

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ РИСКА ОЦЕНОК ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ*

М. С. Гиновян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 5, 1996

Пусть $X(u)$ – стационарный гауссовский процесс со средним нуль, и спектральной плотностью $f(\lambda)$. Мы рассматриваем задачу непараметрического статистического оценивания линейного функционала $L(f)$ на основе выборки $\{X(u), 0 \leq u \leq T\}$. Для спектральных плотностей из гельдеровских классов и функций потерь $w(x)$, удовлетворяющих условию $0 \leq w(x) \leq C_1 \exp\{C_2|x|\}$ с положительными постоянными C_1 и C_2 , мы получаем асимптотические верхние границы для рисков $E\{w(|L_T - L(f)|)\}$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $X(u)$, $u \in U$ – центрированный стационарный гауссовский процесс, обладающий спектральной плотностью (с.п.) $f(\lambda)$, причем $f(-\lambda) = f(\lambda)$, $\lambda \in Q$. Рассматривается одновременно два случая: случай непрерывного параметра (н.п.), где $U = (-\infty, \infty)$, и случай дискретного параметра (д.п.), где $U = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. В случае н.п. областью изменения Q переменной λ является $Q = (-\infty, \infty)$, а в случае д.п. – $Q = [-\pi, \pi]$. В случае непрерывного параметра процесс $X(u)$ предполагается измеримым и среднеквадратично непрерывным.

В настоящей работе мы рассматриваем следующую общую задачу непараметрического статистического оценивания (ср. с [6] – [9], [12]). Пусть нам известна частная реализация $X_T = \{X(u), 0 \leq u \leq T$ (или $u = \overline{1, T}$ в случае д.п.)} процесса $X(t)$ с неизвестной спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in Q$. Пусть $L(\cdot)$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_p = L_p(Q)$, $p > 1$. Задача

*Статья написана при частичной финансовой поддержке АО "Прометевс"

состоит в оценивании значения $L(f)$ на основе наблюдения X_T при условии, что с.п. $f(\lambda)$ принадлежит заданному множеству Σ спектральных плотностей.

Предположим, что функционал $L(\cdot)$ непрерывен в $L_p(Q)$, $p > 1$. Как известно (см., например, [16]), такой функционал допускает представление

$$L(f) = \int_Q f(\lambda)g(\lambda)d\lambda, \quad (1)$$

где $g(\lambda) \in L_q(Q)$; $1/p + 1/q = 1$ и $\|L\| = \|g\|_q$. Здесь и ниже $\|\cdot\|_q$ обозначает L_q -норму. Обозначим через $H_p(\beta)$, $\beta = \alpha + \tau$, $0 < \alpha < 1$, $\tau \in N$ гельдеровский класс функций, т.е. класс тех функций $\psi(\lambda) \in L_p$, которые имеют τ -ые производные в L_p и удовлетворяют условию

$$\|\psi^{(\tau)}(\cdot + h) - \psi^{(\tau)}(\cdot)\|_p \leq C|h|^\alpha. \quad (2)$$

(Здесь и всюду ниже буквой C будем обозначать различные положительные постоянные).

Обозначим через $\Sigma_p(\beta)$ множество всех спектральных плотностей, принадлежащих пространству $H_p(\beta)$, а через W — множество всех симметрических, неубывающих на положительной полуоси функций потерь $w: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих условию: $0 \leq w(x) \leq C_1 \exp\{C_2|x|\}$ для некоторых положительных постоянных C_1 и C_2 . Обозначим через $L_T = L_T(X_T)$ статистическую оценку функционала $L(f)$, построенную на основе наблюдения X_T . Отметим, что в качестве статистической оценки для $L(f)$ можно выбрать любое измеримое отображение $L_T: \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}^1$. Качество оценки L_T функционала $L(f)$ мы измеряем величиной

$$\Delta_T(L_T, f) = E_f\{w(|L_T - L(f)|)\},$$

где $E_f\{\cdot\}$ обозначает математическое ожидание относительно меры, порожденной спектральной плотностью f . Пусть Δ_T обозначает минимаксный риск статистической оценки L_T , т.е.

$$\Delta_T = \sup_{\|L\|=1} \inf_{L_T} \sup_{f \in \Sigma} E\{w(|L_T - L(f)|)\}.$$

В настоящей работе мы получаем асимптотические верхние границы для рисков Δ_T при $T \rightarrow \infty$. Эти границы зависят от свойств функционала $L(f)$ и множества

Σ. Отметим, что в случае квадратичной функции потерь эта задача была рассмотрена автором в работе [8], аналогичная задача для плотности распределения была рассмотрена И. А. Ибрагимовым и Р. З. Хасьминским в работе [14].

§1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим статистическую оценку $L_{T,A}$ линейного функционала $L(f)$ (ср. [2], [6] – [9], [14]) :

$$L_{T,A} = \int_Q I_T(\lambda) g_A(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где $A = A(T) \leq T$, $A(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, $g_A(\lambda)$ – сингулярный интеграл Дирихле, соответствующий функции $g(\lambda)$ (см. формулу (5) ниже), а $I_T(\lambda)$ – так называемая *периодограмма* процесса $X(u)$:

$$I_T(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{u=1}^T X(u) e^{-iu\lambda} \right|^2, & \text{в случае д.п.,} \\ \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T X(u) e^{-iu\lambda} du \right|^2, & \text{в случае н.п..} \end{cases}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. Пусть функционал $L(f)$ непрерывен в L_p , и пусть $\Sigma = \Sigma_p(\beta)$. Тогда для любой функции потерь $w(x) \in W$ существует значение A такое, что справедливы следующие утверждения :

А) если $p \geq 2$ и $\beta > 1/p$, то

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{f \in \Sigma} E_f \left\{ w \left(T^{\frac{\beta}{p-1+\beta p}} |L_{T,A} - L(f)| \right) \right\} < \infty; \quad (4)$$

Б) если либо $p \geq 2$ и $\beta \leq 1/p$, либо $1 < p \leq 2$ и $\beta > 1/2$, то

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{f \in \Sigma} E_f \left\{ w \left(T^\beta |L_{T,A} - L(f)| \right) \right\} < \infty;$$

В) если $1 < p \leq 2$ и $\beta \leq 1/2$, то

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{f \in \Sigma} E_f \left\{ w \left(T^{1/2} |L_{T,A} - L(f)| \right) \right\} < \infty.$$

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты, относящиеся к сингулярным интегралам Дирихле, и норм Шаттена

усеченных теплицевых операторов (или теплицевых матриц). Обозначим через $\psi_A(\lambda)$ сингулярный интеграл Дирихле, определенный для функции $\psi(\lambda) \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ следующим образом :

$$\psi_A(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin A(\lambda-x)}{\sin(\lambda-x)} \psi(x) dx & \text{при } \lambda \in [-\pi, \pi] \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin A(\lambda-x)}{\lambda-x} \psi(x) dx & \text{при } \lambda \in \mathbb{R}^1. \end{cases} \quad (5)$$

Перечислим некоторые свойства функции $\psi_A(\lambda)$.

а1) Пусть $\psi(\lambda) \in H_p(\beta)$, $1 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда

$$\|\psi_A\|_p \leq C(p) \|\psi\|_p \quad \text{и} \quad \|\psi - \psi_A\|_p \leq C(p, \beta, M) A^{-\beta}.$$

б1) Пусть $\psi(\lambda) \in L_p$, $p \geq 1$. Тогда

$$\|\psi_A\|_q \leq 2 A^{1/p-1/q} \|\psi_A\|_p, \quad \text{где } p < q \leq \infty.$$

в1) Пусть $\psi(\lambda) \in H_p(\beta)$, $p \geq 1$ с $0 < \beta \leq 1/p$ и $p < p_1 < p/(1-\beta p)$. Тогда

$$\psi(\lambda) \in H_{p_1}(\beta - \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}).$$

г1) Пусть $\psi(\lambda) \in H_p(\beta)$, где $p \geq 1$ и $\beta > 1/p$. Тогда $\psi(\lambda)$ непрерывна и $\|\psi\|_{\infty} < \infty$.

д1) Пусть $\psi(\lambda) \in H_p(\beta)$, $p \geq 1$, $\beta > 0$, $q > p$ и $\beta \neq 1/p - 1/q$. Тогда

$$\|\psi_A\|_q \leq C \cdot \max\{1; A^{1/p-1/q-\beta}\}.$$

Доказательства утверждений а1) – г1) можно найти в монографии Никольского [15], а доказательство утверждения д1) – в работе [14].

Обозначим через $\{s_j(B)\}_{j \geq 1}$ множество сингулярных значений компактного оператора B , т.е. множество собственных значений оператора $K = (B^* B)^{1/2}$, где B^* – сопряженный к B . Для числа p , $1 \leq p \leq \infty$ p -норма Шаттена компактного оператора B определяется формулой

$$\|B\|_p = \begin{cases} (\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(B))^{1/p}, & \text{при } 1 \leq p < \infty \\ \sup_j s_j(B), & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Для $1 \leq p \leq \infty$ через $\mathcal{S}_p$ обозначим класс всех компактных операторов B , для которых $\|B\|_p < \infty$. Перечислим некоторые свойства классов $\mathcal{S}_p$.

a2) $\| \text{tr} [B] \| \leq \| B \|_1$, причем знак равенства достигается при неотрицательном B , где $\text{tr}[B]$ обозначает след оператора B .

б2) Если $B_j \in \mathcal{S}_{p_j}$, $p_j \geq 1$, $j = \overline{1, n}$ и $p^{-1} = \sum_{k=1}^n (p_k)^{-1} \leq 1$, то $B = B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{S}_p$, и

$$\| B \|_p \leq \| B_1 \|_{p_1} \cdot \dots \cdot \| B_n \|_{p_n}$$

в2) $\| B \|_\infty = \| B \|$, где $\| B \|$ — операторная норма B , т.е.

$$\| B \| = \sup_{\| u \|_2=1} |(Bu, u)|.$$

Доказательства можно найти в монографии Гохберга и Крейна [10], стр. 120 – 122 и стр. 135.

Пусть $\psi(\lambda)$ — 2π -периодическая функция класса $L_1(-\pi, \pi)$, и пусть

$$\hat{\psi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} \psi(\lambda) d\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

— ее коэффициенты Фурье. Матрицы

$$B_T(\psi) = \|\hat{\psi}_{k-j}\|_{k,j=\overline{0,T}}, \quad T = 0, 1, \dots,$$

называются *теплицевыми матрицами*, порожденными функцией $\psi(\lambda)$. Усеченный теплицев оператор $B_T(\psi)$, порожденный функцией $\psi(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$, определяется следующим образом : для $u(\lambda) \in L_2[0, T]$

$$B_T(\psi)u(\lambda) = \int_0^T \hat{\psi}(\lambda - \mu) u(\mu) d\mu,$$

где $\hat{\psi}(\cdot)$ — преобразование Фурье функции $\psi(\cdot)$. Нормы Шаттена усеченных теплицевых матриц и операторов удовлетворяют следующим неравенствам, справедливым для $\psi(u) \in L_1 \cap L_p$ и $1 \leq p < \infty$:

$$\text{a3) } \| B_T(\psi) \|_p \leq \| \psi \|_p T^{1/p}.$$

$$\text{б3) } \| B_T(\psi) \|_\infty \leq 2 \| \psi \|_p T^{1/p}.$$

Доказательство утверждения а3) можно найти в [1] (для теплицевых матриц) и в [8] (для усеченных теплицевых операторов), доказательство же б3) — в [2], [6] и [7].

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Мы докажем только утверждение А) теоремы, утверждения Б) и В) доказываются аналогично. Начнем с двух лемм.

Лемма 1. Пусть $f \in \Sigma_p(\beta)$, $\beta > 0$, $p > 1$ и $g \in L_q$, $1/p + 1/q = 1$. Тогда

$$E|L_{T,A} - L(f)| \leq C A^{-\beta} + \begin{cases} CT^{-\beta} & \text{при } \beta < 1 \\ CT^{-1} \ln T & \text{при } \beta = 1 \\ CT^{-1} & \text{при } \beta > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство можно найти в [8].

Обозначим через $|\text{Cum}_k(L_{T,A})|$ кумулянт(семинвариант) порядка k случайной величины $L_{T,A}$.

Лемма 2. Пусть $f \in \Sigma_p(\beta)$, $p \geq 2$, $\beta > 1/p$ и $g \in L_q$, причем $1/p + 1/q = 1$. Тогда для всех $k = 3, 4, \dots$

$$|\text{Cum}_k(L_{T,A})| \leq (k-1)! D(L_{T,A}) \left(\|f\|_\infty \|g\|_q T^{-1} A^{\frac{1}{q}} \right)^{k-2}, \quad (7)$$

где $D(L_{T,A})$ — дисперсия случайной величины $L_{T,A}$.

Доказательство. Хорошо известно (см. [2], [11], [13]), что

$$\text{Cum}_k(L_{T,A}) = T^{-k} 2^{k-1} (k-1)! \text{tr}[B_T(f) B_T(g_A)]^k. \quad (8)$$

Из утверждений в2), а3) и б1) следует, что

$$\|B_T(g_A)\|_\infty \leq \|g_A\|_\infty \leq 2A^{\frac{1}{q}} \|g_A\|_q. \quad (9)$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} |\text{tr}[B_T(f) B_T(g_A)]^k| &\leq \|B_T(f) B_T(g_A)\|_1^k && (\text{в силу а2)}) \\ &\leq \|B_T(f) B_T(g_A)\|_1^2 \cdot \|B_T(f) B_T(g_A)\|_\infty^{k-2} && (\text{в силу б2)}) \\ &\leq \text{tr}[B_T(f) B_T(g_A)]^2 \cdot \|B_T(f)\|_\infty^{k-2} \|B_T(g_A)\|_\infty^{k-2} && (\text{в силу а2) и б2)}) \\ &\leq \text{tr}[B_T(f) B_T(g_A)]^2 \cdot \left(\|f\|_\infty \|g_A\|_q A^{1/q} \right)^{k-2} && (\text{в силу б3) и (9)}). \end{aligned}$$

Учитывая утверждение а1) и равенство

$$D(L_{T,A}) = \frac{2}{T^2} \text{tr}[B_T(f) B_T(g_A)]^2, \quad (10)$$

получим (7).

Доказательство утверждения А) теоремы. Нетрудно убедиться, что соотношение (4) достаточно доказать для функций потерь вида

$$w(x) = \exp\{\pm cx\},$$

где c — положительная постоянная. Полагая $\gamma = \frac{p\beta}{p-2+2p\beta}$, мы можем написать

$$\begin{aligned} E_f \left\{ w \left(T^{-\frac{p\beta}{p-2+2p\beta}} |L_{T,A} - L(f)| \right) \right\} &= E_f \left\{ \exp\{\pm cT^\gamma |L_{T,A} - L(f)|\} \right\} \leq \\ &\leq \exp\{\pm cT^\gamma |E_f\{L_{T,A}\} - L(f)|\} E_f \left\{ \exp\{\pm cT^\gamma |L_{T,A} - E_f\{L_{T,A}\}|\} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, нам нужно доказать следующие два неравенства:

$$\exp\{\pm cT^\gamma |E_f\{L_{T,A}\} - L(f)|\} \leq C < \infty \quad (12)$$

и

$$E_f \left\{ \exp\{\pm cT^\gamma |L_{T,A} - E_f\{L_{T,A}\}|\} \right\} \leq C < \infty. \quad (13)$$

Неравенство (12) непосредственно вытекает из леммы 1. Действительно, полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, из леммы 1 получаем

$$|E_f\{L_{T,A}\} - L(f)| \leq CT^{-\frac{p\beta}{p-2+2p\beta}},$$

откуда немедленно следует (12).

Для доказательства неравенства (13) покажем, что в условиях утверждения А) имеет место неравенство

$$D(L_{T,A}) \leq CT^{-2p/(p-2+2p\beta)}. \quad (14)$$

Поскольку $\beta > 1/p$, то с учетом г1) имеем $\Sigma_p(\beta) \subset L_\infty$. Поэтому полагая $p_1 = \infty$, $p_2 = 2$ и последовательно применяя утверждения в2), в3) и (10), получим

$$\begin{aligned} D(L_{T,A}) &= 2T^{-2} \|B_T(f)B_T(g_A)\|_2^2 \leq \\ &\leq 2T^{-2} \|B_T(f)\|_\infty^2 \|B_T(g_A)\|_2^2 \leq CT^{-1} \|f\|_\infty^2 \|g_A\|_2^2. \end{aligned}$$

Поскольку $q = p/(p-1) \leq 2$, то из б1) имеем $\|g_A\|_2 \leq CA^{1/q-1/2} \|g\|_q$. Из г1) имеем $\|f\|_\infty < \infty$. Из последних двух неравенств получаем

$$D(L_{T,A}) \leq CT^{-1} A^{2/q-1}.$$

Полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, получим (14). Далее, полагая

$$\xi_{T,A} = T^{p/(p-2+2p\beta)} |L_{T,A} - E_f\{L_{T,A}\}|,$$

из леммы 2 и (14) имеем

$$|\text{Cum}_k(\xi_{T,A})| \leq C(k-1)! T^{-\frac{2p\beta}{(p-2+2p\beta)}} \left(\|f\|_\infty \|g\|_q T^{-1} A^{\frac{1}{q}} \right)^{k-2}.$$

Снова полагая $A = T^{p/(p-2+2p\beta)}$, прямыми вычислениями получим

$$|\text{Cum}_k(\xi_{T,A})| \leq C(k-1)! \left(\|f\|_\infty \|g\|_q T^{\frac{-p\beta+1}{(p-2+2p\beta)}} \right)^{k-2}.$$

Следовательно

$$|\text{Cum}_k(\xi_{T,A})| \leq \frac{(k-1)!}{\Delta^{k-2}}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (15)$$

где

$$\Delta = (\|f\|_\infty \|g\|_q)^{-1} T^{\frac{p\beta-1}{p-1+2\beta p}}.$$

Учитывая (15) (ср. [3]), имеем

$$\begin{aligned} E_f \{ \exp \{ \pm c T^\gamma |L_{T,A} - E_f \{L_{T,A}\}| \} \} &= E_f \{ \exp \{ \pm c \xi_{T,A} \} \} \leq \\ &\leq 2 \exp \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} |\text{Cum}_k(\xi_{T,A})| \frac{|c|^k}{k!} \right\} \leq 2 \exp \left\{ c^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{c}{\Delta} \right)^{k-2} \right\}. \end{aligned}$$

Так как по предположению $p \geq 2$ и $\beta \geq 1/p$, то $\Delta^{-1} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Следовательно, для всех достаточно больших T имеем

$$E_f \{ \exp \{ \pm c T^\gamma |L_{T,A} - E_f \{L_{T,A}\}| \} \} \leq 2 \exp \{ C c^2 \} < \infty,$$

откуда следует (13). Доказательство завершено.

Автор выражает благодарность рецензенту и редактору за полезные замечания.

ABSTRACT. Let $X(u)$ be a zero mean real-valued stationary Gaussian process in continuous or discrete time u , possessing a spectral density $f(\lambda)$. We consider the problem of nonparametric statistical estimation of a linear functional $L(f)$ on the basis of a sample $\{X(u), 0 \leq u \leq T\}$. For spectral densities from Hölder classes and loss functions $w(x)$ satisfying $0 \leq w(x) \leq C_1 \exp\{C_2|x|\}$ with positive constants C_1 and C_2 , we obtain asymptotic upper bounds for the risks $E\{w(|L_T - L(f)|)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Avram, "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", *Probab. Theor. Rel. Fields*, vol. 79, pp. 37 – 45, 1988.
2. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, "Большие отклонения для оценок спектра стационарной гауссовской последовательности", *Литовск. Матем. Сб.*, т. 16, стр. 63 – 77, 1976.
3. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, "Об экспоненциальных оценках распределения случайных величин", *Литовск. Матем. Сб.*, т. 20, стр. 15 – 30, 1980.
4. Р. Бенткус, Р. Рудзкис, В. Статулявичус, "Экспоненциальные неравенства для оценок спектра гауссовских стационарных временных рядов", *Литовск. Матем. Сб.*, т. 15, стр. 25 – 39, 1975.
5. P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation I*, Birkhäuser, Basel, 1971.
6. М. С. Гиновян, "Асимптотически эффективное непараметрическое оценивание функционалов от спектральной плотности, имеющей нули", *Теория вероятн. и ее примен.*, т. 33, вып. 2, стр. 315 – 322, 1988.
7. М. С. Гиновян, "Об оценке значения линейного функционала от спектральной плотности гауссовского стационарного процесса", *Теория вероятн. и ее примен.*, т. 33, вып. 4, стр. 777 – 781, 1988.
8. M. S. Ginovian, "On Toeplitz type quadratic functionals of stationary Gaussian process", *Probab. Theory and Rel. Fields*, vol. 100, pp. 395 – 406, 1994.
9. М. С. Гиновян, "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", *Изв. НАН Армении, Математика*, т. 30, № 1,

стр. 3 – 20, 1995.

10. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Наука, М., 1965.
11. U. Grenander, G. Szegö, Toeplitz Forms and Their Applications, Univ. of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1958.
12. R. Z. Has'minski, I. A. Ibragimov, "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals of spectral density function", Probab. Theory. Rel. Fields, vol. 73, pp. 447 – 461, 1986.
13. И. А. Ибрагимов, "Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса", Теория вероятн. и ее примен., т. 8, вып. 4, стр. 391 – 430, 1963.
14. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, "Об оценке значения линейного функционала от плотности распределения", Зап. Научн. Семьян. ЛОМИ, т. 153, стр. 45 – 59, 1987.
15. С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, Наука, М., 1969
16. F. Riesz, B. Sz. Nagy, Lecons d'Analyse Fonctionnelle. Akademiai Kiado, Budapest, 1972.

15 августа 1996

Институт математики

НАН Армении

E-mail : mamgin@pnas.sci.am