

О СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ

В. Н. Маргарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 5, 1996

В работе найдены необходимые и достаточные условия для сильной гипозэллиптичности многочленов с постоянными коэффициентами.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ — n -мерные вещественные и комплексные евклидовы пространства

$$\mathbb{R}_+^n = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\},$$

и пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — n -мерное пространство мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ положим

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \|\xi\| = \left[\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \right]^{1/2}, \quad |\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1} \dots |\xi_n|^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Определение 1. Многочлен $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, где $(P) = \{\alpha^j\}_1^r \subset \mathbb{Z}_+^n$, называется гипозэллиптическим, если при $\|\xi\| \rightarrow \infty$

$$\frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \rightarrow 0, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad |\beta| \neq 0.$$

Для данного многочлена P положим $\mathcal{D}(P) = \{\xi \in \mathbb{C}^n : P(\xi) = 0\}$, а через $d_P(\xi)$ обозначим расстояние точки ξ от множества $\mathcal{D}(P)$. Известно (см. [1], лемму 4.1.1), что для любого многочлена P с постоянными коэффициентами существует постоянная $c = c_P > 0$, для которой

$$c \geq d_P(\xi) \sum_{|\beta| > 0} \left| \frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\beta|} \geq c^{-1}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad P(\xi) \neq 0. \quad (0.1)$$

Из оценки (0.1) немедленно следует, что если многочлен P гипоеллиптичен, то $d_P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Поэтому, не умаляя общности, всюду ниже будем считать, что $d_P(\xi) \geq 1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, если многочлен P гипоеллиптичен.

Определение 2. Функция $h(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ называется *весом гипоеллиптичности* многочлена P , если для некоторой постоянной $c > 0$

$$h(\xi) \leq c d_P(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 3. Многочлен P называется *сильно гипоеллиптическим*, если $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$ и с некоторыми постоянными $c, M > 0$

$$|P(\xi)| \leq c d_P^m(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi\| \geq M, \quad m = \text{ord} P \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha|.$$

Пусть R — однородный многочлен и $\tau \in S = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = 1\}$ является его нулем, $R(\tau) = 0$. Обозначим через $\text{ord}_R \tau$ порядок нуля τ , т.е. натуральное число r , для которого $D^\beta R(\tau) = 0$ при $|\beta| < r$ и $\sum_{|\beta|=r} |D^\beta R(\tau)| \neq 0$. Пусть $S(R) = \{\tau \in S : R(\tau) = 0\}$. Для многочлена $P(\xi)$ при $t > 0$ положим

$$\tilde{P}(\xi, t) = \left[\sum_{\alpha} |D^\alpha P(\xi)|^2 t^{2|\alpha|} \right]^{1/2}.$$

В настоящей работе мы находим необходимые и достаточные алгебраические условия для сильной гипоеллиптичности многочлена $P(\xi)$ с постоянными коэффициентами.

§1. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть многочлен P с постоянными коэффициентами сильно гипоеллиптичен. Тогда в силу оценки (0.1) для некоторых постоянных $c, M > 0$

$$c^{-1} |P(\xi)| \leq d_P^m(\xi) \leq c |P(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \|\xi\| \geq M, \quad m = \text{ord} P. \quad (1.1)$$

Лемма 1.1. Пусть P — многочлен с постоянными коэффициентами, а T — линейное ограниченное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда для некоторой постоянной $c = c(T) > 0$ и для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$, $r = 0, 1, \dots, m$ имеем

$$c^{-1} \sum_{|\alpha|=r} |D_\eta^\alpha P(T\eta)| \leq \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha P(T\eta)| \leq c \sum_{|\alpha|=r} |D_\eta^\alpha P(T\eta)|. \quad (1.2)$$

Доказательство очевидно.

Следствие 1.1. Если многочлен P с постоянными коэффициентами сильно гипозэллиптичен, а T - линейное ограниченное обратимое отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то многочлен $Q(\eta) \equiv P(T\eta)$ также сильно гипозэллиптичен.

Лемма 1.2. Пусть $P_m(\xi) \not\equiv 0$ - однородный многочлен порядка m , и пусть $\tau', \tau'' \in S(P_m)$. Если порядок нуля многочлена P_m в точке τ' равен m , то для любых чисел t_1, t_2

$$P_m(t_1\tau' + t_2\tau'') = 0.$$

Доказательство. В силу того, что $\text{ord}_{P_m} \tau' = m$, $\tau'' \in S(P_m)$, учитывая формулу Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} P_m(t_1\tau' + t_2\tau'') &= \sum_{\alpha} \frac{D^{\alpha} P_m(t_1\tau')}{\alpha!} (t_2\tau'')^{\alpha} = \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} \frac{D^{\alpha} P_m(t_1\tau')}{\alpha!} (t_2\tau'')^{\alpha} = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=j} t_1^{m-j} \frac{D^{\alpha} P_m(\tau')}{\alpha!} (t_2\tau'')^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^{\alpha} P_m(\tau')}{\alpha!} (t_2\tau'')^{\alpha} = t_2^m P_m(\tau'') = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Лемма 1.2 доказана.

Следствие 1.2. Если в условиях леммы 1.2 $\text{ord}_{P_m} \tau'' = m$, то $\text{ord}_{P_m} (t_1\tau' + t_2\tau'') = m$.

Лемма 1.3. Пусть $P(\xi) = \sum_{j=1}^m P_j(\xi)$, где $P_j(\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$, - многочлен с постоянными коэффициентами и $P(\tau) = 0$, $\tau \in \mathbb{R}^n$. Если $\text{ord}_P \tau = m$, то для любого $\eta \in \mathbb{R}^n$ $P(\tau + \eta) = P_m(\eta)$.

Доказательство. В силу формулы Тейлора

$$P(\tau + \eta) = \sum_{\alpha} \frac{D^{\alpha} P(\tau)}{\alpha!} \eta^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^{\alpha} P(\tau)}{\alpha!} \eta^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=m} \gamma_{\alpha} \eta^{\alpha} = P_m(\eta).$$

Лемма 1.4. Если многочлен $P(\xi) = \sum_{j=1}^m P_j(\xi)$, $P_m(\xi) \not\equiv 0$ порядка m сильно гипозэллиптичен, то для любого $\tau \in S(P_m)$ $r \equiv \text{ord}_{P_m} \tau = m$.

Доказательство. Пусть $t > 0$ - любое число. Тогда для некоторых постоянных $c_1, c_2 > 0$, $c_3 \geq 0$ имеем

$$|P(t\tau)| \leq c_1 t^{m-1},$$

$$\sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha P(t\tau)| \geq \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha P_m(t\tau)| - \sum_{|\alpha|=r} |D^\alpha [P(t\tau) - P_m(t\tau)]| \geq c_2 t^{m-r} - c_3 t^{m-r-1}.$$

Отсюда, из оценки (0.1) и сильной гипоеллиiptичности многочлена P при всех $t \geq 1$ с некоторой постоянной $c_4 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \infty > c &\geq d_P(t\tau) \sum_{|\alpha|=r} \left[\frac{|D^\alpha P(t\tau)|}{|P(t\tau)|} \right]^{1/r} \geq \\ &\geq c_4 \sum_{|\alpha|=r} \left[\frac{|D^\alpha P(t\tau)|}{|P(t\tau)|^{1-r/m}} \right]^{1/r} \geq c_4 \left[\frac{c_2 t^{m-r} - c_3 t^{m-r-1}}{c_1 t^{(m-1)(1-r/m)}} \right]^{1/r}, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует, что $\tau = m$.

Лемма 1.5. Пусть $P_m(\xi) \not\equiv 0$ - однородный многочлен порядка m , и пусть $\tau^1, \dots, \tau^k \in S(P_m)$ линейно независимы. Если

$$\text{ord}_{P_m} \tau^j = m, \quad j = 1, \dots, k, \quad P_m(\xi) \neq 0 \text{ при } \xi \in \mathbb{R}^n \ominus \overline{\{\tau^1, \dots, \tau^k\}},$$

где $\overline{\{\tau^1, \dots, \tau^k\}}$ - линейная оболочка, натянутая на векторы $\{\tau^1, \dots, \tau^k\}$, то существует линейное ограниченное обратимое отображение $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен $Q(\eta) = P_m(T\eta)$ удовлетворяет следующим условиям:

- а) Q однороден порядка m ,
- б) $Q(\eta)$ не зависит от переменных $\eta_{n-k+1}, \dots, \eta_n$,
- в) $Q(\eta) \neq 0$ при $|\eta_1| + \dots + |\eta_{n-k}| \neq 0$, т.е. Q эллиiptичен относительно переменных $\eta_1, \dots, \eta_{n-k}$.

Доказательство. Дополним точки до базиса в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\theta^1, \dots, \theta^{n-k}, \tau^1, \dots, \tau^k$ является базисом в $\mathbb{R}^n$. Через T обозначим оператор

$$T: \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta_1^1 \dots \theta_1^{n-k} & \tau_1^1 \dots \tau_1^k \\ \dots & \dots \\ \theta_n^1 \dots \theta_n^{n-k} & \tau_n^1 \dots \tau_n^k \end{pmatrix}.$$

В силу линейности оператора T и однородности порядка m многочлена P_m для любого $t > 0$ имеем

$$Q(t\eta) = P_m(Tt\eta) = P_m(tT\eta) = t^m P_m(T\eta) = t^m Q(\eta),$$

т.е. утверждение пункта а) леммы.



Покажем, что многочлен $Q(\eta)$ не зависит от переменной η_n . В силу утверждения пункта а) леммы многочлен $Q(\eta)$ можно представить в следующем виде :

$$Q(\eta) = \sum_{j=1}^n \eta_n^j \sum_{|\alpha'|=m-j} \delta_{(\alpha',j)}(\eta')^{\alpha'}, \quad \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \quad \eta' = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}).$$

В силу леммы 1.1

$$e^{(n)} = (0, \dots, 0, 1) = T^{-1}\tau^k \in \mathcal{S}(Q), \quad \text{ord}_Q e^{(n)} = m.$$

Используя это, получим, что $0 = Q(e^{(n)}) = \delta(0', m)$. Допустим, что

$$\delta(\alpha', j) = 0, \quad m \geq j \geq r > 0, \quad \alpha' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}, \quad |\alpha'| = m - j.$$

Покажем, что $\delta(\alpha', r-1) = 0$ для всех $\alpha' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha'| = m - r + 1 < m$. Пусть $\beta' \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$, $|\beta'| = m - r + 1$ — любой мультииндекс. Так как, в силу предположения

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{r-1} \eta_n^j \sum_{|\alpha'|=m-j} \delta_{(\alpha',j)}(\eta')^{\alpha'}$$

и $D^\gamma Q(e^{(n)}) = 0$ для всех $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\gamma| \leq m-1$, то

$$0 = |D^{\beta'} Q(e^{(n)})| = \beta'! \delta(\beta', r-1),$$

т.е. $\delta(\beta', r-1) = 0$. В силу индукции отсюда получим

$$Q(\eta) = \sum_{|\alpha'|=m} \delta_{(\alpha',0)}(\eta')^{\alpha'},$$

т.е. многочлен $Q(\eta)$ не зависит от η_n . Аналогичным образом доказывается, что многочлен $Q(\eta)$ не зависит от $\eta_{n-1}, \dots, \eta_{n-k+1}$, т.е. $Q(\eta) \equiv Q(\eta_1, \dots, \eta_{n-k}, 0, \dots, 0)$.

Утверждение пункта б) доказано.

Теперь докажем утверждение пункта в) леммы. Пусть, наоборот, существует точка $e = (e_1, \dots, e_{n-k}, 0, \dots, 0)$, $\|e\| \neq 0$ такая, что $Q(e) = 0$. Так как $e, e^{n-k+1}, \dots, e^n$ линейно независимы, то $Te, \tau^1, \dots, \tau^k$ также линейно независимы и $P_m(Te) = Q(e) = 0$. Это в силу леммы 1.3 и следствия 1.2 противоречит условию $P_m(\xi) \neq 0$, $\xi \in \overline{\{\tau^1, \dots, \tau^k\}}$, так как Te можно представить в виде $\bar{\xi} + \hat{\xi}$, где $\bar{\xi} \in \overline{\{\tau^1, \dots, \tau^k\}}$, $\bar{\xi} \perp \hat{\xi}$ и $\hat{\xi} \neq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения пункта в). Лемма 1.5 доказана.

Теорема 1.1. Пусть многочлен P порядка m сильно гипоеллиптичен. Тогда существует натуральное число k , $1 \leq k \leq n$ и линейное ограниченное обратимое отображение $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен

$$Q(\eta) \equiv P(T\eta) \equiv \sum_{j=1}^m Q_j(\eta)$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) Q сильно гипоеллиптичен,

б) многочлен $Q_m(\eta) \equiv Q_m(\eta_1, \dots, \eta_k, 0, \dots, 0)$ эллиптичен относительно переменных $\eta_1, \dots, \eta_k$.

в) $Q(0, \dots, 0, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$ гипоеллиптичен как многочлен от переменных $\eta_{k+1}, \dots, \eta_n$ с весом $|Q(0, \dots, 0, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)|^{1/m}$.

Доказательство. Утверждение пункта а) следует из леммы 1.1. Утверждение пункта б) следует из лемм 1.4 и 1.5. Докажем утверждение пункта в) теоремы.

Так как в силу утверждения пункта а) теоремы с некоторой постоянной $c > 0$

$$|Q(\eta)|^{1/m} \sum_{|\alpha| > 0} \left| \frac{D^\alpha Q(\eta)}{Q(\eta)} \right|^{1/|\alpha|} \leq c, \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad Q(\eta) \neq 0,$$

то для всех $\eta'' = (\eta_{k+1}, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ таких, что $Q(0', \eta'') \neq 0$, имеем

$$|Q(0', \eta'')|^{1/m} \sum_{\substack{|\alpha| > 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0}} \left| \frac{D^\alpha Q(0', \eta'')}{Q(0', \eta'')} \right|^{1/|\alpha|} \leq c.$$

Отсюда немедленно следует утверждение пункта в) теоремы, так как $Q(0', \eta'') \rightarrow \infty$ при $\|\eta''\| \rightarrow \infty$. Теорема 1.1 доказана.

Для натурального k , $1 \leq k \leq n$, через A_k обозначим множество тех сильно гипоеллиптических многочленов P , для коорых

I) $P_m(\xi', 0'') \neq 0$ при $\|\xi'\| \neq 0$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $m = \text{ord } P$;

II) $P(0', \xi'')$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ гипоеллиптичен с весом $|P(0', \xi'')|^{1/m}$.

Положим $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Теорему 1.1 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 1.1'. Многочлен P сильно гипоеллиптичен тогда и только тогда, когда существует линейное ограниченное обратимое отображение $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $P(T\eta) \in A$.

§2. РОСТ МНОГОЧЛЕНА И СИЛЬНАЯ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ

Предложение 2.1. Пусть P — многочлен с постоянными коэффициентами. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что $|P(\xi + \eta)| \leq \delta |P(\xi)|$ при $\|\eta\| \leq \varepsilon d_P(\xi)$.

Доказательство. В силу оценки (3.3.7) работы [1] и нашей оценки (1.1) для всех $\|\eta\| \leq \varepsilon d_P(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} |P(\xi + \eta)| &\leq \sup_{\|\eta\| \leq \varepsilon d_P(\xi)} |P(\xi + \eta)| \leq \\ &\leq c_1 \tilde{P}(\xi, \varepsilon d_P(\xi)) \leq c_2 \sum_{\alpha} |D^{\alpha} P(\xi)| d_P^{|\alpha|}(\xi) \leq c_3 |P(\xi)|, \end{aligned}$$

где $c_1, c_2, c_3 > 0$ — некоторые постоянные.

Следствие 2.1. Если многочлен P сильно гипоеллиптичен, то для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что $|P(\xi + \eta)| \leq \delta |P(\xi)|$ при $\|\eta\| \leq \varepsilon |P(\xi)|^{1/m}$, $m = \text{ord } P$.

Предложение 2.2. Для любого многочлена P существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$d_P(\xi + \eta) \geq \delta d_P(\xi) \quad \text{при} \quad \|\eta\| \leq \frac{1}{2} d_P(\xi), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Доказательство. Выполнение неравенства (2.1) достаточно показать для тех ξ , для которых $d_P(\xi) \neq 0$. Пусть, наоборот, существуют последовательности $\{\xi^s\}_1^{\infty}$ и $\{\eta^s\}_1^{\infty}$ такие, что

$$\|\eta^s\| \leq \frac{1}{2} d_P(\xi^s) \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad \frac{d_P(\xi^s + \eta^s)}{d_P(\xi^s)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty.$$

В силу замкнутости множества $\mathcal{D}(P)$ для любого s существует точка $\zeta^s \in \mathcal{D}(P)$ такая, что $d_P(\xi^s + \eta^s) = \|\xi^s + \eta^s - \zeta^s\|$. Отсюда, при достаточно больших s , имеем

$$\begin{aligned} \|\xi^s - \zeta^s\| &= \|\xi^s + \eta^s - (\zeta^s - \eta^s)\| \leq \|\xi^s + \eta^s - \zeta^s\| + \|\eta^s\| \leq \\ &\leq d_P(\xi^s + \eta^s) + \frac{1}{2} d_P(\xi^s) \leq \frac{2}{3} d_P(\xi^s), \end{aligned}$$

что противоречит определению $d_P(\xi)$. Предложение 2.2 доказано.

Следствие 2.2. Если многочлен P порядка m сильно гипозеллиптичен, то для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что $|P(\xi + \eta)| \geq \delta |P(\xi)|$ при $\|\eta\| \leq 1/2 |P(\xi)|^{1/m}$.

Доказательство немедленно следует из предложения 2.2 и определения сильной гипозеллиптичности.

Предложение 2.3. Пусть для многочлена P порядка m $\tilde{P}(\xi) \equiv \tilde{P}(\xi, 1) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Если для некоторых чисел $\delta, \kappa > 0$ и достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ $|P(\xi + \eta)| \leq \delta |P(\xi)|$ при $\|\eta\| \leq 1/2 |P(\xi)|^\kappa$, то $P(\xi) \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Доказательство. В силу оценки (3.3.7) работы [1] с некоторой постоянной $c > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\tilde{P}\left(\xi, \frac{1}{2}|P(\xi)|^\kappa\right) \leq c \sup_{\|\eta\| \leq 1/2 |P(\xi)|^\kappa} |P(\xi + \eta)| \leq c\delta |P(\xi)|. \quad (2.2)$$

Отсюда, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и при достаточно больших ξ имеем

$$\tilde{P}(\xi) \leq c_1 \frac{|P(\xi)|}{\sum_{|\alpha| \leq m} |P(\xi)|^{\kappa|\alpha|}}. \quad (2.3)$$

Утверждение предложения немедленно следует из неравенства (2.3), так как в противном случае существовала бы последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ такая, что $|P(\xi^s)| = \text{const} \neq 0$.

Предложение 2.4. Если в условиях предложения 2.3 $\kappa = 1/m$, то многочлен P сильно гипозеллиптичен.

Доказательство немедленно следует из предложения 2.3 и неравенства (2.2).

Лемма 2.1. Если для однородного многочлена $P_m(\xi) \not\equiv 0$ с некоторой постоянной $c > 0$

$$\sum_{j=1}^n |D_j P_m(\xi)| \leq c |P_m(\xi)|^{(m-1)/m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

то для любого $\tau \in S(P_m)$ $\text{ord}_{P_m} \tau = m$.

Доказательство. При $m \leq 2$ доказательство немедленно следует из неравенства (2.4). Пусть $m > 2$, $\tau \in S$, $P_m(\tau) = 0$ и $\text{ord}_{P_m} \tau = l$. Покажем, что $l = m$. В силу

оценки (3.3.7) работы [1] с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ имеем, что при $t > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |D_j \widetilde{P_m}(\tau, t)| &\leq c_1 \sum_{j=1}^n \sup_{\|\eta^j\| \leq t} |D_j P_m(\tau + \eta^j)| \leq \\ &\leq c_1 c \sum_{j=1}^n \sup_{\|\eta^j\| \leq t} |P_m(\tau + \eta^j)|^{(m-1)/m} \leq c_2 \sum_{|\alpha| \geq l} \left(|D^\alpha P_m(\tau)| \frac{t^{|\alpha|}}{\alpha!} \right)^{(m-1)/m}. \end{aligned}$$

Откуда

$$\sum_{j=1}^n \sum_{|\beta|=l-1} |D_j D^\beta P_m(\tau)| \leq c_2 \sum_{|\alpha| \geq l} \left(\frac{|D^\alpha P_m(\tau)|}{\alpha!} \right)^{(m-1)/m} t^{|\alpha| \frac{m-1}{m} - l + 1}.$$

Так как

$$\sum_{j=1}^n \sum_{|\beta|=l-1} |D_j D^\beta P_m(\tau)| \neq 0, \quad \text{ord}_{P_m} \tau = l,$$

то отсюда имеем, что $l \frac{m-1}{m} - l + 1 \leq 0$, т.е. $l \geq m$. Лемма 2.1 доказана.

Предложение 2.5. Пусть P_m — однородный многочлен порядка m . Если для любого $\tau \in S(P_m)$, $\text{ord}_{P_m} \tau = m$, то неравенство (2.4) выполняется.

Доказательство немедленно получается использованием лемм 2.1 и 1.5.

Лемма 2.2. Если однородный многочлен P_m удовлетворяет неравенству (2.4), то для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| > 0$ существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$|D^\alpha P_m(\xi)| \leq c_1 |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть $\tau^1, \dots, \tau^k \in S$ — все независимые корни многочлена P_m . В силу предложения 2.5 имеем $\text{ord}_{P_m} \tau^j = m$, $j = 1, \dots, k$. По лемме 1.5 существует линейное ограниченное обратимое отображение $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что многочлен $Q_m(\eta) = P_m(T\eta)$ не зависит от $\eta_1, \dots, \eta_k$ и с некоторой постоянной $\chi > 0$

$$|Q_m(\eta)| \geq \chi (|\eta_{k+1}|^2 + \dots + |\eta_n|^2)^{m/2}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Используя это, получим с некоторыми постоянными $\chi_1, \chi_2, \chi_3 > 0$, $\xi = T\eta$

$$\begin{aligned} |D_\xi^\alpha P_m(\xi)| &\leq \chi_1 \sum_{|\beta|=|\alpha|} |D^\beta Q_m(T^{-1}\xi)| \leq \chi_2 (|\eta_{k+1}|^2 + \dots + |\eta_n|^2)^{(m-k)/2} \leq \\ &\leq \chi_3 |Q_m(T^{-1}\xi)|^{(m-|\alpha|)/m} = \chi_3 |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Лемма 2.2 доказана.

Предложение 2.6. Если однородный многочлен P_m удовлетворяет неравенству (2.4), то для любого m_1 , $0 < m_1 < m$ существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$|P_m(\xi + \eta)| + \|\xi + \eta\|^{m_1} \leq \delta(|P_m(\xi)| + \|\xi\|^{m_1})$$

при

$$\|\eta\| \leq \frac{1}{2} \left(|P_m(\xi)|^{\frac{1}{m}} + \|\xi\|^{\frac{m_1}{m}} \right), \quad \|\xi\| \geq 1. \quad (2.5)$$

Доказательство. С некоторыми постоянными $c_1, c_2, c_3 > 0$ в силу леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} |P_m(\xi + \eta)| &\leq |P_m(\xi)| + c_1 \sum_{|\alpha| \geq 0} |D^\alpha P_m(\xi)| \frac{\|\eta\|^{|\alpha|}}{\alpha!} \leq \\ &\leq |P_m(\xi)| + c_2 \sum_{|\alpha| \geq 0} |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m} \left(|P_m(\xi)|^{\frac{|\alpha|}{m}} + \|\xi\|^{\frac{|\alpha|m_1}{m}} \right) \leq \\ &\leq c_3 \left[|P_m(\xi)| + \sum_{|\alpha| \geq 0} |P_m(\xi)|^{(m-|\alpha|)/m} \|\xi\|^{|\alpha|m_1/m} \right]. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера, отсюда для η , удовлетворяющей неравенству (2.5), получим

$$|P_m(\xi + \eta)| \leq c_4(|P_m(\xi)| + \|\xi\|^{m_1}), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

С некоторыми постоянными $c_5, c_6 > 0$ и при всех ξ, η , удовлетворяющих неравенству (2.5), получим

$$\|\xi + \eta\|^{m_1} \leq c_5(\|\xi\|^{m_1} + \|\eta\|^{m_1}) \leq c_6\|\xi\|^{m_1}.$$

Из этих двух неравенств немедленно следует предложение 2.6.

Лемма 2.3. Если многочлен $P(\xi) = \sum_{j=1}^m P_j(\xi)$, $P_j(\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ сильно гипозлиптичен, то неравенство (2.4) выполняется с некоторой постоянной $c > 0$.

Доказательство немедленно следует из леммы 1.4 и предложения 2.5.

Лемма 2.4. Пусть $P(\xi) \equiv P_m(\xi) + P_{m_1}(\xi) + R(\xi)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, где

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad R(\xi) = \sum_{|\alpha| < m_1} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad S(P_m) \cap S(P_{m_1}) = \emptyset, \quad m > m_1 > 0.$$

Для сильной гипозллиптичности многочлена P необходимо и достаточно выполнение условий (2.4) и

$$P(\xi) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|\xi\| \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Доказательство необходимости немедленно следует из леммы 2.3 и определения сильной гипозллиптичности. Для доказательства необходимости покажем, что

$$|P_m(\xi)| + |P_{m_1}(\xi)| \leq c(|P(\xi)| + 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.7)$$

где $c > 0$ — постоянная. Предположим обратное, что существует последовательность $\{\xi^s\}_1^\infty$, $\|\xi^s\| \rightarrow \infty$, для которой

$$\frac{|P(\xi^s)| + 1}{|P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Тогда для некоторой подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}$ (не умаляя общности, возьмем саму последовательность $\{\xi^s\}$)

$$\frac{\xi^s}{\|\xi^s\|} \rightarrow \tau \in S(P_m).$$

Из условия $P_{m_1}(\tau) \neq 0$, $\tau \in S(P_m)$ леммы и соотношения (2.6) следует, что $P_{m_1}(\tau)$ имеет тот же знак, что и $P(\xi)$ на бесконечности (пусть, ради определенности, положительный). В силу вещественности $P(\xi)$ и соотношения (2.6) $P_m(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. При достаточно больших s с некоторыми постоянными $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |P(\xi^s)| + 1 &\geq |P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)| - |(P - P_m - P_{m_1})(\xi^s)| = \\ &= |P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)| - |R(\xi^s)| \geq |P_m(\xi^s)| + c_1 \|\xi^s\|^{m_1} - c_2 \|\xi^s\|^{m_1-1} \geq \\ &\geq |P_m(\xi^s)| + c_3 \|\xi^s\|^{m_1} \geq c_4 [|P_m(\xi^s)| + |P_{m_1}(\xi^s)|]. \end{aligned}$$

Это противоречит соотношению (2.8) и доказывает неравенство (2.7). Теперь достаточность утверждения леммы немедленно следует из оценки (2.7) и предположений 2.6 и 2.4.

§3. ВИД СИЛЬНО ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Теорема 3.1. Пусть $Q(\xi_2, \dots, \xi_n)$ — гипоеллиiptический многочлен от $(n-1)$ переменных с вещественными коэффициентами. Тогда существует сильно гипоеллиiptический многочлен $P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ такой, что $P(0, \xi_2, \dots, \xi_n) = Q(\xi_2, \dots, \xi_n)$.

Доказательство. В силу условия теоремы для некоторого четного $m > 0$ имеем

$$|Q(\xi')|^{1/m} \sum_{|\alpha'| > 0} \left[\frac{|D^{\alpha'} Q(\xi')|}{|Q(\xi')|} \right]^{1/|\alpha'|} \leq \text{const} < \infty,$$

$$\alpha' = (\alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad Q(\xi') \neq 0.$$

Положим $P(\xi) = \theta \xi_1^m + Q(\xi')$, где

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{если } Q(\xi') \rightarrow +\infty \text{ при } \|\xi'\| \rightarrow \infty, \\ -1, & \text{если } Q(\xi') \rightarrow -\infty \text{ при } \|\xi'\| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Тогда с некоторыми постоянными $c_1, c_2, c_3 > 0$ и при достаточно больших ξ имеем

$$\begin{aligned} & |P(\xi)|^{1/m} \sum_{|\alpha| > 0} \left| \frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\alpha|} \leq \\ & \leq c_1 [|\xi_1| + |Q(\xi')|^{1/m}] \sum_{r=1}^m \sum_{\alpha_1=r=|\alpha'|} \left[\frac{|D_1^{\alpha_1} \xi_1^m| + |D^{\alpha'} Q(\xi')|}{|\xi_1|^m + |Q(\xi')|} \right]^{1/r} \leq \\ & \leq c_2 \sum_{r=1}^m \sum_{\alpha_1=r=|\alpha'|} \left[\frac{|D_1^{\alpha_1} \xi_1^m| + |D^{\alpha'} Q(\xi')|}{|\xi_1|^{m(1-\frac{r}{m})} + |Q(\xi')|^{1-\frac{r}{m}}} \right]^{1/r} \leq \\ & \leq c_2 \sum_{r=1}^m \sum_{\alpha_1=r=|\alpha'|} \left[\frac{m! |\xi_1|^{m-r}}{r! (|\xi_1|^{m-r} + |Q(\xi')|^{1-\frac{r}{m}})} + \frac{|D^{\alpha'} Q(\xi')|}{|\xi_1|^{m-r} + |Q(\xi')|^{1-\frac{r}{m}}} \right]^{1/r} \leq c_3 < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует утверждение теоремы 3.1.

Лемма 3.1. Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in A_k$ — многочлен порядка m , а $k, 1 \leq k \leq n$ — натуральное число. Тогда

$$|P(\xi', 0'')| \leq c[|P(\xi)| + 1], \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n),$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство. В силу сильной гипоеллиiptичности многочлена P с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем, что

$$|P(\xi)|^{1/m} \sum_{|\alpha|=m-1} \left[\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)|} \right]^{1/(m-1)} \leq c_1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Так как в силу условия $P \in A_k$

$$\sum_{|\alpha|=m} \gamma_\alpha \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=m} \gamma_{(\alpha', 0'')} (\xi')^{\alpha'},$$

то для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| = m - 1$ имеем

$$D^\alpha P(\xi) = D^\alpha P_m(\xi) + D^\alpha (P - P_m)(\xi) = D^\alpha P_m(\xi', 0'') + \text{const} = D^\alpha P(\xi', 0'') + \text{const}.$$

Поскольку однородный многочлен $R_m(\eta)$ может быть представлен в виде

$$R_m(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m-1} D^\alpha R_m(\eta) \eta^\alpha,$$

то в силу условия $P \in A_k$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi)| &\geq \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi', 0'')| \geq \\ &\geq \frac{c_2}{m} |P_m(\xi', 0'')|^{1/m} \geq \frac{c_2}{2m} |P(\xi', 0'')|^{1/m} - \text{const}. \end{aligned}$$

Из неравенства (3.1) получаем

$$c_1 \geq \frac{c_2}{2m} |P(\xi)|^{1/m} \left[\frac{|P(\xi', 0'')|^{1/m}}{|P(\xi)|} \right]^{1/(m-1)} - \text{const} \frac{|P(\xi)|^{1/m}}{|P(\xi)|^{1/(m-1)}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

откуда следует утверждение леммы, так как $|P(\xi)| \rightarrow \infty$ при $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Лемма 3.2. Пусть функция $h(\xi) > 0$, для которой $h(\xi + \eta) \geq \delta h(\xi)$ при $\|\eta\| \leq 1/2h(\xi)$, является весом гипоеллиптичности для многочлена P . Если для многочлена Q с некоторой постоянной $c > 0$ и числом $r > 0$

$$h^r(\xi) |Q(\xi)| \leq c[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то с некоторой, быть может другой, постоянной $c_1 > 0$

$$h^{|\alpha|+r}(\xi) |D^\alpha Q(\xi)| \leq c_1[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Доказательство. В силу оценки (3.3.7) работы [1] и предложения 2.1, настоящей заметки с некоторыми постоянными $c_2, c_3 > 0$ имеем

$$\begin{aligned} h^r(\xi) \tilde{Q}(\xi, h(\xi)/2) &\leq h^r(\xi) \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} |Q(\xi + \eta)| \leq c_2 \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} |h^r(\xi + \eta) Q(\xi + \eta)| \leq \\ &\leq c_2 c \sup_{\|\eta\| \leq h(\xi)/2} [|P(\xi + \eta)| + 1] \leq c_3 [|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Лемма 3.3. Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in A_k$ - многочлен порядка m , а k , $1 \leq k \leq n$ - натуральное число. Тогда для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $|\beta| > 0$ существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|Q_\beta(\xi)| \leq c[|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3.2)$$

где

$$Q_\beta(\xi) \equiv \sum_{\substack{\alpha \in (P) \\ \alpha' = \beta}} \gamma_{\alpha', \alpha''} (\xi')^{\alpha'} (\xi'')^{\alpha''}, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

Доказательство проведем методом индукции по $|\beta| \leq m$. При $|\beta| = m$ утверждение настоящей леммы совпадает с утверждением леммы 3.2. Пусть неравенство (3.2) верно при всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $1 < |\beta| = r \leq m$. Докажем его для $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $|\beta| = r - 1$. В силу сильной гипозэллиптичности многочлена P с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$|P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} \leq c_1 < \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как

$$P(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k} Q_\gamma(\xi),$$

то для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $P(\xi) \neq 0$

$$\begin{aligned} c_1 &\geq |P(\xi)|^{1/m} \left| \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k \\ \gamma \geq \beta}} \frac{D^\beta Q_\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} = \\ &= |P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \gamma \geq \beta} D^\beta Q_\gamma(\xi) + D^\beta Q_\beta(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} \geq \\ &\geq |P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{D^\beta Q_\beta(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} - \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^k, \gamma \geq \beta} \left| |P(\xi)|^{|\beta|/m} \frac{D^\beta Q_\gamma(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)}. \end{aligned}$$

В силу леммы 3.2 и нашего предположения с некоторой постоянной $c_2 > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{D^\beta Q_\beta(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/(r-1)} \leq c_2.$$

Поскольку

$$D^\beta Q_\beta(\xi) = \beta! \frac{Q_\beta(\xi)}{(\xi')^\beta},$$

то отсюда с некоторой постоянной $c_3 > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\frac{|P(\xi)|^{(r-1)/m}}{P(\xi)} \left| \frac{Q_\beta(\xi)}{(\xi')^\beta} \right| \leq c_3, \quad \xi_1, \dots, \xi_k \neq 0.$$

В силу непрерывности многочленов Q и P с некоторой постоянной $c_4 > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ отсюда имеем

$$|Q_\beta(\xi)| \leq c_4 |P(\xi)|^{1-(r-1)/m} (\xi')^\beta. \quad (3.3)$$

Так как из определения множества A и леммы 3.1

$$||\xi'|^m \leq c_5 [|P(\xi', 0'')| + 1] \leq c_5 [|P(\xi)| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то утверждение леммы немедленно следует из неравенства (3.3).

3.4. Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in A_k$ — многочлен порядка m , а k , $1 \leq k \leq n$ — натуральное число. Тогда с некоторой постоянной $c > 0$

$$|P(0', \xi'')| \leq c [|P(\xi)| + 1], \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

Доказательство немедленно следует из леммы 3.3 и неравенства треугольника, так как

$$P(0', \xi'') = P(\xi) - \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_+^k \\ \gamma > 0}} Q_\gamma(\xi),$$

где многочлены $Q_\gamma(\xi)$ определены выше.

Лемма 3.5. Пусть $P(\xi) \in A_k$ — многочлен с вещественными коэффициентами, а k , $1 \leq k \leq n$ — натуральное число. Тогда с некоторой постоянной $c > 0$

$$1 + |P(0', \xi'') + P(\xi', 0'')| \geq c [|P(0', \xi'') + P(\xi', 0'')|], \quad (3.4)$$

$$\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

Доказательство. Так как $P(\xi', 0'')$ эллиптичен относительно ξ' , а $P(0', \xi'')$ гипоеллиптичен относительно ξ'' и оба являются многочленами с вещественными

коэффициентами, то знаки на бесконечности они не меняют. Поэтому для доказательства неравенства (3.4) достаточно показать, что $P(\xi', 0'')P(0', \xi'') \geq 0$ при достаточно больших ξ', ξ'' . Пусть, наоборот, существуют последовательности $\{\xi'^s\}_1^\infty$ и $\{\xi''^s\}_1^\infty$, $\|\xi'^s\| \rightarrow \infty$, $\|\xi''^s\| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ такие, что

$$P(\xi'^s, 0'')P(0', \xi''^s) < 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Тогда в силу непрерывности и вещественности многочлена P существует последовательность $\{\tau^s\}_1^\infty$, для которой

$$\|\tau^s\| \geq \min(\|\xi'^s\|, \|\xi''^s\|), \quad P(\tau^s) = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Это противоречит гипозеллиптичности многочлена P . Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы 3.5.

Как показывает следующий пример, утверждение леммы 3.5 перестает быть справедливым для многочленов $P \in A$ с комплексными коэффициентами.

Пример. Пусть $P(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^4 + i\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^2$. Тогда $P \in A_1$, так как P семиэллиптичен, но соотношение

$$\frac{|P(\xi_1, 0)| + |P(0, \xi_2)|}{1 + |P(\xi_1, 0) + P(0, \xi_2)|}$$

неограничено на $\mathbb{R}^2$.

Лемма 3.6. Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \in A_k$ — многочлен порядка m , а $k, 1 \leq k \leq n$ — натуральное число. Тогда для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$ существует постоянная $c_\beta > 0$ такая, что

$$|\overline{Q}_\beta(\xi'')| \leq c_\beta [|P(0', \xi'')|^{1-|\beta|/m} + 1], \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}, \quad (3.5)$$

где

$$Q_\beta(\xi'') \equiv \sum_{\substack{\alpha \in (P) \\ \alpha' = \beta}} \gamma_\alpha (\xi'')^{\alpha''}, \quad \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n).$$

Доказательство. При достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|P(\xi)|^{1/m} \left| \frac{D^\beta P(\xi)}{P(\xi)} \right|^{1/|\beta|} \leq c.$$

Следовательно, при достаточно больших $\xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ имеем, что

$$|P(0', \xi'')|^{1/m} \left| \frac{D^\beta P(0', \xi'')}{P(0', \xi'')} \right|^{1/|\beta|} \leq c. \quad (3.6)$$

Так как $D^\beta P(0', \xi'') = \beta! \overline{Q}_\beta(\xi'')$, то неравенство (3.5) немедленно следует из соотношения (3.6).

Лемма 3.7. Пусть для многочлена $P(\xi)$ выполняются условия предыдущей леммы. Тогда для любого мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$ существует постоянная $c_\beta > 0$ такая, что

$$|\xi'|^\beta |\overline{Q}_\beta(\xi'')| \leq c_\beta [|P(\xi', 0'')| + |P(0', \xi'')| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно для $|\beta| = m$ и $\beta = 0$. Пусть $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$, $1 \leq |\beta| \leq m-1$. Тогда в силу неравенства

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (3.7)$$

имеем

$$\begin{aligned} |\xi'|^\beta |\overline{Q}_\beta(\xi'')| &\leq |\beta| \frac{m-|\beta|}{m} (|\xi'|^\beta)^{\frac{1}{|\beta|(m-|\beta|)}} + \frac{m-|\beta|}{m} |\overline{Q}_\beta(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}} \leq \\ &\leq |\beta| \frac{m-|\beta|}{m} \|\xi'\|^{\frac{m-|\beta|}{m-|\beta|}} + \frac{m-|\beta|}{m} |\overline{Q}_\beta(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (3.5) и учитывая, что $P(\xi', 0)$ эллиптически относительно ξ' , получим утверждение леммы.

Следствие 3.1. Пусть k , $1 \leq k \leq n$ - натуральное число, а $P(\xi) \in A_k$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$. Тогда с некоторой постоянной $c_\beta > 0$ и при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$c^{-1} [|P(0', \xi'')| + |P(\xi', 0'')|] \leq 1 + |P(\xi)| \leq c [|P(0', \xi'')| + |P(\xi', 0'')| + 1].$$

Лемма 3.8. Пусть k , $1 \leq k \leq n$ - натуральное число, $P(\xi')$ - многочлен порядка m , $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $R(\xi'')$ и $\overline{Q}(\xi'')$ - многочлены от ξ'' . Если для некоторого мультииндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^k$ и постоянной $c > 0$

$$|\xi'|^\beta |\overline{Q}(\xi'')| \leq c [|P(\xi')| + |R(\xi'')| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то с некоторой другой постоянной $c_1 > 0$

$$|\overline{Q}(\xi'')| \leq c_1[|R(\xi'')|^{1-\frac{|\beta|}{m}} + 1], \quad \xi'' \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Доказательство. Очевидно, $|\beta| \leq m$ и утверждение леммы при $|\beta| = m$ тривиально, ибо тогда $\overline{Q}(\xi'') \equiv \text{const}$. Пусть

$$\xi_1 = \dots = \xi_k = t|\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{1}{m-|\beta|}}, \quad 0 \leq |\beta| \leq m-1, \quad t > 0.$$

Тогда

$$|\xi'|^\beta |\overline{Q}(\xi'')| = t^{|\beta|} |\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{|\beta|}{m-|\beta|}+1} = t^{|\beta|} |\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}}$$

и, следовательно, с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$t^{|\beta|} |\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}} \leq c[|P(\xi')| + |R(\xi'')| + 1] \leq c_2[t^m |\overline{Q}(\xi'')|^{\frac{m}{m-|\beta|}} + |R(\xi'')| + 1].$$

Отсюда немедленно следует утверждение леммы 3.8.

Пусть B – некоторое множество из $\mathbb{Z}_+^k$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$.

Теорема 3.2. Пусть $\overline{Q}_\beta(\xi'')$, $\beta \in B$ – такие многочлены с постоянными коэффициентами, что для многочлена

$$P(\xi) \equiv \sum_{\beta \in B} |\xi'|^\beta \overline{Q}_\beta(\xi'')$$

выполнены следующие условия :

- I) $P(\xi', 0'')$ эллиптичен относительно ξ' ;
- II) $P(0', \xi'')$ гипозэллиптичен с весом $|P(0', \xi'')|^{1/m}$, $m = \text{ord } P$;
- III) с некоторой постоянной $c > 0$

$$1 + |P(\xi)| \geq \frac{1}{c} \sum_{\beta \in B} |\xi'|^\beta |\overline{Q}_\beta(\xi'')|,$$

$$|\overline{Q}_\beta(\xi'')| \leq c[|P(0', \xi'')|^{1-\frac{|\beta|}{m}} + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in B.$$

Тогда многочлен P сильно гипозэллиптичен.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|P(\xi)|^{|\alpha|/m} \frac{|D^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)|} \leq \text{const} < \infty.$$

Для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| > 0$ и при достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$

имеем

$$|P(\xi)|^{|\alpha|/m} \left| \frac{D^\alpha P(\xi)}{P(\xi)} \right| \leq \sum_{\substack{\beta \in B \\ \beta \geq \alpha'}} \frac{|D^{\alpha'}(\xi')^\beta D^{\alpha''} \bar{Q}_\beta(\xi'')|}{|P(\xi)|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}} \leq \\ \leq \frac{2}{c} \sum_{\substack{\beta \in B \\ \beta \geq \alpha'}} \frac{|D^{\alpha'}(\xi')^\beta| \cdot |D^{\alpha''} \bar{Q}_\beta(\xi'')|}{|P(0', \xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}} + |P(\xi', 0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}} \leq \frac{2}{c} \sum_{\substack{\beta \in B \\ \beta \geq \alpha'}} S_\beta,$$

где

$$S_\beta = \frac{||\xi''||^{|\beta|-|\alpha'|} |D^{\alpha''} \bar{Q}_\beta(\xi'')|}{|P(0', \xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}} + |P(\xi', 0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}}.$$

Так как при $|\alpha''| > m - |\beta|$ $D^{\alpha''} \bar{Q}_\beta(\xi'') = 0$, то

$$\sum_{\beta \in B, \beta \geq \alpha'} S_\beta = \sum_{\substack{\beta \in B, \beta \geq \alpha' \\ |\beta| \leq m - |\alpha''|}} S_\beta.$$

Применим неравенство (3.7). Для любых $\beta \in B$, $\alpha' \leq \beta$, $|\beta| \leq m - |\alpha''|$, постоянных $c_1, c_2 > 0$ и достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$, из условий I), II) и лемм 3.2, 3.8 получим

$$S_\beta \leq \\ \leq c_1 \left[\frac{||\xi''||^{m-|\alpha'|}}{|P(0', \xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}} + |P(\xi', 0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}} + \frac{|D^{\alpha''} \bar{Q}_\beta(\xi'')|^{\frac{m-|\alpha|}{m-|\alpha''|-|\beta|}}}{|P(0', \xi'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}} + |P(\xi', 0'')|^{1-\frac{|\alpha|}{m}}} \right] \leq c_2.$$

Этим утверждение теоремы 3.2 доказано.

Следствие 3.2. Многочлен R сильно гипозэллиптичен тогда и только тогда, когда существуют натуральное число k , $1 \leq k \leq n$ и линейное обратимое ограниченное отображение $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что для многочлена $P(\eta) = R(T\eta)$ выполнены следующие условия:

- i) $P(\xi', 0'')$ эллиптичен относительно ξ , $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$;
- ii) $P(0', \xi'')$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ является гипозэллиптичным многочленом с весом $|P(0', \xi'')|^{1/m}$, $m = \text{ord } P$;
- iii) для некоторой постоянной $c > 0$

$$c^{-1} \sum_{\alpha'} |\xi''|^{|\alpha'|} |\bar{Q}_{\alpha'}(\xi'')| \leq 1 + |P(\xi)| \leq c[|P(0', \xi'')| + |P(\xi', 0'')| + 1], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где многочлены $\bar{Q}_{\alpha'}(\xi'')$ определены выше.

Доказательство следует из теорем 1.1, 3.2 и лемм 3.3, 3.4.

ABSTRACT. The paper presents necessary and sufficient conditions for the strong hypoellipticity of polynomials with constant coefficients.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Мир, М., 1963.
2. Г. Г. Казарян, "О функциональном показателе гипоеллиптичности", Матем. Сборник, т. 11, стр. 339 – 356, 1985.
3. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 58 – 81, 1967.

19 марта 1996

Ереванский государственный университет