СУЩЕСТВЕННО–СОВЕРШЕННЫЕ И СУЩЕСТВЕННО–ОРСОВЕРШЕННЫЕ ГРАФЫ

С. Е. Маркосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 5, 1996

В настоящей работе продолжены исследования тех понятий и проблем, которые впервые были приведены в [1]. Определены новые классы совершенных графов : класс существенно-совершенных графов и класс существенно-орсовершенных графов. Описаны определенные подклассы совершенных графов и сформулированы некоторые проблемы.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе продолжены исследования тех понятий и проблем, которые впервые были приведены в [1]. Определены новые классы совершенных графов : класс существенно-совершенных графов (EP) и класс существенно-орсовершенных графов (EDP). Описаны некоторые известные подклассы EP и EDP, а также другие классы совершенных графов, сформулированы некоторые проблемы. В частности показано :

$$EDP \subset EP, \quad EP \subset Perf, \quad Comp \subset EDP,$$

где $Perf$ – класс совершенных графов, $Comp$ – класс графов сравнения.

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $G = (V, E)$ – простой граф без параллельных ребер и петель. Введем следующие обозначения :

$\alpha(G)$ – число независимости,

$\omega(G)$ – плотность (число вершин наибольшей клики),

$K(G)$ – кликоматическое число (наименьшее число клик, покрывающих все вершины графа G),

$\chi(G)$ – хроматическое число.

Нечетной дыркой C_{2k+1} будем называть цикл нечетной длины $2k+1 \geq 5$ без диагоналей. Скажем, что граф имеет *α-покрытие*, если $k(G) = \alpha(G)$. Класс графов, не содержащий нечетных дырок и их дополнений, называется *классом Бержа*. Ребро e графа называется *критическим*, если $\alpha(G-e) > \alpha(G)$. Цепь называется критической, если все ребра этой цепи критические. Критической компонентой графа G называется максимальный по включению подграф, вершины которого связаны критическими цепями. Ясно, что если граф G имеет α-покрытие, то критические компоненты этого графа полные. Граф G называется *совершенным*, если каждый подграф графа G имеет α-покрытие. Сильная гипотеза (СГБ), которая остается до сих пор открытой, следующая :

Предположение СГБ. *Граф G совершенный тогда и только тогда, когда G и $\overline{G}$ не содержат нечетных дырок.*

В работах [1], [3] приведены два предположения, которые вместе взятые равносильны СГБ.

Предположение 1. . *Если граф G из класса Бержа, то критические компоненты G полные.*

Предположение 2. *Если критические компоненты любого подграфа графа G полные, то G совершенный.*

Несмотря на то, что оба эти предположения до сих пор остаются открытыми, доказано [3], [4], что только предположение 2 отдельно взятое равносильно СГБ. Последнее утверждение получается из нижеследующей теоремы [4]. *Монстром* называется минимальный несовершенный граф, принадлежащий классу Бержа.

Теорема 1 ([4]). *Критические компоненты монстра полные.*

Из вышеприведенных фактов видно какое важное значение имеют понятия критического ребра, критической компоненты в исследовании совершенных графов. Немаловажное значение имеют в этом направлении также понятия *существенного ребра и существенной компоненты* (см. [1]). *Разрезом* будем называть множество всех ребер $(V_1, V_2) \subset E$ графа $G(V, E)$, соединяющих вешины из V_1 и

V_2, где $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Скажем, что разрез (V_1, V_2) *разделяет* вершины u и v, если $u \in V_1$, $v \in V_2$ (или $u \in V_2$, $v \in V_1$). Разрез (V_1, V_2) называется *увеличивающим*, если

$$\alpha(G(V_1)) + \alpha(G(V_2)) > \alpha(G),$$

где $G(V_i)$ – подграф, порожденный подмножеством вершин V_i ($i = 1, 2$). Ребро $e = uv$ назовем *существенным*, если любой разделяющий разрез u, v является увеличивающим. Из определений следует, что критическое ребро существенное, но обратное утверждение неверно, более того, есть графы, которые не содержат критических ребер, но содержат существенные ребра.

Цепь назовем *существенной*, если все ребра этой цепи существенные. *Существенной компонентой* графа G назыается максимальный (по включению) подграф, вершины которого связаны существенной цепью. В отличие от критических компонент, ребра которых могут быть не критическими, все ребра существенных компонент существенные. Критическая компонента целиком входит в одну существенную компоненту, котороя может состоять из многих критических компонент.

Ясно, что если граф G имеет α-покрытие, то его существенные компоненты полные. Нетрудно убедиться, что если существенные компоненты любого подграфа G полные, то граф G совершенный [1].Отсюда и из предположения 2 следует, что СГБ равносильна следующему :

Предположение 3. *Если критические компоненты любого подграфа графа G полные, то и существенные компоненты G полные.*

§2. КЛАССЫ EP И EDP

Определение 1. Граф Бержа G назовем *существенно-совершенным (essentially perfect)*, если в каждом подграфе G' графа G концы любого существенного ребра соединены критической цепью.

Класс существенно-совершенных графов обозначим через EP. Ясно, что если $G \in EP$, то критические и существенные компоненты в любом подграфе $G' \subset G$ совпадают. Обозначим через $Perf$ класс совершенных графов [2].

Теорема 2. $EP \subset Perf$.

Доказательство. Если теорема 2 неверна, то существет монстр $M \in EP$. Значит, критические и существенные компоненты в любом подграфе монстра M совпадают. В силу теоремы 1 эти критические компоненты полные, следовательно, существенные компоненты любого подграфа $M' \subset M$ тоже полные. Нетрудно доказать, что такой граф совершенный (утверждение 7 [1]). Полученное противоречие доказывает теорему 2.

Теорему 2 можно сформулировать и так : *СГБ верна для графов класса* EP.

Пусть $G = (V, E)$ – простой граф, $\longmapsto$ – некоторая ориентация. графа G, а $\vec{G}$ – орграф, полученный из G после этой ориентации. Ориентацию $\longmapsto$ назовем *существенно-совершенной (essentially diperfect)*, если в каждом подграфе $\vec{G}' \subset \vec{G}$ для любой существенной дуги $e = xy$ существует ориентированная кририческая цепь, соединяющая начало дуги x с концом дуги y.

Определение 2. G назовем *существенно-совершенным (essentially diperfect)* графом, если G допускает существенно-совершенную ориентацию.

Обозначим через EDP класс существенно-орсовершенных графов. Из определения следует $EDP \subset EP$. Обозначим через $Comp$ класс графов сравнения [2].

Теорема 3. $Comp \subset EDP$.

Доказательство. Пусть $G \in Comp$ и $\vec{G}$ – транзитивно ориентированный граф, полученный из G. Дугу $e = xy \in \vec{G}$ назовем *неудлиняющейся*, если в $\vec{G}$ не существует пара дут xz и zy. Орцепь назовем *неудлиняющейся*, если каждая дуга этой цепи неудлиняющаяся. Нетрудно проверить, что если существенная дуга e неудлиняющаяся, то e критическая. Действительно, если e не критическая, то подграф $G - e$ не обладает α-покрытием, т.к. e существенная. С другой стороны, $\vec{G} - e$ – транзитивно ориентированный граф, т.к. e неудлиняющаяся и, следовательно, имеет α-покрытие. Полученное противоречие доказывает, что e должна быть критической.

Теперь предположим, что теорема 3 неверна. Пусть $\vec{G}$ – минимальный (по числу дут) транзитивно ориентированный граф, который не принадлежит EDP.

Тогда $\vec{G}$ содержит такую существенную дугу $e = xy$, что x не соединена с y критической орцепью. Нетрудно убедиться, что в качестве дуги e можно выбрать такую, что из x не выходят, а в y не входят критические дуги, которые принадлежат орцепям, соединяющим x с y. Ясно, что существует неудлиняющаяся цепь $P_1 = x, x_1, ..., x_k, y$, в противном случае e была бы неудлиняющейся и существенной, т.е. критической, что противоречит предположению. Тогда граф $\vec{G} - e_1$, где дуга $e_1 = xx_1$, транзитивно ориентирован, т.к. дуга e_1 не критическая (в силу выбора дуги xy) и неудлиняющаяся. Следовательно, $G - e_1$ существенно орсовершенный и существует критическая цепь $P_2 = x, y_1, ..., y_m, y$, соединяющая x с y. Дуга $f_m = y_m y$ стала критической после удаления дуги e_1 (в силу выбора дуги xy). Но это невозможно. Действительно, множество дуг $\{e_1, f_m\}$ критическое, т.е.

$$\alpha\left(\vec{G} - \{e_1, f_m\}\right) > \alpha\left(\vec{G}\right)$$

и, значит, подграф, порожденный множеством вершин $\{x, x_1, y_m, y\}$, содержит только дуги e_1 и f_m. Но это неверно, т.к. в силу транзитивной ориентируемости $\vec{G}$ должен содержать дуги xy_m, x_1y и, конечно, дугу xy. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

G называется графом *Мейниела (Meyniel)* [4], если каждый нечетный цикл длины $n \geq 5$ содержит хотя бы две диагонали. Класс всех таких графов обозначим через Mey.

Теорема 4. $Mey \subset EDP$.

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из следующего утверждения (см. [4]) : *В графе Мейниела существенное ребро является критическим.*

Ниже приведено взаимоотношение EDP и EP с другими известными классами графов (обозначения взяты из [2]). Доказательства этих утверждений приведены в скобках, а для некоторых утверждений доказательства опускаем, т.к. их проверить не сложно.

$$EDP \subset EP, \qquad EDP \neq EP \tag{1}$$

(для цикла C_6 длины 6 $\overline{C}_6 \in EP$, $\overline{C}_6 \notin EDP$).

$$Mey \subset EDP, \qquad Comp \subset EDP, \qquad bip \subset EDP. \tag{2}$$

$$\overline{bip} \subset EP, \qquad \overline{bip} \not\subset EDP \tag{3}$$

(для цикла C_6 имеем $C_6 \in bip$, $\overline{C}_6 \notin EDP$).

$$EP \not\subset strong\ perf, \quad EP \not\subset alt\ or, \quad EP \not\subset perf\ or \tag{4}$$

(для цикла C_6 имеем $\overline{C}_6 \in EP$, $\overline{C}_6 \notin strong\ perf$, $\overline{C}_6 \notin alt\ or$ и $\overline{C}_6 \notin perf\ or$).

$$perf\ or \not\subset EP, \quad alt\ or \not\subset EP \tag{5}$$

(для графа G_1 (см рис. 1) имеем $G_1 \in perf\ or$, $G_1 \in alt\ or$, $G_1 \notin EP$).

$$EDP \not\subset superperf, \quad EDP \not\subset P_4 - Comp \tag{6}$$

(для графа S_3 (см. рис. 1) имеем $\overline{S}_3 \in EDP$, $\overline{S}_3 \notin superperf$ и $\overline{S}_3 \notin P_4 - Comp$).

$$loc.perf \not\subset EP, \quad circl \not\subset EP \tag{7}$$

(для графа G_2 (см. рис. 1) имеем $G_2 \in loc.perf$, $G_2 \in circl$, $G_2 \notin EP$).

$$EP \not\subset loc.perf \tag{8}$$

(для графа $G_3 = C_{2k+1} \cup e$, где e – триангулятор, имеем $G_3 \in EP$, $G_3 \notin loc.perf$).

$$G \in EP \quad \not\Rightarrow \quad \overline{G} \in EP \tag{9}$$

(для графа G_1 (см. рис. 1) имеем $\overline{G}_1 \in EP$, $G_1 \notin EP$).

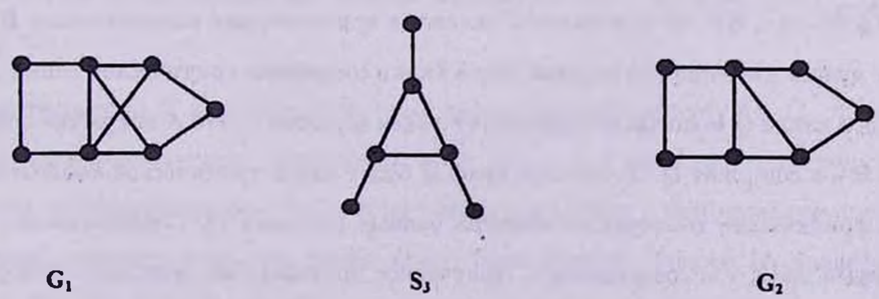

Рис. 1. Графы G_1, S_3 и G_2.

§3. ПРОБЛЕМЫ

Существуют разные расширения класса $Comp$ (см. [2]), однако они не входят в класс EP, как это видно из вышеприведенного списка. Но два класса $P_4 - Comp$ и $superperf$, как нам кажется, являются подклассами EP. Здесь приведены три предположения, которые в частном случае мы докажем ниже, но в общем случае они остаются открытыми проблемами.

Предположение 4. $P_4 - Comp \subset EP$.

Предположение 5. $P_4 - Comp \subset EDP$ *(усиление предположения 4).*

Предположение 6. $Superperf \subset EP$.

Для исследования этих классов было бы полезно полностью описать класс EP (EDP) с помощью запрещенных подграфов. К сожалению, это нам кажется очень трудным делом, поэтому мы попытаемся найти некоторую неполную систему подграфов, которую содержит любой граф $G \notin EP$. Это даст нам возможность доказать предположения 4 и 6 в частном случае. Пока мы будем изучать свойства минимального (по включению множества вершин) графа Бержа H, который не является существенно-совершенным, т.е. $H \notin EP$, но любой его подграф $H' \subset H$ существенно-совершенный, т.е. $H' \in EP$.

Теорема 5. *Граф H совершенный.*

Доказательство. Из определения графа H и теоремы 2 следует, что для каждой вершины $z \in H$ подграф $H - z$ совершенный, значит, если H несовершенный, то H – монстр. Тогда для каждой вершины $z \in H$ существенными компонентами подграфа $H - z$ являются клики α-покрытия этого подграфа (теорема 2 [1]). Т.к. граф $H - z \in EP$, то эти клики и являются критическими компонентами $H - z$, т.е. любые две вершины каждой такой клики соединены критической цепью. Для любой клики Q монстра H существует такая вершина z, что α-покрытие подграфа $H - z$ содержит Q. Тогда весь граф H будет одной критической компонентой. Но критические компоненты монстра полные (теорема 1). Следовательно, H – полный граф, т.е. совершенный. Полученное противоречие доказывает теорему.

Существенное ребро назовем *сильным*, если концы этого ребра соединены критической цепью. Если существенное ребро не сильное, назовем его *слабым*. В свойствах 1–4 предполагается, что $e = xy$ – *слабое существенное ребро.* Тогда граф $H = (V, E)$ обладает следующими свойствами :

Свойство 1. *Через каждую вершину $z \neq x, y$ проходят хотя бы два α-независимых множества, одно из которых не содержит x, а другое не содержит y, а через $x(y)$ хотя бы одно α-независимое множество.*

Доказательство. Пока докажем, что через каждую вершину $z \neq x, y$ проходит α-независимое множество. Действительно, если через z не проходит никакое α-независимое множество, то подграф $H - z$ имеет такое α-покрытие, при котором вершины x и y принадлежат разным полным подграфам Q_x и Q_y α-покрытия. Тогда

$$\alpha(H - Q_x) = \alpha - 1, \quad x \in Q_x, \quad y \in Q_y, \quad Q_x \neq Q_y.$$

Т.к. $H - Q_x$ совершенный, то $H - Q_x$ имеет $(\alpha - 1)$-покрытие, т.е. $e = xy$ не существенное в H. Аналогично можно доказать, что и через x и через y также проходят α-независимые множества. Из вышеприведенных рассуждений видно, что через любую вершину $z \neq x, y$ проходят два α-независимых множества, одно из которых не содержит x, а другое не содержит y.

Свойство 2. *Для любой вершины $z \neq x, y$ существует такое α-покрытие $\{Q_x, Q_y, ...\}$ графа $H - z$ (покрытие разделяет x и y) и такие α-независимые множества $S(Q_x)$ и $S(Q_y)$,* что

$$S(Q_x) \cap Q_x = \emptyset, \quad S(Q_y) \cap Q_y = \emptyset, z \in S(Q_x) \cap S(Q_y), x \in Q_x, y \in Q_y, Q_x \neq Q_y.$$

Свойство 3. *Для любого α-покрытия $\{Q_1, Q_2, ..., Q_\alpha\}$ графа H каждое Q_i является кликой (максимальный полный подграф) и $|Q_i| \geq 2$; если $\{x, y\} \subset Q_i$,* то $|Q_i| \geq 3$, $i = 1, ..., \alpha$.

Доказательство. Т.к. в силу свойства 2 через каждую вершину $t \in Q_j$ графа G проходит α-независимое множество, то в Q_i, $i \neq j$ должна существовать вершина, которая не смежна с t. Поэтому никакую вершину t, не принадлежащую Q_i, нельзя добавить к Q_i так, чтобы $Q_i \cup t$ была кликой. Значит, Q_i является кликой. Если $Q_i = \{x, y\}$, т.е. $|Q_i| = 2$, то из свойства 1 вытекает, что

$$z \neq x, y, \quad x \in S(Q_y), \quad y \in S(Q_x) \quad \Rightarrow \quad z \in S(Q_y) \cap S(Q_x),$$

т.е. z не смежна ни с x, ни с y. Но тогда ребро $e = xy$ было бы критическим, что противоречит предположению, что e – слабое существенное ребро. Значит, $|Q_i| \geq 3$.

Свойство 4. *Для любой вершины $z \neq x, y$ в подграфе $H - z$ ребро $e = xy$ не существенное, а для любого α-покрытия $\{Q_1, ..., Q_\alpha\}$ графа H в подграфе $H - Q_i$ ребро e, где $e \notin Q_i$, сильное, существенное.*

Доказательство. Из определения H следует, что подграф $H - z$ имеет x, y-разделяющее α-покрытие, поэтому в $H - z$ ребро e не существенное. Ясно, что в подграфе $H - Q_i$ ребро e опять существенное, в противном случае e не было бы существенным в H. Но граф $(H - Q_i) \in EP$, поэтому ребро e сильное.

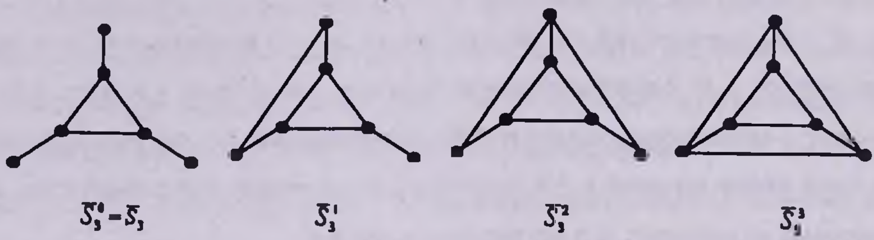

Рис. 2. Графы $\overline{S}_3^i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Обозначим через $\overline{S}_3^i$ граф, полученный из $\overline{S}_3$ ("3-sun", см. Рис. 1 и [2]), добавлением i ребер $i = 0, 1, 2, 3$ (см. Рис. 2).

Предположение 7. *Если граф $G \notin EP$, то G содержит подграф $\overline{S}_3^i$ хотя бы для одного значения $i = 0, 1$.*

Теорема 6 (частный случай предположения 7). *Если $G \notin EP$ и $\omega(G) \leq 3$, то G содержит подграф $\overline{S}_3^i$ хотя бы для одного значения $i = 0, 1$.*

Доказательство. Ясно, что граф G содержит подграф H, поэтому мы покажем, что H содержит подграф $\overline{S}_3^i$. Из определения графа H следует, что H содержит слабое существенное ребро $e = xy$. Т.к. $\omega(H) \leq 3$, в силу свойства 3 для любого α-покрытия H существует такая клика Q, что $Q = \{x, y, z\}$, $|Q| = 3$. Пусть S_x – независимое множество, содержащее x и x_1, $x \neq x_1$. Из свойства 2 следует, что Q содержит такую вершину t, отличную от x, которая вместе с x_1 находится в некотором α-независимом множестве S_1 ($t = y$ или $t = z$). Ясно, что в S_x существует такая вершина x_1, которая смежна с y, в противном случае ребро e было бы критическим. Значит, для такой вершины x_1 $t = z$, т.е. x_1 не смежна с x и z, но смежна с y. Аналогично существует вершина $y_1 \in S_y$, которая смежна с x, но не смежна с y и z. Теперь остается доказать, что существует вершина z_1, которая смежна с z, но не смежна с x и y. Из свойства 2 следует, что существует такая веершина z_1 из $S_x \cup S_y$, которая смежна с z и не цмежна с x и y. Ясно, что z_1 не смежна или с x_1 или с y_1. Мы доказали, что H содержит подграф $\overline{S}_3^i$ хотя бы для одного значения $i = 0, 1, 2$. Но $\overline{S}_3^2$ несовершенный, а H совершенный, поэтому H не содержит $\overline{S}_3^2$.

Следствие 1. Если граф $G \in P_4 - Comp$ и $\omega(G) \leq 3$, то $G \in EP$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что если $G \in P_4 - Comp$, то G не может содержать подграфы $\overline{S}_3^i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Но в силу теоремы 5 любой граф, который не принадлежит классу EDP, содержит $\overline{S}_3^i$ для некоторого значения $i = 0, 1$. Следовательно, $G \in EP$.

Следствие 2. Если $G \in superperf$ и $\omega(G) \leq 3$, то $G \in EP$.

Доказательство. Аналогично следствию 1 можно убедиться, что если граф $G \in superperf$, то G не содержит $\overline{S}_3^i$.

ABSTRACT. The paper continues the study of notions and problems first considered in [1]. We defined new classes of perfect graphs : the class of essentially perfect and essentially diperfect graphs. Certain subclasses of perfect graphs are studied and several problems are formulated.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Markossian, G. Gasparian, A. Markossian, "On essential components and critical sets of graph", Discrete Mathematics, ISSN : 0012–365X, vol /Iss : 178/ 1–3, pp. 137–153, 1997.
2. A. Bradstadt, Special Graph Class, SM–DU–199, 1993.
3. S. Markossian, G. Gasparian, A. Markossian, "On a conjecture of Berge", J. of Comb. Theory, ser. B, vol. 56, № 1, pp. 97 – 107, 1992.
4. A. Sebo, "On critical edges in minimal imperfect graphs", Lab. Artemis, RR 924-M, 1993.
5. С. Маркосян, И. Карапетян, "Совершенные графы", ДАН Арм.ССР, т. 15, № 5, стр. 292 – 296, 1976.
6. С. Маркосян, "Совершенные и критические графы", ДАН Арм.ССР, т. 11, № 1, стр. 218 – 223, 1975.

2 сентября 1996

Ереванский государственный университет
E-mail : diskmath@ysu.am