde{R}_{kpq}^t - \tilde{R}_{ikt}^j \tilde{R}_{lpq}^t = 0. \quad (5.2)$$

Так как $\tilde{R}_{ikl}^j$ выражаются через компоненты $\tilde{h}_{ij}^\alpha$ ф.ф. $\tilde{\alpha}_2$ подмногообразия M алгебраически (см. (2.12)), то (5.2) фактически является условием на $\tilde{h}_{ij}^\alpha$ и кривизну объемлющего пространства. Это условие выполняется в любой точке подмногообразия $\tilde{M}$ и, в частности, в точке x . Так как в общем для M и $\tilde{M}$ ортонормбазисы в $\tilde{h}_{ij}^\alpha$ будут совпадать с компонентами h_{ij}^α второй ф.ф. α_2 подмногообразия M (это следует из того, что x – точка касания s -го порядка, где $s \geq 3$), то последние в точке x будут удовлетворять такому же алгебраическому условию, что и

(5.2). Следовательно, в точке x тензор кривизны R подмногообразия M будет удовлетворять условию $R(X, Y) \cdot R = 0$. Так как точка $x \in M$ — произвольная, то теорема 4 доказана.

ABSTRACT. We prove that an m -dimensional submanifold M of class C^∞ in a space of constant curvature $M_n(\theta)$ is an s -order ($s \geq 3$) envelope of a family of m -dimensional s -parallel submanifolds if and only if M has semi-parallel fundamental forms α_{s-1} and α_s . The case of symmetric fundamental forms is considered. We show that the semi-parallelism of α_{s-1} and α_s implies the condition $R(X, Y) \cdot R = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ü. Lumiste, "Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions", Izv. AN Est.SSR, Fiz. Math., vol. 36, № 4, pp. 414 – 417, 1987.
2. J. Deprez, "Semi-parallel surfaces in Euclidean space", J. Geom., vol. 25, pp. 192 – 200, 1985.
3. F. Mercuri, "Parallel and semi-parallel immersions into space forms", Riv. Mat. Univ. Parma (4), vol. 17, pp. 91 – 108, 1991.
4. F. Dillen, S. Nölker, "Semi-parallelity, multi-rotation surfaces and the helix-property", J. Reine Angew. Math., vol. 435, pp. 33 – 63, 1993.
5. Ü. Lumiste, "Semi-symmetric submanifolds as the second order envelope of symmetric submanifolds", Izv. AN Est.SSR, Fiz. Math., vol. 39, № 1, pp. 1 – 8, 1990.
6. D. Ferus, "Symmetric submanifolds of Euclidean space", Math. Ann., vol. 247, № 1, pp. 81 – 93, 1980.
7. Ю. Г. Лумисте, "Полусимметрические подмногообразия", Итоги науки и техн. Проблемы геометрии, т. 23, стр. 3 – 28, 1991.
8. В. А. Мирзоян, "Ric-полусимметрические подмногообразия", Итоги науки и техн. Проблемы геометрии, т. 23, стр. 29 – 66, 1991.
9. Ü. Lumiste, "Symmetric orbits of the orthogonal Veronese actions and their second order envelopes", Result. Math., vol. 27, pp. 284 – 301, 1995.
10. Ü. Lumiste, "Modified Nomizu problem for semi-parallel submanifolds", Geom. Topol. of Submanifolds, VII. World Scien., Singapore, pp. 176 – 181, 1995.
11. Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин, "Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии", Итоги науки и техн., Совр. пробл. мат. фонд. направл., т. 28, стр. 5 – 289, 1988.
12. В. А. Залгаллер, Теория огибающих, Наука, Москва, 1975.
13. Z. I. Szabo, "Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. The local version", J. Different. Geom., vol. 17, № 4, pp. 531 – 582, 1982.
14. С. Кобаяси, К. Номидзу, Основы дифференциальной геометрии, т. 1 – 2, Наука, М., 1981.
15. В. А. Мирзоян, "О подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой α_s ($s \geq 3$)", Уч. зап. Тартуск. ун-та., т. 930, стр. 97 – 112, 1991.