

## ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА 2-МНОГООБРАЗИЯХ

Р. В. Амбарцумян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
том 31, №4, 1996

Семейство кривых  $\Gamma$  на двумерном многообразии называется семейством прегеодезических, если комбинаторное поведение этих кривых копирует хорошо известное поведение геодезических на поверхности. В статье определяется класс комбинаторных валюаций на  $\Gamma$ . Валюация зависит от функции  $F(s)$ , которая отображает прегеодезические отрезки в  $(-\infty, \infty)$ . Исследуется следующий вопрос: для каких функций  $F(s)$  эти валюации можно продолжить до знакопеременных мер на  $\Gamma$ ? В случае, когда продолжение существует и является неотрицательной мерой, функция  $F(s)$  оказывается метрикой, для которой  $\Gamma$  есть семейство геодезических. Это наблюдение связывает данную тематику с 4-ой проблемой Гильберта для семейства  $\Gamma$ . Неотрицательность продолжения (если последнее существует) гарантируется требованием, что индикатриса направлений  $F(s)$  в каждой точке многообразия выпукла. В статье получено дифференциальное уравнение, которое является необходимым и достаточным условием порождения знакопеременной меры. Подробно изучается случай круговой индикатрисы направлений (точечная изотропность  $F(s)$ ). Помимо результатов единственности, дано описание семейств прегеодезических в евклидовых плоских областях, которые допускают геодезическую интерпретацию относительно точно изотропной метрики.

### §0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $D$  — двумерное многообразие с границей  $\partial D$ , диффеоморфное замкнутому плоскому диску, и пусть  $\Gamma$  — семейство кривых на  $D$ , удовлетворяющих следующим аксиомам:

- 1) Каждая кривая  $\gamma \in \Gamma$  диффеоморфна замкнутому прямолинейному отрезку. Внутренность  $\gamma$  принадлежит  $\text{int}D$  и оба конца кривой  $\gamma$  лежат на границе  $\partial D$ .

2) Для любых двух различных точек в  $D$  существует *единственная* кривая  $\gamma \in \Gamma$ , содержащая эти две точки ; это свойство остается в силе, если одна или обе точки принадлежат границе  $\partial D$ .

3) В каждой точке  $P \in D$  существует только одна кривая  $\gamma \in \Gamma$ , содержащая точку  $P$  и имеющая в точке  $P$  данное направление касательной.

Если условия 1), 2) и 3) выполнены, мы называем  $\Gamma$  семейством *прегеодезических* кривых или просто прегеодезическими. Вторая часть условия 2) постулирует существование *концевого отображения*, которое переводит каждую прегеодезическую  $\gamma$  в неупорядоченную пару ее концов.

Отображение, обратное к конечному, переводит каждую неупорядоченную пару различных точек на границе  $\partial D$  в соответствующую кривую  $\gamma$ . Это отображение определяет топологию на  $\Gamma$ , делая это пространство гомеоморфным обычному *открытому листу Мебиуса*. Последняя совпадает с топологией на  $\Gamma$ , индуцированной из пространства замкнутых множеств в  $D$ .

Эти аксиомы соответствуют хорошо известному локальному поведению геодезических кривых на римановых многообразиях. В этой статье рассматриваются следующие вопросы : следует ли из свойств 1), 2), 3) существование метрики, определенной в  $D$ , для которой прегеодезические суть геодезические ? Каким образом можно описать все метрики, для которых данные прегеодезические являются геодезическими ? Какими индикатрисами могут обладать такие метрики ? (Например, римановы метрики определяются условием, что в каждой точке  $D$  индикатриса есть эллипс.) Последние два вопроса поставлены в стиле классической *4-ой проблемы Гильберта* : описать метрики на евклидовой плоскости, для которых евклидовы прямые служат геодезическими.

Известные результаты по упомянутой классической проблеме можно резюмировать так :

Теорема ([1] — [3]). *Каждой непрерывной псевдометрике  $F(P_1, P_2)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , для которой геодезические суть евклидовы прямые, соответствует единственная неотрицательная мера  $\mu$  в пространстве прямых на  $\mathbb{R}^2$  со свойствами*

$$\mu(\text{прямые, проходящие через точку } P) = 0, \quad P \in \mathbb{R}^2, \quad (0.1)$$

$$F(P_1, P_2) = \mu(\text{прямые, разделяющие } P_1 \text{ и } P_2), \quad P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2. \quad (0.2)$$

*Обратное утверждение также верно : каждая мера в пространстве прямых, удовлетворяющая условию (0.1), формулой (0.2) определяет псевдометрику на  $\mathbb{R}^2$ , для которой евклидовы прямые суть геодезические.*

Первый шаг, ведущий к распространению этого результата на пространства кривых, был сделан в [5]. В [5] было замечено, что комбинаторный подход допускает прямое обобщение вышеприведенной теоремы на геодезические на поверхности  $D \subset \mathbb{R}^3$  и метрики, индуцированные из  $\mathbb{R}^3$ , если внутри  $D$  эти геодезические обладают свойствами 1), 2), 3).

Применяемый ниже метод *флаговых плотностей* был использован в ([4], [7], [8]) для обычных прямых на евклидовой плоскости. В частности, в [7] было получено дифференциальное уравнение, являющееся необходимым и достаточным условием существования знакопеременной меры  $\mu$ , для которой (0.2) выполнено. При этом  $F$  должна принадлежать классу *линейно-аддитивных сегментных функций*. В [9] была сделана попытка решить возникающее дифференциальное уравнение. Настоящая статья использует ту же комбинаторную идею для прегеодезических кривых, вместе с методом продолжения знакопеременных мер, впервые использованном в [7].

Параграфы 1 — 3 посвящены предварительной комбинаторной работе с мерами на  $\Gamma$ , и мотивации построения в §4 основного объекта изучения : эйлеровой валюации на  $\Gamma$ . Эта валюация определяется на кольце  $U$  подмножеств

пространства  $\Gamma$ , которое мы называем *клеточным кольцом*.  $U$  есть аналог обычного выпуклого кольца в  $\mathbb{R}^2$ . (Прототипы кольца  $U$  ранее рассматривались в [5] и в главе 5 книги [6], а также в [7].) Эйлера валюация зависит и полностью определяется сегментной функцией  $F(s) = F(P_1, P_2)$ . Здесь и ниже  $s$  обозначает отрезок кривой  $\gamma \in \Gamma$ , а  $P_1, P_2$  суть концы отрезка  $s$ . Функция  $F(s)$  предполагается *аддитивной вдоль кривых* из  $\Gamma$ . Среди первых результатов — аналог второго утверждения приведенной выше теоремы для пространства  $\Gamma$ . Будем называть знакопеременную меру  $m$  на  $\Gamma$  *беспучковой*, если  $m([P]) = 0$  для каждой точки  $P \in D$ , где

$[P]$  = множество (пучок) кривых  $\gamma$ , проходящих через точку  $P$ .

Оказывается, что каждая беспучковая знакопеременная мера  $m$  на  $\Gamma$ , по формуле

$$F(P_1, P_2) = m(\text{кривые } \gamma, \text{ разделяющие } P_1 \text{ и } P_2) \quad (0.3)$$

определяет сегментную функцию  $F(s)$ , такую что соответствующая эйлера валюация задает значения меры  $m$  на кольце  $U$ .

Метрику, определенную на  $D$ , для которой кривые  $\gamma \in \Gamma$  суть геодезические, мы называем  $\Gamma$ -*метрикой*. Для того, чтобы получить  $\Gamma$ -метрику, достаточно в (0.3) выбрать  $m$  неотрицательной мерой на  $\Gamma$ . В §5 доказана теорема, утверждающая, что этим путем мы получаем все возможные  $\Gamma$ -метрики.

В §6 получено условие существования (единственного) продолжения заданной эйлеровой валюации, зависящей от гладкой, аддитивной сегментной функции  $F(s)$  до знакопеременной меры на  $\Gamma$ . Это условие мы называем свойством *сильной аддитивности* функции  $F(s)$ .

Согласно §5, из всякого условия, гарантирующего неотрицательность знакопеременной меры следует, что строго аддитивная  $F$  есть  $\Gamma$ -псевдометрика. В статье предполагаем, что  $F(s)$  есть интеграл от некоторой флаговой плотности с выпуклой индикатрисой направлений в каждой точке многообразия  $D$  (это

предполагает наличие т.н. стандартной длины на отрезках  $s$ ).

В §7, в терминах т.н. *стандартной*  $\Gamma$ -метрики, получено условие, локально эквивалентное условию строгой аддитивности. Это условие имеет вид дифференциального тождества для флаговой плотности и применяется ниже для анализа 4-ой проблемы Гильберта.

В §8 рассматриваются три "классических" случая : диск в евклидовой плоскости и евклидовы прямые ; диск на полусфере и большие круги ; диск в гиперболической плоскости и гиперболические прямые. В каждом из случаев, используя стандартные  $\Gamma$ -метрики, получены версии тождества из §7. Для каждого из трех случаев, имеет место результат единственности : *для того, чтобы получить  $\Gamma$ -метрику, радиус круговой индикатрисы должен быть постоянным.*

В параграфах 9 — 11 получено (Теорема 7) полное внутреннее описание семейств  $\Gamma$ , являющихся геодезическими для некоторой точечно изотропной метрики. Одно из двух эквивалентных условий формулируется как условие независимости пути некоторых интегралов кривизны.

## §1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ НАПРАВЛЕННЫХ ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Результат этого и следующего параграфов выводится методом, примененным в работе [5], стр. 21 — 25 для прямых на евклидовой плоскости. Доказательство разбивается на два этапа : интегрирование в пространстве *направленных* прегеодезических кривых (§1) и интегрирование полученного результата в пространстве  $\Gamma$  (§2). Целью является получение комбинаторного разложения, которое будет использовано для построения эйлеровых валюаций в параграфе 4.

Направленные версии кривых  $\gamma$  будем обозначать через  $\nu$ , а через  $\tilde{\Gamma}$  — пространство всех  $\nu$ . Каждой  $\gamma \in \Gamma$  соответствуют две кривые  $\nu \in \tilde{\Gamma}$ . Предположим, что на  $\partial D$  выбрано начало  $O$  и направление обхода. Координата  $x$  точки из  $\partial D$  измеряется длиной дуги от  $O$  в положительном направлении вдоль  $\partial D$ ,  $0 < x < H$ .

Каждой  $\nu \in \tilde{\Gamma}$  соответствует направленная пара  $(x_1, x_2)$ , где  $x_1$  — точка входа, а  $x_2$  — точка выхода направленной кривой  $\nu$ . Таким способом определяется конечное отображение :

$$\nu \rightarrow (x_1, x_2).$$

Возьмем  $n$  различных точек  $P_1, P_2, \dots, P_n \subset \text{int}D$  и рассмотрим кривые  $\nu$ , которые не содержат точек из множества  $\{P_i\}$ . Разбиение, порожденное кривой  $\nu \in \tilde{\Gamma}$  есть упорядоченная пара подмножеств  $\{P_i\}$ , принадлежащих различным компонентам  $D$  относительно  $\nu$ . Две кривые  $\nu_1$  и  $\nu_2$  из  $\tilde{\Gamma}$  эквивалентны, если они образуют одно и то же разбиение множества  $\{P_i\}$ . Класс эквивалентности называется атомом, если соответствующее разбиение не есть  $\{P_i\}, \emptyset$ .

**Определение 1.** Кольцом Сильвестра  $\tilde{S}\{P_i\}$  называется конечное кольцо подмножеств из  $\tilde{\Gamma}$ , порожденное атомами. (Обозначение подчеркивает зависимость кольца Сильвестра от выбора точек  $\{P_i\}$ ).

Заметим, что из  $\nu \in A \in \tilde{S}\{P_i\}$  следует, что  $\nu^* \in A$ , где  $\nu$  и  $\nu^*$  соответствуют одной и той же  $\gamma$ , но имеют противоположные направления. Нам понадобятся следующие два подмножества из  $\tilde{\Gamma}$  :

$$\tilde{\Gamma}_i^+ = \{\nu \in \tilde{\Gamma} : P_i \text{ лежит слева от } \nu\};$$

$$\tilde{\Gamma}_i^- = \{\nu \in \tilde{\Gamma} : P_i \text{ лежит справа от } \nu\};$$

Цель настоящего параграфа — вывод интегрального тождества для функций, определенных в пространстве  $\tilde{\Gamma}$ .

Пусть  $q(x_1, x_2)$  — интегрируемая функция, определенная на  $\partial D \times \partial D$ . Обозначим через  $dz$  меру на  $\partial D$ , соответствующую угловой мере на окружности. С помощью конечного отображения ей соответствует знакпеременная мера  $\tilde{m}$  на  $\tilde{\Gamma}$  :

$$\tilde{m}(A) = \int_A q(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

где  $A$  — борелевское множество в  $\tilde{\Gamma}$ .

Ниже в качестве  $A$  мы берем произвольный элемент кольца Сильвестра  $\tilde{S}\{P_i\}$ .

В оставшейся части параграфа будем предполагать, что

никакие три точки из множества  $\{P_i\}$  не лежат на одной кривой  $\gamma$ .

Это предположение позволяет обойти некоторые технические трудности, в дальнейшем оно будет опущено. Зафиксируем конечное множество  $\{P_i\} \subset \text{int } D$ . Для

любого  $x \in \partial D$  определим последовательность точек  $y_k(x) \in \partial D$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$

следующим образом :

$$\begin{cases} y_0(x) = ax, \\ y_k(x) \text{ точка выхода некоторой кривой } \nu(x, P_i), \quad k = 1, \dots, n, \\ y_{n+1}(x) = ax + H \equiv x, \end{cases}$$

где  $\nu(x, P_i)$  — единственная  $\nu$ -кривая с точкой входа  $x$ , проходящей через вну-

треннюю точку  $P_i$ . Предположим, что нумерация точек  $y_i(x)$  выбрана так, что

точка, движущаяся из  $x$  в положительном направлении вдоль  $\partial D$ , вначале встре-

чает  $y_1(x)$ , затем  $y_2(x)$  и т.д., по возрастанию индексов (см. Рис. 1). Отображение

$i \rightarrow k$  определяется для почти всех  $x \in \partial D$  и существенно зависит от  $x$ .

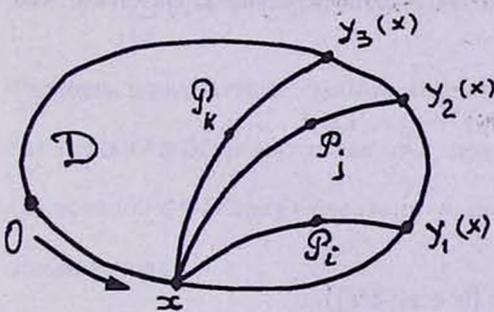


Рис. 1

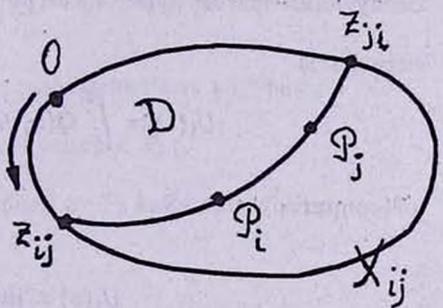


Рис. 2

Выберем множество  $A \in \tilde{S}\{P_i\}$  и применим теорему Фубини :

$$\tilde{m}(A) = \int_A q(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^H dx_1 \int_{x_1}^{x_1+H} I_A(x_1, x_2) q(x_1, x_2) dx_2, \quad (1.1)$$

где  $I_A(x_1, x_2)$  — индикатор (или характеристическая функция) множества  $A$  на

кривой  $(x_1, x_2)$ . Этот индикатор, припимающий значения 0 или 1, не меняется,

если  $x_1$  фиксирована, а  $x_2$  меняется внутри дуги  $(y_i(x_1), y_{i+1}(x_1))$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Следовательно, используя первообразную

$$Q(x, y) = \int_x^y q(x, x_2) dx_2,$$

внутренний интеграл в (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_x^{x+H} I_A(x, x_2) q(x, x_2) dx_2 &= \sum_{i=0}^n [Q(x, y_{i+1}(x)) I_A(x, (i+1)^+) - \\ &- Q(x, y_i(x)) I_A(x, i^-)] = \sum_{i=1}^n Q(x, y_i(x)) [I_A(x, i^+) - I_A(x, i^-)]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $I_A(x, i^+)$  обозначает предельную величину индикатора  $I_A(x, y)$ , если  $y \in \partial D$  аппроксимирует  $y_i(x)$ , так что  $P_i$  остается в левой половине  $D$ , ограниченной  $\nu(x, y)$ . Обозначение  $I_A(x, i^-)$  определяется аналогично. Так как  $A$  принадлежит  $\tilde{S}\{P_i\}$ , величины  $I_A(x, 0^-)$  и  $I_A(x, (n+1)^+)$  равны нулю. Это доказывает последнее равенство. Предыдущее равенство является фундаментальной теоремой анализа.

Следующим шагом будет интегрирование (1.2) относительно  $x$ . Заметим, что интегралы

$$U_i(z) = \int_0^z Q(x, y_i(x)) dx, \quad i = 1, \dots, n$$

интерпретируются как

$$U_i(z) = \tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{0 < x_1 < z\}).$$

Индикаторы  $I_A(x, i^+)$  и  $I_A(x, i^-)$ , представляющие функции от  $x$ , могут быть разрывными на тех значениях  $x$ , для которых точка  $P_j$ ,  $i \neq j$  лежит на прямой  $\nu(x, y_i(x))$ . Для каждой  $P_j$  существует в точности два таких значения  $x$ , которые мы обозначим через  $z_{i,j}$  и  $z_{j,i}$  (Рис. 2).

Будем считать, что  $z_{ij}$  — точка входа для  $\nu$ , проходящей от  $P_i$  к  $P_j$ , в то время как  $z_{ji}$  — точка входа на кривой  $\nu$  с обращенным направлением. По известной

теореме анализа

$$\int_0^H Q(x, y_i(x)) I_A(x, i^\pm) dx = \sum_j U_i(z_{i,j}) [I_A(i^\pm, j^+) - I_A(i^\pm, j^-)] + \sum_j U_i(z_{j,i}) [I_A(j^-, i^\pm) - I_A(j^+, i^\pm)]. \quad (1.3)$$

Символы  $I_A(i^\pm, j^\pm)$  обозначают постоянные значения  $I_A(\gamma)$  на четырех подмножествах малой окрестности  $\epsilon$  кривой  $\nu$  :

$$\epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^+ \cap \tilde{\Gamma}_j^+, \epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^- \cap \tilde{\Gamma}_j^-, \epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^+ \cap \tilde{\Gamma}_j^- \text{ и } \epsilon \cap \tilde{\Gamma}_i^- \cap \tilde{\Gamma}_j^+.$$

Рассмотрим целочисленные коэффициенты :

$$c_{ij}(A) = I_A(i^+, j^-) + I_A(i^-, j^+) - I_A(i^+, j^+) - I_A(i^-, j^-). \quad (1.4)$$

Так как для любой  $A \in \tilde{S}\{P_i\}$ , инвариантной относительно перемены направлений кривых  $\nu$  имеем  $c_{ji}(A) = c_{ij}(A)$ , результат подстановки (1.2) и (1.3) в (1.1) дает

$$\tilde{m}(A) = \sum_{i,j} [c_{ji}(A)U_i(z_{j,i}) - c_{ij}(A)U_i(z_{i,j})] = \sum_{i,j} c_{ij}(A) [U_i(z_{j,i}) - U_i(z_{i,j})]. \quad (1.5)$$

Разность в квадратных скобках имеет разные выражения для случаев :

- (а) точка  $O \in \partial D$  лежит слева от  $\nu$ , проходящей от  $P_i$  к  $P_j$  ;
- (б) точка  $O \in \partial D$  лежит справа от  $\nu$ , проходящей от  $P_i$  к  $P_j$  ;

Легко находим

$$U_i(z_{j,i}) - U_i(z_{i,j}) = \begin{cases} \tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{x_1 \in X_{ij}\}), & \text{в случае (а)} \\ -\tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{x_1 \in X_{ij}\}), & \text{в случае (б)} \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $X_{ij}$  — часть  $\partial D$  между  $z_{i,j}$  и  $z_{j,i}$  не содержащая  $O$ . Результат (1.5) — (1.6) содержит определенную симметрию, которая проявляется при его интерпретации для пространства  $\Gamma$ .

§2. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ  $\Gamma$ 

Рассмотрим отображение  $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ , соответствующее стиранию направления на кривых  $\nu$ . Образом  $\tilde{S}\{P_i\}$  будет кольцо Сильвестра  $S\{P_i\}$  подмножеств в пространстве  $\Gamma$ . Независимое определение  $S\{P_i\}$  мы получим, определив эквивалентные разбиения конечного множества точек  $\{P_i\}$  в  $D$  кривыми  $\gamma$ : для заданного множества  $\{P_i\}$ , две кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  из  $\Gamma$  эквивалентны, если они порождают одно и то же разбиение множества  $\{P_i\}$ . Класс эквивалентности является атомом, если соответствующее разбиение не есть  $\{P_i\}, \emptyset$ .

**Определение 2.** Для данного  $\{P_i\}$  кольцом Сильвестра  $S\{P_i\}$  называется конечное кольцо подмножеств  $\Gamma$ , порожденное атомами.

Отметим, что имеется естественное соответствие между элементами из  $S\{P_i\}$  и  $\tilde{S}\{P_i\}$ . Будем говорить, что атомы  $A \in \tilde{S}\{P_i\}$  и  $B \in S\{P_i\}$  соответствуют друг другу, если всякие  $\nu \in A$  и  $\gamma \in B$  порождают одинаковые разбиения множества  $\{P_i\}$ ; два элемента  $A \in \tilde{S}\{P_i\}$  и  $B \in S\{P_i\}$  соответствуют друг другу, если они образованы соответствующими атомами. Образ  $\tilde{m}$  при нашем отображении  $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  мы будем обозначать через  $m$ :

$$m(B) = \tilde{m}(A), \quad (2.1)$$

где  $B \subset \Gamma$  — борелевское множество и  $A \subset \tilde{\Gamma}$  — полный прообраз  $B$ . Заметим, что (2.1) имеет место, если  $A \in \tilde{S}\{P_i\}$  и  $B \in S\{P_i\}$  суть соответствующие множества. Итак, можно говорить об уравнении, дуальном к (1.5), (1.6) в пространстве  $\Gamma$ . Из последнего следует разложение мер на кольце Сильвестра в терминах их значений на "бюфоновых множествах". Для простоты предположим, что функция  $q(x_1, x_2)$  симметрична, т.е.  $q(x_1, x_2) = q(x_2, x_1)$ . Имеем

$$\tilde{m}(\tilde{\Gamma}_i^+ \cap \{x_1 \in X_{ij}\}) = \frac{1}{2} \begin{cases} m([P_i, z_{ji}]) + m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) & \text{в случае (a)} \\ m([P_i, z_{ij}]) + m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) & \text{в случае (b)}. \end{cases}$$

Обозначим через  $[Q_1, Q_2]$  бюфоновое множество

$$[Q_1, Q_2] = \{\gamma \in \Gamma: \gamma \text{ разделяет точки } Q_1, Q_2 \in D\}.$$

Следовательно, из (1.5), (1.6) вытекает

$$\begin{aligned} m(B) &= \sum_{\text{case (a)}} c_{ij}(A) \left[ \frac{1}{2} m([P_i, z_{ji}]) + \frac{1}{2} m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) \right] - \\ &- \sum_{\text{case (b)}} c_{ij}(A) \left[ \frac{1}{2} m([P_i, z_{ij}]) + \frac{1}{2} m(\{x_1, x_2 \in X_{ij}\}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{case (a)}} c_{ij}(A) [m([P_i, z_{ji}]) - m([P_j, z_{ji}])] = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(B) m([P_i, P_j]). \end{aligned}$$

Мы пришли (см. также [5], стр. 28) к следующему предварительному результату, полная версия которого есть Теорема 1 в §3.

Пусть  $m$  — беспучковая знакопеременная мера на  $\Gamma$ , обладающая суммируемой плотностью относительно квадрата стандартной меры на  $\partial D$ . Пусть  $\{P_i\} \subset D$  — конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной кривой  $\gamma$ . Для любого  $B \in S\{P_i\}$  имеет место разложение по бюффоновым множествам

$$m(B) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} c_{ij}(B) m([P_i, P_j]). \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $c_{ij}(B)$  не зависят от плотности меры  $m$  и задаются алгоритмом (1.4).

**Замечание 1.** Алгоритм (1.4) использует направленные кривые. Однако по симметрии, результат не зависит от выбора направлений.

### §3. ПЛОСКАЯ МОДЕЛЬ

Ввиду наличия концевое отображения, в качестве грубой модели пространства  $\bar{\Gamma}$  можно взять квадрат  $(0, H) \times (0, H)$ . Его треугольная часть, лежащая ниже диагонали  $x_1 = x_2$ , будет моделью семейства  $\Gamma$ . Для получения точной модели семейства  $\Gamma$  удалим из треугольника гипотенузу и три вершины. Оставшееся плоское множество обозначим через  $\Delta$ : каждая кривая  $\gamma \in \Gamma$  представляет собой точку в  $\Delta$  и наоборот. Чтобы сделать  $\Delta$  топологически эквивалентным  $\Gamma$ , отождествим точки катетов треугольника  $\Delta$  по способу Мёбиуса:  $(x, 0) \sim (H, x)$ . Заметим, что удаление гипотенузы делает  $\Delta$  некомпактным.

Настоящий параграф, помимо описания модели  $\Delta$ , содержит вывод представления типа (2.2), свободного от требования об "общем положении" точек  $\{P_i\}$  и существовании плотности.

**Кривые  $\alpha$  и  $\beta$  (пучки).**

Каждый пучок кривых  $\gamma$ , содержащих данную точку  $P \in \text{int}D$ , представляет собой кривую в  $\Delta$  (см. Рис. 3а)). Такие кривые обозначаем через  $\beta$ . Они образуют двухпараметрическое семейство кривых в  $\Delta$ . Согласно аксиоме 2, любая пара кривых  $\beta_1, \beta_2$  имеет ровно одну точку пересечения. Каждая  $\beta$  является замкнутой кривой, так как точки 1 и 1' идентичны. Катеты  $\Delta$  склеены по Мёбиусу, поэтому кривые  $\beta$  не делят  $\Delta$  на две компоненты.

Если  $P \in \partial D$ , то соответствующий пучок кривых  $\gamma$  представляет собой пару отрезков, один из которых параллелен оси  $x_1$ , а второй – оси  $x_2$  (см. Рис. 3а)). Отождествление точек 2 и 2' не даст замкнутую кривую, так как точка 3 не соответствует какой-либо кривой  $\gamma$ . Такие кривые обозначаем через  $\alpha$ . Заметим, что каждый катет треугольника  $\Delta$  соответствует пучку кривых  $\gamma$ , проходящих через  $O \in \partial D$ . Поэтому катеты можно рассматривать как  $\alpha$ -кривые.

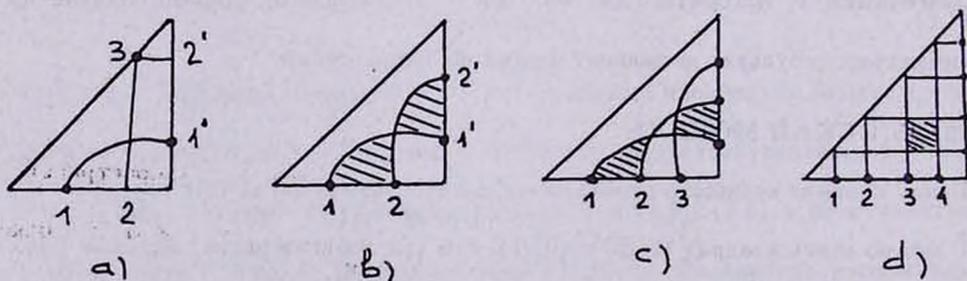


Рис. 3. Множества Бюффона б), Паша с) и Крофтона д) заштрихованы

**Двуугольники и бюффовы множества.**

*Двуугольником* называется открытая область в  $\Delta$ , ограниченная двумя кривыми  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (см. Рис. 3б)). Двуугольник может быть относительно компактным или

нет. Пусть  $P_1 \neq P_2 \in \text{int}D$ . Проходящие через эти точки пучки делят  $\Delta$  на два двуугольника, один из которых относительно компактен, а другой – нет.

*Бюффоново множество*

$$[P_1, P_2] = \{ \gamma \in \Gamma : \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2 \}$$

относительно компактно в  $\Gamma$ . Следовательно, в  $\Delta$  это множество изображается относительно компактным двуугольником. И наоборот, всякому относительно компактному двуугольнику соответствует бюффоново множество. Мы используем букву  $W$  для обозначения двуугольников. Если  $W$  относительно компактен, то мы называем его бюффоновым.

**Треугольники и множества Паша.**

Пусть  $P_1, P_2, P_3$  – три разные точки из  $\text{int}D$ . Соответствующие кривые  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  разбивают  $\Delta$  на четыре треугольные компоненты, лишь одна из которых не является относительно компактной (на Рис. 3с) она примыкает к гипотенузе). Три другие компоненты суть множества Паша: по определению, *множество Паша* есть относительно компактная часть  $\Delta$ , ограниченная дугами трех кривых типа  $\alpha$  либо  $\beta$ . Множества Паша будем обозначать через  $\tau$ . Заметим, что на диаграмме  $\Delta$  треугольник может изображаться состоящим из двух кусков. Однако в этом случае каждый кусок обязательно примыкает к катету, и склеивание восстанавливает связность. Термин *множества Паша* оправдывается их интерпретацией в пространстве  $\Gamma$ . Заданному множеству Паша  $\tau$  соответствуют  $P_1, P_2, P_3 \in \text{int}D$ , такие что

$$\tau = \{ \gamma : \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2 \text{ и } P_3 \}.$$

**Прямоугольники и множества Крофтона.**

*Прямоугольником* в  $\Delta$  называем область, ограниченную четырьмя кривыми типа  $\alpha$ . На диаграмме  $\Delta$  прямоугольник может изображаться евклидовым прямоугольником, как на Рис. 3d), или в виде двух кусков. В последнем случае отожде-

ствление катетов их склеивает. Если прямоугольник относительно компактен, то мы называем его *множеством Крофтона* и обозначаем через  $\kappa$ . Каждому  $\kappa$  одно-однозначным образом соответствует пара дуг  $a_1, a_2 \subset \partial D$  с разными замыканиями, так что

$$\kappa = [a_1, a_2] = \{\gamma : \gamma \text{ пересекает } a_1 \text{ и } a_2\}.$$

Каждому  $\kappa$  поставим в соответствие четыре  $\gamma$ -кривые  $d_1, d_2, s_1, s_2$  как показано на Рис. 4.

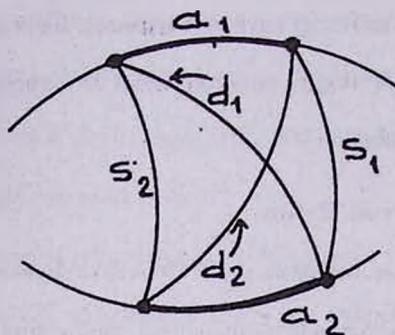


Рис. 4.

**Замечание 2.** Пучок  $[P]$  с  $\Gamma$  кривых, проходящих через точку  $P$  пересечения кривых  $d_1$  и  $d_2$ , как показано на Рис. 3d), делит соответствующее  $\kappa$  на два множества Паша. Мы используем это при доказательстве Леммы 2 в §6.

#### Кольцо и ячейки Сильвестра.

Пусть задано конечное множество точек  $\{P_i\} \subset \text{int} D$ . Рассмотрим соответствующие кривые  $\beta_i$ . Относительно компактные компоненты, на которые эти кривые делят  $\Delta$ , соответствуют атомам, а объединения этих компонент – элементам кольца  $S\{P_i\}$ . Атомы  $\beta$ -выпуклы, т.е. пересечение внутренности атома с любой кривой  $\beta$  либо пусто, либо является топологическим интервалом. Следовательно, образ атома  $A$  есть *относительно компактный  $\beta$ -выпуклый многоугольник* в  $\Delta$ . Такие множества назовем *ячейками* и обозначим через  $C$ .

Можно говорить о *сторонах* и *вершинах* ячейки  $C$ . Каждой вершине  $V$  соответствуют ровно два двуугольника, ограниченных  $\beta$ -кривыми, продолжающими

стороны  $C$  и пересекающимися в  $V$ . Двухугольник, для которого  $\text{int}C \cap W = \emptyset$ , называется *внешним*, а другой – *внутренним*. Один из двухугольников обязательно оказывается бюфоновым, а другой – нет. Условие, что никакие три точки из  $\{P_i\}$  не лежат на одной кривой  $\gamma$ , в дуальных терминах означает, что никакие три кривые  $\beta_i$  не проходят через одну точку в  $\Delta$ .

#### Представление ячеек бюфоновыми множествами.

Пусть задана ячейка  $C \subset \Delta$ . Результаты §2 могут быть применены к множеству  $A \subset \Gamma$ , которое определяется как образ  $C$  при обратном отображении  $\Delta \rightarrow \Gamma$ . Выберем точки  $\{P_i\}$  так, чтобы они соответствовали продолжениям  $\beta_i$  сторон ячейки  $C$ . Тогда условие общего расположения удовлетворено, и  $A$  оказывается атомом кольца  $S\{P_i\}$ . Коэффициенты  $c(A)$  в (1.4) имеют вид:  $c_{ij}(A) = 1$  или  $-1$ , если кривая  $\gamma$ , проходящая через  $P_i$  и  $P_j$ , соответствует вершине  $V_k$  ячейки  $C$ ; в противном случае  $c_{ij}(A) = 0$ . Если бюфонов двухугольник при  $V_k$  является внутренним для  $C$ , то  $c_{ij}(A) = 1$ , в противном случае  $c_{ij}(A) = -1$ .

#### Узлы, углы и струны.

Теперь существование представления  $m(A)$  через меры бюфоновых множеств для любых  $A \in S\{P_i\}$  следует простым суммированием. Однако это наблюдение не дает алгоритма вычисления коэффициентов разложения, сравнимого по ясности с (2.2) и годного для общих  $\{P_i\}$ . Получение отсутствующего алгоритма требует некоторых усилий.

Пусть  $\beta_i \in \Delta$  – кривые, соответствующие точкам  $P_i \in D$ . Через  $N_s$  обозначим узлы, т.е. точки в  $\Delta$ , где пересекаются две или более кривых  $\beta_i$ . Каждому узлу  $N_s$  соответствует множество углов  $\{K_{sr}\}$ : по определению,  $\{K_{sr}\}$  суть компоненты, на которые разбивается достаточно малая окрестность узла  $N_s$  кривыми  $\beta_i$ , проходящими через  $N_s$ .

Пусть  $C_i$  – ячейки, на которые  $\Delta$  разбивается кривыми  $\beta_i$ . Для любого  $C_i$

запишем (2.2) в виде, удобном для суммирования :

$$m(C_i) = \sum_{K_{sr}} I_{C_i}(K_{sr}) [I_{Bu_f}(W_{sr}) m(W_{sr}) - I_{Bu_f}(W_{sr}^c) m(W_{sr}^c)]. \quad (3.1)$$

Здесь  $W_{sr}$  – двуугольник, содержащий  $K_{sr}$  и ограниченный двумя кривыми  $\beta_i$ , которые образуют угол  $K_{sr}$ , а  $W_{sr}^c$  – его дополнение. Отметим, что *всякому двуугольнику  $W_{sr}$  принадлежат ровно два угла из  $N_s$* . Мы пользуемся индикаторными обозначениями :

$I_{Bu_f}(W_{sr}) = 1$ , если  $W_{sr}$  бюфонов, и 0 – в противном случае,

$I_{C_i}(K_{sr}) = 1$ , если  $K_{sr} \subset C_i$ , и 0 – в противном случае.

Доказательство нижеследующей Теоремы 1 основано на суммировании формулы (3.1). Нам потребуются следующие геометрические термины.

Подмножество  $\sigma$  точек из  $\{P_i\} \subset D$  называется *струной* тогда и только тогда, когда

- 1)  $\sigma$  принадлежит одной кривой  $\gamma$ , называемой *носителем* струны ;
- 2) число точек в  $\sigma$  больше, чем одна ;
- 3) носитель не содержит других точек из  $\{P_i\}$ .

Для данной струны  $\sigma$  определим точки  $1(\sigma), 2(\sigma) \in \sigma$  тем условием, что отрезок  $1(\sigma), 2(\sigma)$  носителя содержит все остальные точки из  $\sigma$ . 2-подмножество  $\{P_i, P_j\} \subset \{P_i\}$  обозначаем через  $\delta$ , если  $\gamma$ -отрезок  $P_i, P_j$  не содержит других точек из  $\{P_i\}$ . Точки, входящие в  $\delta$ , обозначаем  $1(\delta)$  и  $2(\delta)$ .

Ясно, что каждому узлу  $N_s$  отвечает струна и наоборот : при этом носителю соответствует сама  $N_s$ , а точки  $P_i$  струны соответствуют кривым  $\beta_i$ , пересекающимся в  $N_s$ . Бюфоновы двуугольники из  $\{W_{sr}\}$  соответствуют 2-множествам  $\delta$ . Для данного узла (струны)  $N_s = \sigma$  среди двуугольников  $W_{sr}$  только один небюфонов. Он представляет собой разность {множество кривых  $\gamma$ , пересекающих носитель струны  $\sigma$ }  $\setminus$   $[1(\sigma), 2(\sigma)]$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\{P_i\} \subset D$  – конечное множество точек и  $m$  – локально

конечная знакопеременная мера на  $\Gamma$ , для которой

$$m([P_i]) = 0 \quad \text{для любого } P_i \text{ из заданного множества.}$$

Для всякого  $B \in S\{P_i\}$  имеет место разложение

$$2m(B) = \sum_{\delta} c(\delta; B) m([1(\delta), 2(\delta)]) - \sum_{\sigma} c(\sigma; B) m([1(\sigma), 2(\sigma)]), \quad (3.2)$$

где первое суммирование ведется по всем 2-подмножествам  $\delta$ , а второе — по всем струнам  $\sigma$  из  $\{P_i\}$ . Коэффициенты  $c(\delta; B)$  и  $c(\sigma; B)$  не зависят от знакопеременной меры  $m$  и вычисляются по формуле

$$c(\delta; B) = I_B(1^+, 2^-) + I_B(1^-, 2^+), \quad (3.3)$$

$$c(\sigma; B) = I_B(1^+, 2^+) + I_B(1^-, 2^-), \quad (3.3')$$

где числа 1, 2 обозначают (срав. с (1.4)) соответственно точки  $1(\delta), 2(\delta)$  в (3.3) или  $1(\sigma), 2(\sigma)$  в (3.3').

Доказательство: Если знакопеременная мера  $m$  имеет плотность относительно меры  $dx_1 dx_2$ , т.е. принадлежит классу, для которого (3.1) уже доказана, то утверждение получается суммированием формул (3.1), записанных для атомов (ячеек)  $C_i$ , лежащих в  $B$ . Используя аддитивность индикаторов, получаем

$$m(B) = \sum_{K_{sr}} I_B(K_{sr}) [I_{B_{uf}}(W_{sr}) m(W_{sr}) - I_{B_{uf}}(W_{sr}^c) m(W_{sr}^c)]. \quad (3.4)$$

В (3.4) общий вклад углов  $K_{sr}$ , для которых  $W_{sr}$  бюфонов, равен первой сумме правой части (3.2). Аналогично, общий вклад углов  $K_{sr}$ , для которых  $W_{sr}$  небюфонов, равен второй сумме правой части (3.2). Остается доказать (3.2) для случаев, когда мера  $m$  не имеет плотности. Сначала покажем справедливость (3.2) для мер  $m$  вида  $m(A) = I_A(\gamma)$ , где  $I_A(\gamma)$  — индикаторная функция борелевского  $A \subset \Gamma$ ; кривую  $\gamma$ , играющую роль параметра, выбираем так, чтобы она не

проходила через точки  $P_i$ . Доказательство получается аппроксимацией индикаторной меры последовательностью мер  $m_n$ , имеющих плотности. Запишем (3.2) для мер  $m_n$  и заметим, что условие на выбор  $\gamma$  обеспечивает существование пределов  $m_n([1(\delta), 2(\delta)])$  и  $m_n([1(\sigma), 2(\sigma)])$ . Следовательно, в (3.2) можно заменить  $m(A)$  на  $I_A(s)$ . Получим тождество по  $\gamma$ , справедливое с точностью до пучков, проходящих через точки  $P_i$ . Для общей знакопеременной меры  $m$ , удовлетворяющей условиям Теоремы 1, утверждение теоремы получается интегрированием этого линейного тождества относительно  $m$ . Доказательство закончено.

Приведем три простейших случая формулы (3.2), используемых в дальнейшем.

1)  $B = [P_1, P_2]$  (бюффоновое множество). Правая часть (3.2) приводится к виду  $2m([P_1, P_2])$ .

2)  $B = \tau$  (множество Паша),  $\tau = \{\gamma : \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2 \text{ и } P_3\}$  :

$$2m(\tau) = m([P_1, P_2]) + m([P_1, P_3]) - m([P_2, P_3]). \quad (3.5)$$

3)  $B = \kappa$  (множество Крофтона). Получаем формулу Крофтона (см. Рис. 4) :

$$2m(\kappa) = m([d_1]) + m([d_2]) - m([s_1]) - m([s_2]). \quad (3.6)$$

#### §4. ВАЛЮАЦИЯ ЭЙЛЕРА

Два множества  $B_1, B_2 \subset \Gamma$  назовем *эквивалентными*, если их симметричная разность  $(B_1 \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap B_2)$  может быть покрыта конечным числом пучков  $\beta_i$  или  $\alpha_i$ . В настоящем параграфе вместо конкретных множеств  $B \subset \Gamma$  рассматриваются соответствующие классы эквивалентности  $B^*$ . Заметим, что обычные понятия *объединения, пересечения, пустого множества* распространяются и на рассматриваемые классы эквивалентности. Например, имеем

$$B_1^* \cup B_2^* = (B_1 \cup B_2)^*.$$

Однако ниже мы предпочитаем вместо  $B^*$  писать просто  $B$ . Это упрощает обозначения и не приводит к недоразумениям.

Определение 3. Кольцо подмножеств пространства  $\Gamma$

$$U = \bigcup S\{P_i\},$$

где объединение берется по всем возможным конечным множествам  $\{P_i\}$ , называется *большим кольцом*.

Пусть  $S$  – пространство отрезков кривых  $\gamma$  и  $s \in S$ . Пусть  $F(s) = F(P_1, P_2)$  – определенная на  $S$  функция отрезков,  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$ . В формулах (3.2) и (3.3) формально замсним значения  $m([1(\delta), 2(\delta)])$  и  $m([1(\sigma), 2(\sigma)])$  на  $F([1(\delta), 2(\delta)])$  и  $F([1(\sigma), 2(\sigma)])$  соответственно. Так получасм функционалы, определенные на кольцах Сильвестра,

$$\varphi(B; \{P_i\}) : S\{P_i\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$2\varphi(B; \{P_i\}) = \sum_{\delta} c(\delta; B)F([1(\delta), 2(\delta)]) - \sum_{\sigma} c(\sigma; B)F([1(\sigma), 2(\sigma)]), \quad (4.1)$$

где коэффициенты  $c(\delta; B)$  и  $c(\sigma; B)$  определяются как в (3.3). Так как одно и то же  $B$  может принадлежать разным кольцам  $S\{P_i\}$ , то имеет смысл следующее определение.

Определение 4. Система фунлционалов (4.1), соответствующая некоторой функции  $F(s)$ , определенной на  $S$ , называется *состоятельной*, если из эквивалентности  $B_1 \in S\{P_i\}$  и  $B_2 \in S\{Q_i\}$  следует  $\varphi(B_1; \{P_i\}) = \varphi(B_2; \{Q_i\})$ .

Мы видели, что если функция  $F(s)$  порождена некоторой беспучковой знакопеременной мерой  $m$  в пространстве  $\Gamma$  посредством (0.2), то функционалы  $\varphi(B; \{P_i\})$  состоятельны в  $U$ . Дадим ответ па вопрос : для каких функций  $F$  функционал  $\varphi$  состоятелен ?

Определение 5. Функция  $F(s)$ , определенная на  $S$ , называется *аддитивной*, если для любых  $s_1, s_2 \in S$ , лежащих на одной  $\gamma$ , имеющих один общий конец и в остальном непересекающиеся, имеет место

$$F(s_1) + F(s_2) = F(s_1 \cup s_2).$$

**Теорема 2.** Пусть  $F(s) = F(P_1, P_2)$  — аддитивная функция, определенная на  $S$  и непрерывная в топологии  $D \times D$ . Тогда система функционалов  $\varphi(B; \{P_i\})$ , соответствующих  $F$ , состоятельна на большом кольце  $U$ .

**Доказательство :** Используя аддитивность функции  $F$ , слегка преобразуем выражение (4.1). Для любой  $\sigma \in \{P_i\}$  имеем

$$F(1(\sigma), 2(\sigma)) = \sum_{\delta \in \sigma} F(1(\delta), 2(\delta)).$$

Подставляя в (4.1), находим

$$2\varphi(B; \{P_i\}) = \sum_{\delta \in \{P_i\}} a(\delta; B; \{P_i\}) F(1(\delta), 2(\delta)), \quad (4.2)$$

где

$$a(\delta; B; \{P_i\}) = c(\delta; B; \{P_i\}) - c(\sigma(\delta); B; \{P_i\})$$

(обозначение подчеркивает зависимость коэффициентов от множества  $\{P_i\}$ ). Для всякого  $B \in U$  существует конечное множество  $\{P_i\}$  в  $D$  такое, что  $B \in S\{P_i\}$  и  $B \in S\{Q_i\}$  влечет  $\{P_i\} \subset \{Q_i\}$ . Для построения такого "минимального" множества  $\{P_i\}$  заметим, что границу  $\partial B$  образа  $B$  в  $\Delta$  можно покрыть конечным числом кривых  $\beta_i$ , имеющих свойство

$$\beta_i \cap \partial B = \text{дуге с непустой относительной внутренностью.}$$

Множество  $\{P_i\} \subset D$  составляют точки, соответствующие кривым  $\beta_i \subset \Delta$ . Предположим, что имеем множество  $B \in U$  и два конечных множества  $\{P_i\} \subset \{Q_i\}$ , таких что  $B \in S\{P_i\}$  и  $B \in S\{Q_i\}$ . Достаточно показать, что применение алгоритма (4.2) для вычисления  $\varphi(B; \{P_i\})$  и  $\varphi(B; \{Q_i\})$  приводит к одному и тому же результату. Рассмотрим значения  $a(\delta; B; \{Q_i\})$  при различных  $\delta \in \{Q_i\}$ .

Имеются две возможности :

а)  $\delta \in \{Q_i\}$  содержится в замкнутом  $\gamma$ -отрезке, чьи концы являются концами для некоторого  $\delta_1 \in \{P_i\}$  (пишем :  $\delta \in \delta_1$ );

b) дополнение к а).

Согласно определению  $S\{P_i\}$ , если  $B \in S\{P_i\}$ , то индикатор  $I_B(\gamma)$  может испытывать разрыв только на кривых, проходящих через точки из  $\{P_i\}$ . Из этого следует, что в случае b) оба значения индикаторов в (3.3) для  $c(\delta; B; \{Q_i\})$  повторяются в (3.3') для  $c(\sigma(\delta); B; \{Q_i\})$ . Поэтому

$$a(\delta; B; \{Q_i\}) = 0,$$

или другими словами

$$2\varphi(B; \{Q_i\}) = \sum_{\delta_1 \in \{P_i\}} \sum_{\delta \in \delta_1} a(\delta; B; \{Q_i\}) F([1(\delta), 2(\delta)]). \quad (4.3)$$

Используя тот же принцип, легко заключить, что в случае а)

$$a(\delta; B; \{Q_i\}) = a(\delta_1; B; \{P_i\}).$$

Вновь применяя аддитивность функции  $F$ , получаем

$$\sum_{\delta \in \delta_1} a(\delta; B; \{Q_i\}) F([e_1(\delta), e_2(\delta)]) = a(\delta_1; B; \{P_i\}) F([e_1(\delta_1), e_2(\delta_1)]).$$

Подставляя в (4.3), получаем (4.2). Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть  $F(s)$  – аддитивная, непрерывная функция, определенная на  $S$ . По Теореме 2 значения  $\varphi(B, \{P_i\})$  не зависят от выбора  $\{P_i\} \subset D$  при  $B \in S(\{P_i\})$ . Определим отображение  $E_F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , полагая

$$E_F(B) = 2\varphi(B, \{P_i\}), \quad B \in U.$$

Отображение  $E_F$  аддитивно на  $U$ , т.е. если  $B_1, B_2 \in U$  и  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , то

$$E_F(B_1) + E_F(B_2) = E_F(B_1 \cup B_2).$$

Доказательство следует из аддитивности индикаторов в (4.1). Мы называем  $E_F$  *валуацией Эйлера*, отвечающей функции  $F$ .

Приведем значения валюации Эйлера для трех простейших множеств (см. конец §3).

1)  $B = [P_1, P_2]$  (бюффоново множество) :

$$E_F(B) = 2 F(P_1, P_2). \quad (4.4)$$

2)  $B = \tau$  (множество Паша),  $\tau = \{\gamma: \gamma \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2 \text{ и } P_3\}$  :

$$E_F(\tau) = F(P_1, P_2) + F(P_1, P_3) - F(P_2, P_3). \quad (4.5)$$

3)  $B = \kappa$  (множество Крофтона) (см. Рис. 4) :

$$E_F(\kappa) = F([d_1]) + F([d_2]) - F([s_1]) - F([s_2]). \quad (4.6)$$

**Замечание 3.** Если дуги  $a_1, a_2 \subset \partial D$  стягиваются к точкам  $x_1, x_2$  соответственно, то для дважды дифференцируемых функций  $F$  равенство (4.6) влечет

$$\lim E_F(\kappa)(|a_1| |a_2|)^{-1} = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

где  $\kappa = [a_1, a_2]$  – множество Крофтона, а  $|a_i|$  – длина дуги  $a_i$ , соответствующая мере длины  $dx$ , определенной в §1.

## §5. ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ СТАНОВЯТСЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ

В настоящем параграфе доказываются две теоремы относительно неотрицательных мер в пространстве  $\Gamma$  прегеодезических кривых на  $D$ .

**Теорема 3.** Пусть  $m$  – беспучковая неотрицательная мера, определенная на  $\Gamma$ . *Функция*

$$F(P_1, P_2) = m([P_1, P_2]) \quad (5.1)$$

есть псевдометрика на  $D$ , для которой кривые из  $\Gamma$  являются геодезическими.

**Доказательство :** вытекает из следующих наблюдений 1) – 3).

1)  $F \geq 0$  (так как  $m$  предполагаем неотрицательной).

2) Для любого множества Паша  $\tau$  имеет место  $m(\tau) \geq 0$ . В силу (4.5), это в точности есть неравенство треугольника.

3) Определенная на  $S$  функция

$$F(s) = F(P_1, P_2), \quad (5.2)$$

где  $P_1, P_2$  – концы отрезка  $s \in S$ , аддитивна вдоль кривых из  $\Gamma$ . По аксиоме 2, в определении прегеодезических, две кривые из  $\Gamma$  могут иметь не более одной точки пересечения. Поскольку мера  $m$  беспучковая, множества  $[s_1]$  и  $[s_2]$  в определении линейной аддитивности по существу не пересекаются. Доказательство завершено.

Пусть  $F(P_1, P_2)$  – непрерывная псевдометрика на  $D$ , для которой  $\Gamma$  является семейством геодезических. Так как функция  $F(s)$ , определенная на  $S$  по (5.2), аддитивна, то на большом кольце  $U$  определена соответствующая валюация Эйлера.

**Теорема 4.** Пусть  $F(P_1, P_2)$  – непрерывная псевдометрика на  $D$ , для которой  $\Gamma$  является семейством геодезических. Тогда валюация Эйлера  $E_F$  продолжима до неотрицательной меры  $m$  на борелевских подмножествах  $\Gamma$ . Для этой меры справедливо (5.1).

**Доказательство :** вытекает из следующих наблюдений 1) – 6).

1) Так как  $F$  – псевдометрика, для множеств Паша  $\tau$ , в силу (4.5), имеем  $E_F(\tau) \geq 0$ . Каждую ячейку в  $\Delta$  можно представить в виде конечной суммы относительно компактных треугольников с непересекающимися внутренностями (триангуляция). Следовательно, каждое  $B \in U$  можно представить в виде конечного объединения множеств Паша. Из этого следует, что искомая валюация Эйлера  $E_F$  неотрицательна на  $U$ .

2) Пусть  $a_n$  – последовательность отрезков на одной кривой  $\gamma$ , сходящаяся

при  $n \rightarrow \infty$  к точке  $P \in \gamma$ . Для всякой последовательности отрезков  $s_n$  имеет место

$$E_F([a_n] \cap [s_n]) \leq E_F([a_n] \cap [s_n]) + E_F([a_n] \cap [s_n]^c) = E_F([a_n]) = F(a_n).$$

Из непрерывности  $F$  следует, что  $\lim F(a_n) = 0$ . Из этого заключаем, что всегда

$$\lim E_F([a_n] \cap [s_n]) = 0.$$

3) Зафиксируем пару кривых  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  и рассмотрим множества  $[s_1] \cap [s_2]$ , где  $s_1 \in \gamma_1$  и  $s_2 \in \gamma_2$ . Этот класс множеств станет полукольцом, если мы предположим, что дуги  $s_i$  открытые, замкнутые или полуоткрытые (стандартная терминология теории мер). Это полукольцо содержит *компактный класс*, который получим, взяв обе дуги  $s_i$  компактными. В силу свойства 2), значение  $E_F$  на любом члене полукольца можно аппроксимировать значениями  $E_F$  на элементах нашего компактного класса. Стандартная теорема теории меры обеспечивает существование единственной меры на  $\gamma_1 \times \gamma_2$  или, что эквивалентно, на множестве

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \{\gamma : \gamma \text{ пересекает } \gamma_1 \text{ и } \gamma_2\}.$$

Обозначаем эту меру через  $m_{1,2}$ .

4) Пусть  $A$  - множество из  $U$ . По Теореме 2

$$E_F([s_1] \cap [s_2] \cap A) = 0 \quad \text{при} \quad [s_1] \cap [s_2] \subset A^c,$$

$$E_F([s_1] \cap [s_2] \cap A) = E_F([s_1] \cap [s_2]) = m_{1,2}([s_1] \cap [s_2]) \quad \text{при} \quad [s_1] \cap [s_2] \subset A.$$

По стандартной теореме о продолжении меры получаем

$$E_F([\gamma_1] \cap [\gamma_2] \cap A) = m_{1,2}([\gamma_1, \gamma_2] \cap A) = m_{1,2}(A).$$

5) Впишем " $\gamma$ -многоугольник"  $D_1$  в  $D$ , располагая "вершины" на  $\partial D$  и связывая их последовательно кривыми  $\gamma_i \in \Gamma$ , которые станут "сторонами"

$D_1$ . Предположим, что  $D_1$  является  $\gamma$ -выпуклым в том смысле, что внутренности множеств  $[\gamma_i, \gamma_j]$  не пересекаются и множество  $[D_1]$  тех  $\gamma$ -кривых, что пересекают  $D_1$ , эквивалентно объединению множеств  $[\gamma_i, \gamma_j]$ . На каждом из этих множеств согласно 3) имеем меру  $m_{i,j}$ ; вместе эти меры определяют меру  $m_1$  на  $[D_1]$ . Вычислим значение  $m_1(A)$ , полагая, что  $A \in U$  и  $A \subset [D_1]$ . Из замечания 4) и аддитивности  $E_F$  имеем

$$m_1(A) = \sum m_{i,j}(A) = \sum E_F([g_i] \cap [g_j] \cap A) = E_F(A).$$

Следовательно, на множествах  $A \in U$ , являющихся частями  $[D_1]$ , значения функционала  $E_F$  совпадают со значениями  $m_1$ .

6) Добавлением новых вершин на  $\partial D$  построим последовательность  $\gamma$ -выпуклых многоугольников  $D_2, D_3, \dots$  таких, что  $[D_k]$  монотонно сходится к  $\Gamma$ . Повторяя построение 5) для каждого  $D_k$ , получим последовательность мер  $m_k$ . Меры  $m_k$  будут состоятельными в том смысле, что  $m_k$  есть сужение  $m_{k_1}$  на  $[D_k]$  при  $k < k_1$  (следует из 5)). Предельную меру для последовательности  $m_k$  обозначим через  $m$ ; последняя определена на  $\Gamma$ . Так как  $A \in U$  всегда принадлежит некоторому  $[D_k]$ , то

$$m(A) = m_k(A) = E_F(A).$$

Последнее утверждение теоремы теперь следует из (4.4). Теорема 4 полностью доказана.

## §6. СИЛЬНАЯ АДДИТИВНОСТЬ И ПОРОЖДЕНИЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ МЕР

Доказательство Теоремы 4 в предыдущем параграфе опирается на неотрицательность валюации Эйлера  $E_F$ ; последнее свойство следовало из предположения, что  $F$  – псевдометрика. Теорема 3 утверждает, что если  $F$  не является псевдометрикой, то продолжить валюацию Эйлера  $E_F$  до неотрицательной меры на  $\Gamma$  невозможно. Однако остается возможность продолжить  $E_F$  до *знакопеременной меры*

на  $\Gamma$ . Для каких классов функций  $F$  реализуема эта последняя возможность? В настоящем параграфе мы дадим ответ на этот вопрос для знакопеременных мер на  $\Gamma$ , имеющих непрерывные плотности. Это вынужденное ограничение, так как для знакопеременных мер не существует теорем, аналогичных теоремам о продолжении общих неотрицательных мер.

Пусть имеем аддитивную функцию  $F(s)$ , определенную на  $S$ . Для произвольной тройки  $x_1, P, x_2$ , у которой  $x_1, x_2 \in \partial D$ ,  $P \in \text{int } D$ , рассмотрим значение  $E_F$  на треугольнике Паша  $\tau$ , соответствующем отделению точки  $P$  от  $x_1, x_2$ :

$$E_F(\tau) = F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2).$$

Одно из условий, используемых ниже, состоит в том, что эта сумма, как функция от  $x_1 \in \partial D$ , дважды непрерывно дифференцируема относительно меры  $dx$  на  $\partial D$ , см. §1. Также предполагаем, что функция  $F(x_1, x_2)$  (т.е. сужение  $F$  на  $\Gamma$ -хорды диска  $D$ ) трижды непрерывно дифференцируема относительно  $dx$  и обозначаем

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Если оба условия выполнены, то функцию  $F(s)$  назовем *гладкой*. Через  $m_F$  обозначим знакопеременную меру на  $\Gamma$ , являющуюся образом меры  $f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$  в пространстве  $\partial D \times \partial D$  при обратном конечном отображении. Путем, указанным в §1, можно в принципе вычислить значения  $m_F(A)$  для всех  $A \in U$ . Обозначим

$$F^*(s) = m_F([s]) = \int_{[s]} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

**Лемма 1.** Пусть  $F$  — гладкая аддитивная функция на  $S$ . Выполнение равенства

$$F^*(s) = F(s) \quad \text{для всех } s \in S \quad (6.1)$$

необходимо и достаточно для существования знакопеременной меры  $m$  на  $\Gamma$ , значения которой на множествах из  $U$  совпадают со значениями valuation  $E_F$ .

Доказательство : Сперва предположим существование знакопеременной меры  $m$  на  $\Gamma$ , значения которой на  $U$  совпадают с  $E_F$ . Тогда согласно (4.4) имеем

$$m([s]) = 2F(s) \quad \text{для всех } s \in S. \quad (6.2)$$

Плотность образа  $m$  при конечном отображении можно вычислить как предел  $\lim m([a_1] \cap [a_2]) (|a_1| |a_2|)^{-1}$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — дуги на  $\partial D$ , стягивающиеся к  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ , а  $|a_i|$  — длина дуги  $a_i$ . Из Замечания 3 в конце §4 следует, что этот предел равен плотности  $f(x_1, x_2)$ , определенной выше. Мы заключаем, что  $m = m_F$  и (6.1) следует из (6.2). Для доказательства достаточности теперь предположим, что выполнено (6.1). Тогда из Теоремы 1 следует, что значения  $E_F$  и  $m_F$  на множествах из  $U$  совпадают. Лемма 1 полностью доказана.

Подготовимся к доказательству Леммы 2. Пусть  $\kappa = [a_1, a_2]$  — множество Крофтона, отвечающее двум дугам  $a_1, a_2 \subset \partial D$ . Каждой  $\gamma \in \kappa$  придадим направление, соответствующее движению от  $a_1$  к  $a_2$ . Для фиксированной точки  $P \in D$  положим

$$A_r = \{P \text{ лежит правее } \gamma\} \cap [a_1, a_2],$$

$$A_l = \{P \text{ лежит левее } \gamma\} \cap [a_1, a_2].$$

Отметим, что оба множества лежат в  $U$ . Предположим, что положительное направление на  $\partial D$  выбрано так, что при движении вдоль  $\partial D$  в положительном направлении внутренность  $D$  остается слева. Обозначим

$$G(P, x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} [F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)],$$

где  $x_2 \in \partial D$  — точка "выхода" кривой  $\gamma \in \Gamma$ , проходящей от  $x_1 \in \partial D$  к  $P \in \text{int } D$ . Мы также пользуемся индикаторными функциями  $I_{a_2}(x_1)$  и  $I_{a_1}(x_2)$ :  $I_{a_2}(x_1) = 1$  если кривая  $\gamma$ , проходящая от  $x_1$  к  $P$ , покидает  $D$  через  $a_2$ , 0 — в противном случае.  $I_{a_1}(x_2)$  определяется двойственным образом.

Лемма 2. Пусть  $F(s)$  – аддитивная функция на  $S$ . Имеет место следующее представление :

$$E_F(A_r) = \int_{A_r} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{a_1} I_{a_2}(x_1) G(P, x_1) dx_1, \quad (6.3)$$

$$E_F(A_l) = \int_{A_l} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_{a_2} I_{a_1}(x_2) G(P, x_2) dx_2. \quad (6.4)$$

Доказательство : Разобьем дугу  $a_1$  на  $n+1$  дужек  $a_1(i)$  равной длины точками  $x_1(1) < \dots < x_1(n)$ . Концы дуги  $a_1$  обозначаем  $x_1(0) < x_1(n+1)$ . Точку выхода  $\gamma$ -кривой, проходящей от  $x_1(i)$  к  $P$ , обозначим через  $x_2(i)$ . Дужки  $a_2(i), a_2(i+1)$ , лежащие на  $a_2$ , обозначаем через  $a_2(i)$ . Сперва предположим, что  $a_2 = \bigcup_{i=1}^n a_2(i)$ .

Тогда множество Крофтона  $\kappa_{ij} = [a_1(i), a_2(j)]$

- 1) либо целиком лежит в  $A_l$ ,
- 2) либо целиком лежит вне  $A_l$ ,
- 3) либо имеет непустое пересечение с  $A_l$ .

В случае 3) из нашей конструкции следует (см. Замечание 2 в §3)

$$\{P \text{ лежит левее } \gamma\} \cap \kappa_{ij} = \tau_i,$$

где  $\tau_i$  – множество Паша

$$\tau_i = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ отделяет } P \text{ от } x_1(i+1) \text{ и } x_2(i)\}.$$

Следовательно  $A_l$  эквивалентно объединению попарно непересекающихся множеств :

$$A_l = \bigcup_{i) \kappa_{ij} \bigcup_i \tau_i.$$

В силу конечной аддитивности  $E_F$ ,

$$E_F(A_l) = \sum_{i) E_F(\kappa_{ij}) + \sum_i E_F(\tau_i). \quad (6.5)$$

Учитывая (4.6) и (4.5), запишем асимптотические соотношения (при  $n \rightarrow \infty$ ) :

$$E_F(\kappa_{ij}) \approx f(x_1(i), x_2(j)) |a_1(i)| |a_2(j)|,$$

$$E_F(\pi_i) \approx G(P, x_i)|a_i|.$$

Их подстановка в (6.5) преобразует первую сумму в риманову сумму для первого интеграла в (6.3), а вторую сумму – в риманову сумму для второго интеграла в (6.3), причем  $I_{a_1}(x_2) \equiv 1$ . Наше предположение о гладкости обеспечивает сходимость обеих римановых сумм (при  $n \rightarrow \infty$ ) к соответствующим интегралам в (6.3). Однако левая часть (6.5) не зависит от  $n$ . Этим доказано (6.4). Если концы дуги  $a_2$  отличны от  $x_2(0)$ ,  $x_2(n+1)$ , то сужается область интегрирования во втором интеграле. Это делается введением индикаторной функции  $I_{a_1}(x_2)$ . Равенство (6.3) доказывается аналогично, переменной ролей  $a_1$  и  $a_2$ . Доказательство закончено.

**Определение 6.** Аддитивная на  $S$  функция  $F(s)$  называется *сильно аддитивной*, если

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)] = 0$$

для троек  $x_1, P, x_2$ , лежащих на одной кривой  $\gamma \in \Gamma$ ,  $x_1, x_2 \in \partial D$ ,  $P \in \text{int } D$ .

**Замечание 4.** Аддитивность  $F(s)$  влечет  $F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2) = 0$  при  $x_1, P, x_2$ , лежащих на одной кривой  $\gamma$ . Вообще говоря, мы не можем дифференцировать последнее равенство, так как для  $x_1$ , смещенных вне  $\gamma$ , оно уже не выполняется. Следовательно, сильная аддитивность не следует из аддитивности  $F$ .

**Теорема 5.** В классе гладких аддитивных функций  $F$ , определенных на  $S$ , следующие два утверждения эквивалентны :

- a)  $F$  сильно аддитивна,
- b)  $E_F$  продолжимо до знакопеременной меры на  $\Gamma$ .

**Доказательство :** Покажем, что для любых двух точек  $P_1, P_2 \in D$  вычисление  $E_F([P_1, P_2])$  можно свести к суммированию формул Леммы 2. Выберем сперва множество Крофтона  $\kappa = [b_1, b_2]$ , внутренность которого содержит  $\gamma$ -кривую,

проходящую через  $P_1, P_2$ . Пусть  $a_1, a_2$  — две дуги, дополняющие  $b_1, b_2$  на  $\partial D$ . Концами произвольной кривой из  $[P_1, P_2]$  разобьем  $a_1$  и  $a_2$  на меньшие дуги  $a_1^{(i)} \subset a_1, i = 1, 2$  и  $a_2^{(j)} \subset a_2, j = 1, 2$ . К каждому из множеств  $[P_1, P_2] \cap [a_1^{(i)}, a_2^{(j)}]$  применима Лемма 2. Из свойства а) вытекает, что в обеих формулах Леммы 2 останутся лишь двойные интегралы. Ввиду конечной аддитивности  $E_F$

$$E_F([P_1, P_2]) = E_F(\kappa \cap [P_1, P_2]) + \int_{[P_1, P_2] \setminus \kappa} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Стягивая дуги  $b_1, b_2$  к точкам и используя (4.4), получаем

$$F(P_1, P_2) = \int_{[P_1, P_2]} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Отсюда и из Леммы 1 следует, что а) влечет б).

Пусть теперь выполнено б). В силу (4.4) и Замечания 3, вторая смешанная производная  $f(x_1, x_2)$  функции  $F(x_1, x_2)$  будет плотностью меры. Следовательно, в обеих формулах Леммы 2 одномерные интегралы равны нулю. Так как в этих интегралах дуги  $a_1, a_2$  можно взять сколь угодно малыми, то  $G(P, x) = 0$ , что и есть а). Теорема 5 доказана.

## §7. ЛОКАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ В ТЕРМИНАХ СТАНДАРТНОЙ Г-МЕТРИКИ

Согласно Теореме 3, на  $D$  можно построить Г-метрику с помощью меры  $f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ , определенной на  $\partial D \times \partial D$ . Мету в пространстве Г, соответствующую плотности  $f = 1$ , обозначим через  $d\gamma$ . Г-метрику на  $D$ , которая соответствует мере  $d\gamma$ , обозначим через  $F_0$  и назовем *стандартной*. На каждой кривой  $\gamma \in \Gamma$ , метрика  $F_0$  определяет меру длины. Эту меру обозначаем просто  $dx$ , чтобы подчеркнуть ее происхождение от меры, первоначально определенной на  $\partial D$ .

Единичную окружность, лежащую на касательной плоскости к  $D$ , с центром в  $P \in D$  обозначим через  $T(P)$ . Направление  $\phi$  в точке  $P \in D$  есть точка

$\phi \in T(P)$ . Наличие стандартной метрики дает нам право рассматривать для функций, определенных на  $D$ , производные первого порядка по направлениям. Пусть имеем функцию  $G(P)$ ,  $P \in D$ , которая может зависеть также и от других переменных. Ее производную в  $P$  по направлению  $\phi \in T(P)$  определяем как

$$\frac{\partial G}{\partial_{\phi} P} = \lim_{P^* \rightarrow P} [G(P^*) - G(P)] [F_0(P^*, P)]^{-1}, \quad (7.1)$$

где  $P^*$  приближается к  $P$  в заданном направлении  $\phi \in T(P)$ .

Нам потребуются следующие понятия. *Флагом* называется пара  $q = (P, \phi)$ , где  $P$  - точка в  $D$ , и  $\phi \in T(P)$ . Будем пользоваться также эквивалентной записью  $q = (P, \gamma)$ , где  $\gamma \in [P]$  - кривая, имеющая в  $P$  направление  $\phi$ , а также  $q = (x, \gamma)$ , где  $x$  - одномерная координата точки  $P$  на кривой  $\gamma$ . Функции, определенные в пространстве флагов, мы называем *флаговыми*. Флаговые функции естественно возникают как производные *аддитивных* функций  $F(s) = F(P_1, P_2)$ , определенных на  $S$ . Пусть  $\frac{\partial}{\partial_{\phi} P}$  обозначает производную по  $P$  в направлении  $\phi \in T(P)$ .

Тогда

$$\frac{\partial F(P_1, P_2)}{\partial_{\gamma} P_2} = \rho(P_2, \gamma),$$

если  $\phi$  совпадает с направлением в  $P_2$  кривой, проходящей через  $P_1, P_2$  (результат не зависит от положения  $P_1$  на кривой). Функция отрезков  $F(s)$  называется *порожденной флаговой плотностью*  $\rho(q) = \rho(P, \gamma)$ , если для любого  $s \in S$  имеет место

$$F(s) = \int_s \rho(x, \gamma) dx,$$

где  $\gamma \in \Gamma$  - кривая, содержащая  $s$ , а интегрирование ведется относительно стандартной меры  $dx$  на  $s$ . Пусть задана функция отрезков  $F(s)$ , порожденная флаговой плотностью  $\rho(q)$ . Наша цель - вычислить производную

$$\frac{\partial}{\partial_n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)]$$

для  $P_1, P, P_2$ , лежащих на одной кривой  $\gamma \in \Gamma$ , причем  $P$  лежит между  $P_1$  и  $P_2$ .

Через  $n \in T(P)$  обозначаем *нормальное* направление к  $\gamma$  в точке  $P$ . Подчеркнем,

что речь идет о нормальном направлении в геометрии на  $D$ , задаваемой стандартной  $\Gamma$ -метрикой  $F_0$ . Направление  $n$  совпадает с направлением в точке  $P$  элементарной дуги окружности радиуса  $r_1 = F_0(P_1, P)$  с центром в  $P_1$ , или же элементарной дуги окружности радиуса  $r_2 = F_0(P, P_2)$  с центром в  $P_2$ .

Пусть  $\alpha, r$  – геодезические полярные координаты на  $D$ , привязанные к полюсу  $Q \in D$ :  $\alpha \in T(Q)$  – направление  $\gamma$ -радиуса, соединяющего  $Q$  с точкой  $P \in D$ , чьи полярные координаты мы хотим определить, и  $r = F_0(Q, P)$ . В этой системе координат определим отображение

$$q(\alpha, r) : (\alpha, r) \mapsto q = (P, \phi),$$

где  $P = (\alpha, r)$ , а  $\phi \in T(P)$  соответствует направлению  $\gamma$ -радиуса  $Q, P$ . Для заданной флаговой функции  $\rho(q)$  положим

$$\lambda(Q; r, \alpha) = \rho(q(\alpha, r)),$$

где  $Q$  указывает на полюс. Вернемся к тройке  $P_1, P, P_2 \in \gamma$ . Через  $P^*$  обозначим точку, получающуюся из  $P$  сдвигом в нормальном направлении  $n$ . В дальнейшем  $y = F_0(P, P^*)$  будет стремиться к нулю. Пусть  $\alpha_i, r_i$  и  $\alpha_i^*, r_i^*$  – полярные координаты точек  $P$  и  $P^*$ , соответственно, относительно полюса  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ . Из построения  $P^*$  имеем  $r_i - r_i^* = o(y)$ ,  $i = 1, 2$ . Это позволяет записать

$$\begin{aligned} & F(P_1, P^*) + F(P^*, P_2) - F(P_1, P_2) = \\ &= \int_0^{r_1} [\lambda(P_1; x, \alpha_1^*) - \lambda(P_1; x, \alpha_1)] dx + \int_0^{r_2} [\lambda(P_2; x, \alpha_2^*) - \lambda(P_2; x, \alpha_2)] dx + o(y), \end{aligned}$$

что влечет

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = \quad (7.2) \\ &= [H(P_1, P)]^{-1} \int_0^{r_1} \frac{\partial \lambda(P_1; x, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} dx - [H(P_2, P)]^{-1} \int_0^{r_2} \frac{\partial \lambda(P_2; x, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} dx. \end{aligned}$$

Здесь  $H(P_1, P)$  и  $H(P_2, P)$  – абсолютные значения производных  $\frac{dy}{d\alpha_1}$  и  $\frac{dy}{d\alpha_2}$  в точке  $y = 0$ ; а  $\frac{\partial}{\partial \alpha}$  – оператор дифференцирования на  $T(P_1)$  в первом и на

$T(P_2)$  во втором слагаемых. В каждом случае необходимо иметь *положительное направление вращения*. В (7.2) положительное направление вращения на  $T(P_1)$  задает короткий путь от  $\alpha_1$  к  $\alpha_1^*$ . Положительное направление на  $T(P_2)$  выбрано по непрерывности, поэтому между интегралами стоит минус.

В нижеследующей теореме используются понятия гладкости и сильной аддитивности, введенные в предыдущем параграфе.

**Теорема 6.** *Гладкая аддитивная функция  $F(s) = F(P_1, P_2)$ , определенная на  $S$ , сильно аддитивна тогда и только тогда, когда для каждой тройки точек  $P_1, P, P_2$ , лежащих на одной  $\gamma$ -кривой (причем  $P \in \text{int } D$  находится между  $P_1$  и  $P_2$ ), для зотя бы одного направления  $\phi \in T(P)$ , отличного от направления кривой  $\gamma$  в точке  $P$ ,*

$$\frac{\partial}{\partial \phi P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = 0.$$

В этом случае последнее равенство тождественно выполняется для всех  $\phi \in T(P)$ .

**Доказательство :** Необходимость. Пусть  $F$  сильно аддитивна, и пусть  $m$  — мера на  $\Gamma$ , соответствующая  $F$  согласно Теореме 5. Из гладкости  $F$  следует, что  $m$  имеет ограниченную плотность  $f$  относительно  $d\gamma$ . Для  $G(P) = F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)$  рассмотрим предел (7.1), полагая, что  $P$  есть предельное положение точки  $P^*$  на  $\gamma$ -кривой, проходящей через  $P_1, P_2$ , и  $P$  лежит между  $P_1$  и  $P_2$ . Отношение (7.1) можно записать в виде  $m(\tau)[F_0(P^*, P)]^{-1}$ , где  $\tau$  — треугольник Паша, соответствующий отделению  $P^*$  от  $P_1, P_2$ . Имеем интегральное представление

$$m(\tau) = \int_s dx \int_{[x] \cap \tau} f(\gamma) d_x \psi,$$

где  $s = (P^*, P)$ ,  $[x]$  — пучок  $\gamma$ -кривых, проходящих через  $x \in s$ ,  $d_x$  — мера на  $s$ , индуцированная функцией  $F$ . Заметим, что кривая  $\gamma \in [s]$  определяется

двумя одномерными "координатами"  $x$  и  $\psi$ :  $x$  есть точка пересечения  $\gamma$  с  $s$ , а  $\psi$  – угол между направлением  $\gamma$  в  $x$  и направлением отрезка  $s$  в  $x$ . Через  $d_x\psi$  обозначена *условная* мера в пространстве направлений при заданном  $x \in s$ ; эта условная мера определяется соотношением  $d\gamma = dx d_x\psi$ . В предыдущем равенстве внутренний интеграл стремится к нулю ввиду равномерной по  $x$  малости области интегрирования. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в  $T(P)$  существует направление  $\phi$ , для которого верно равенство теоремы. Другим направлением в  $T(P)$ , для которого это верно всегда является направление  $\gamma$  в  $P$ . Этого достаточно для вывода, что равенство верно для любого  $\phi \in T(P)$ , включая и нормальное к  $\gamma$  направление  $n \in T(P)$ , т.е.

$$\frac{\partial}{\partial n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = 0.$$

Применяя вычисления наподобие тех, что привели к (7.2), можно легко проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [F(x_1, P) + F(P, x_2) - F(x_1, x_2)]$$

совпадает с правой частью (7.2), записанной для  $P_1 = x_1, P_2 = x_2 \in \partial D$ . Следовательно, последнее выражение обращается в ноль. Доказательство завершено.

Теорема 6 вместе с представлением (7.2) дает следующее *необходимое и достаточное локальное условие сильной аддитивности*. Приравняем (7.2) нулю.

Так как в (7.2) переменные  $P_1$  и  $P_2$  разделяются, то получаем, что

$$[H(P_1, P)]^{-1} \int_0^{r_1} \frac{\partial \lambda(P_1; x, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} dx = \Lambda(P, \gamma) \quad (7.3)$$

не зависит от положения  $P_1$  на  $\gamma$ . Для нахождения значения  $\Lambda(P, \gamma)$ , устремим в последнем равенстве  $r_1$  к 0, зафиксировав  $P_1$  и  $\gamma$ . Запишем разложение Тейлора

$$H(P_1, P) = H(P_1, \gamma, r_1) = C_1 r_1 + \frac{C_2}{2} r_1^2 + o(r_1^2), \quad (7.4)$$

где коэффициенты  $C_1, C_2$  зависят только от кривой  $\gamma$  и  $P_1 \in \gamma$ . Так как  $\lim_{r_1 \rightarrow 0} \Lambda(P, \gamma) = \Lambda(P_1, \alpha_1)$ , то по теореме о среднем значении получаем

$$\Lambda(Q, \alpha) = (C_1)^{-1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \lambda(Q; x, \alpha)}{\partial \alpha}. \quad (7.5)$$

Умножим теперь обе части (7.3) на  $H(P_1, \gamma, r_1)$  и результат продифференцируем дважды по  $r_1$ , фиксируя  $P_1$  и  $\gamma$ . Переход к пределу при  $r_1 \rightarrow 0$  после первого дифференцирования дает  $0 = 0$ . Такая же операция после второго дифференцирования дает искомое локальное условие :

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; 0, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = C_2 \Lambda(Q, \alpha) + 2C_1 \frac{\partial \Lambda(Q, \alpha)}{\partial \alpha Q}, \quad (7.6)$$

где как обычно

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; 0, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial r \partial \alpha}.$$

### §8. КЛАССИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ

Сначала проверим, что равенство (7.6) приводит к известному результату [7] в случае, когда  $D$  – диск на евклидовой плоскости,  $\Gamma$  – евклидовые прямые, стандартная метрика  $F_0$  – евклидовое расстояние. В этом случае  $H(P_1, P)$  равно евклидовому расстоянию между  $P_1$  и  $P$ , следовательно в (7.4)  $C_1 = 1$  и  $C_2 = 0$ . Для всякого  $P \in D$  направление  $\alpha \in T(P)$  определяется углом с нулевым направлением. Задав флаговую плотность  $\rho(P, \alpha)$ , легко находим

$$\frac{\partial \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} r + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad (8.1)$$

где  $\frac{\partial}{\partial_n P}$  означает дифференцирование по  $P$  в направлении, нормальном к направлению  $\alpha$ . Это значит, что

$$\Lambda(Q, \alpha) = \frac{\partial \rho(Q, \alpha)}{\partial \alpha},$$

и следовательно, правая часть (7.6) равна  $2 \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha P \partial \alpha}$ . Дифференцируя (8.1) по  $r$ , находим

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial \alpha P \partial \alpha} + \frac{\partial \rho(P, \alpha)}{\partial_n P} + r \frac{\partial^2 \rho(P, \alpha)}{\partial r \partial \alpha P},$$

и (7.6) приводится к известному уравнению [7] :

$$\frac{\partial \rho(Q, \alpha)}{\partial_n Q} = \frac{\partial^2 \rho(Q, \alpha)}{\partial \alpha Q \partial \alpha}. \quad (8.2)$$

Рассмотрим (7.6) для другого "классического" случая:  $D$  – круговая область на единичной полусфере,  $\Gamma$  – большие полуокружности, стандартная метрика  $F_0$  – обычное геодезическое расстояние на  $D$ . Заметим, что в (7.4)  $H(P_1, P) = \sin r_1$ , так что  $C_1 \equiv 1$ ,  $C_2 \equiv 0$ . На  $D$  рассмотрим полярные координаты с полюсом в центре  $O$  круга  $D$ :  $R$  – геодезическое расстояние от  $P$  до  $O$  и  $\beta$  – угол поворота вокруг  $O$ . Угол  $\phi \in T(P)$  измеряется от меридиана в  $P$ . Имеем

$$\lambda(Q; r, \alpha) = \rho(P, \phi) = \rho(R, \beta, \phi)$$

и стандартные соотношения сферической тригонометрии

$$\begin{aligned} \cos R &= \cos \alpha \sin r \sin R_1 + \cos r \cos R_1, \\ \cot \beta &= \frac{\sin R_1 \cot r - \cos R_1 \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \cot \phi = -\frac{\sin r \cot R_1 - \cos r \cos \alpha}{\sin \alpha}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где  $R_1$  и  $\beta = 0$  – полярные координаты точки  $Q \in D$ . Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}. \quad (8.4)$$

Из (8.3) легко находим

$$\left. \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right|_{r=0} = 1, \quad (8.5)$$

откуда следует (см. (7.5))

$$\Lambda(Q, \alpha) = \frac{\partial \rho(Q, \alpha)}{\partial \alpha}. \quad (8.6)$$

В следующем равенстве члены, пропорциональные  $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$  и  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ , пишем как  $o(1)$  и  $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 1 + o(1)$  (см. (8.5), при  $r$  стремящемся к нулю). В результате дифференцирования (8.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda(Q; r, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} &= \frac{\partial \rho}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \beta}{\partial r \partial \alpha} + \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \alpha} + \\ &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial R \partial \phi} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta \partial \phi} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \phi^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + o(1). \end{aligned}$$

Из (8.3) легко находим

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial r \partial \alpha} \right|_{r=0} = \sin \alpha, \quad \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial r \partial \alpha} \right|_{r=0} = \frac{\cos \alpha}{\sin R_1}, \quad \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \alpha} \right|_{r=0} = -2 \cos \alpha \cot R_1,$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} \Big|_{r=0} = -\cos \alpha, \quad \frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r=0} = \frac{\sin \alpha}{\sin R_1}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=0} = \sin \alpha \cot R_1.$$

Операторы

$$-\frac{\partial}{\partial R} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\sin \alpha}{\sin R_1} = \frac{\partial}{\partial_\alpha P}, \quad \frac{\partial}{\partial R} \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\cos \alpha}{\sin R_1} = \frac{\partial}{\partial_n P}$$

можно интерпретировать, как производные по направлению  $\alpha$  и по направлению, нормальному к  $\alpha$ , соответственно. Отсюда для  $\rho = \rho(Q, \alpha)$  заключаем, что

$$\frac{\partial^2 \lambda(Q; 0, \alpha)}{\partial r \partial \alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial_n Q} + \frac{\partial}{\partial_\alpha Q} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) - 2 \cos \alpha \cot R_1 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \sin \alpha \cot R_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2}.$$

Вместе с (8.6) это приводит к искомой "сферической" форме соотношения (7.6)

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n Q} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\alpha Q \partial \alpha} + a, \tag{8.7}$$

где "поправочный член" (ср. (8.2)) имеет вид

$$a = 2 \cos \alpha \cot R_1 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \sin \alpha \cot R_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2}.$$

Третий классический случай :  $D$  - единичный диск на гиперболической плоскости,  $\Gamma$  - гиперболические линии, стандартная метрика - обычная метрика гиперболической плоскости. Вычисления проводятся как в предыдущем случае, но основываются на формулах гиперболической тригонометрии. В результате (7.6) получает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n P} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial_\alpha P \partial \alpha} + b, \tag{8.8}$$

причем операторы  $\frac{\partial}{\partial_n P}$  и  $\frac{\partial}{\partial_\alpha P}$  имеют тот же смысл, что и прежде. Поправочный член имеет вид

$$b = 2 \cos \alpha \coth R_1 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \sin \alpha \coth R_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2},$$

где  $\coth$  - гиперболический котангенс.

Все три классических случая (8.2), (8.7) и (8.8) сильно упрощаются, если предположить, что флаговая плотность  $\rho(P, \phi)$  не зависит от аргумента  $\phi$  (случай круговой индикатрисы). Тогда в каждом из случаев

$$\frac{\partial \rho}{\partial_n P} = 0. \tag{8.9}$$

Так как  $n$  – нормальное направление к произвольному  $\alpha \in T(P)$ , мы заключаем, что необходимо  $\rho = \text{const}$ . Равенство (8.9) верно и для общих  $D$ ,  $\Gamma$  и любой стандартной  $\Gamma$ -метрики  $F_0$ , если только флаговая плотность  $\rho$  не зависит от  $\phi$  (случай  $F_0$ -круговой индикатрисы). Доказательство как в евклидовом случае с заменой  $g$  на функцию  $H$ , см. (7.4).

Итак, мы пришли к следующему выводу. Среди флаговых плотностей с  $F_0$ -круговыми индикатрисами метрикам соответствуют только константы. Более подробные сведения о равенстве (8.2) можно найти в [9].

## §9. КРИВЫЕ НА ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И КРУГОВЫЕ ИНДИКАТРИСЫ

В трех случаях предыдущего параграфа использовалась естественная "готовая"  $\Gamma$ -метрика. Если готовая  $\Gamma$ -метрика отсутствует, то в принципе можно воспользоваться равенствами §7, построив  $\Gamma$ -метрику на  $D$  по Теореме 3. Однако возникает вопрос : что можно получить, основываясь на метрике в  $D$ , для которой кривые  $\gamma$  не являлись бы геодезическими ? Настоящий параграф содержит попытку в данном направлении. Сделаем следующие упрощающие предположения : область  $D$ , где задано семейство  $\Gamma$ , принадлежит евклидовой плоскости, флаговая плотность  $\rho = \rho(P)$  зависит лишь от точки  $P \in D$  и не зависит от угловой переменной. Точки на  $\gamma$ -отрезке  $s \in S$  обозначаем через  $t$ , через  $dt$  обозначаем евклидову длину вдоль  $s$ . На  $S$  рассмотрим аддитивную функцию

$$F(s) = \int_s \rho(t) dt. \quad (9.1)$$

Задача : когда  $F(s)$  оказывается  $\Gamma$ -метрикой на  $D \subset \mathbb{R}^2$  ?

Обозначим через  $|Q_1, Q_2|$  евклидово расстояние между точками  $Q_1, Q_2$ . На  $D$  рассмотрим "прегеодезические полярные координаты" относительно полюса  $P$  : для точки  $Q \in D$  запись  $Q = (\gamma, t)$  означает, что  $\gamma$ -отрезок  $s = P, Q$  лежит на  $\gamma \in [P]$ , и евклидова длина  $\gamma$ -отрезка  $s$  равна  $t$ . При этом необходимо

рассматривать *направленные* кривые  $\gamma$ . Пусть  $P_1, P, P_2$  – тройка точек на  $\gamma$ ,  $P$  между  $P_1$  и  $P_2$ , и пусть  $\gamma_i, t_i$  – прегеодезические полярные координаты на  $D$  относительно полюса  $P_i, i = 1, 2$ . В системе с полюсом в  $P_i, i = 1, 2$  пишем  $P = (\gamma_i, r_i), r_i > 0$ . Очевидно,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – два противоположно направленных варианта кривой  $\gamma$ , содержащей  $P_1, P, P_2$ .

Через  $P^*$  обозначим точку в  $D$ , получаемую из  $P$  сдвигом на  $z = |P, P^*|$  в направлении от  $P$  к *центру евклидова круга, соприкасающегося с  $\gamma$  в  $P$* . Это направление обозначим через  $n = n(\gamma, P)$ . В системе с полюсом в  $P_i, i = 1, 2$  пишем  $P^* = (\gamma_i^*, r_i^*)$ . Существенная особенность состоит в том, что теперь

$$r_i - r_i^* = O(z), \quad z \rightarrow 0, \tag{9.2}$$

а не  $o(z)$ , как это было в §7. Следовательно

$$\begin{aligned} & F(P_1, P^*) + F(P^*, P_2) - F(P_1, P_2) = \\ & = \int_0^{r_1^*} [\rho(\gamma_1^*, t_1) - \rho(\gamma_1, t_1)] dt_1 + \int_0^{r_2} [\rho(\gamma_2^*, t_2) - \rho(\gamma_2, t_2)] dt_2 + O_1(z) + O_2(z), \end{aligned} \tag{9.3}$$

где слагаемое  $O_1(z)$  равно  $\int_{r_1^*}^{r_1} \rho(\gamma_1^*, t) dt$ , если  $r_1^* > r_1$  и  $-\int_{r_1}^{r_1^*} \rho(\gamma_1, t) dt$ , если  $r_1^* < r_1$ . При  $z \rightarrow 0$  имеем  $O_1(z) = (r_1^* - r_1)\rho(P) + o(r_1^* - r_1)$ . Слагаемое  $O_2(z)$  имеет аналогичный смысл.

Пусть  $\alpha_i$  – угол между направлениями  $\gamma_i$  и  $\gamma_i^*$ . Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} H_1(r_i, t_i) &= \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \alpha_i^{-1} |(\gamma_i, t_i), (\gamma_i^*, t_i)|, \\ H_2(r_i) &= \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \alpha_i^{-1} (r_i^* - r_i), \quad H_3(r_i) = \lim_{\alpha_i \rightarrow 0} \alpha_i^{-1} z. \end{aligned}$$

Эти обозначения состоятельны, так как ниже *точка  $P$  и кривая  $\gamma \in [P]$  остаются фиксированными*, и переменные  $r_i$  адекватно заменяют  $P_i$ . Умножая обе стороны (9.3) на  $z^{-1}$  и вычисляя предел при  $z \rightarrow 0$ , запишем условие сильной аддитивности

$$\frac{\partial}{\partial n P} [F(P_1, P) + F(P, P_2) - F(P_1, P_2)] = [H_3(r_1)]^{-1} \int_0^{r_1} \frac{\partial \rho(\gamma_1, t_1)}{\partial u} H_1(r_1, t_1) dt_1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + [H_3(r_2)]^{-1} \int_0^{r_2} \frac{\partial \rho(\gamma_2, t_2)}{\partial u} H_1(r_2, t_2) dt_2 + \rho(P) H_2(r_1) [H_3(r_1)]^{-1} + \\
 & + \rho(P) H_2(r_2) [H_3(r_2)]^{-1} = 0.
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

В верхнем равенстве  $u = u(r_i, t_i)$  - предельное (при  $z \rightarrow 0$ ) направление из точки  $(\gamma_i, t)$  к точке  $(\gamma_i^*, t)$ , а  $\frac{\partial}{\partial u}$  - оператор дифференцирования в этом направлении (вообще говоря  $n \neq u$ ). Так как переменные  $r_1$  и  $r_2$  в (9.4) разделяются, значение

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial \rho(\gamma_i, t_i)}{\partial u} H_1(r_i, t_i) [H_3(r_i)]^{-1} dt_i + \rho(P) H_2(r_i) [H_3(r_i)]^{-1} \tag{9.5}$$

не зависит от  $r_i$ . При стремлении  $r_i$  к 0,  $i = 1, 2$  имеем  $H_1(0, 0) = 0$  и  $H_3(r_i) = O(r_i)$ . Следовательно, значение (9.5) равно  $\rho(P)C_i$ , где

$$C_i = \lim_{r_i \rightarrow 0} H_2(r_i) [H_3(r_i)]^{-1}. \tag{9.6}$$

Из этого следует

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial \rho(\gamma_i, t_i)}{\partial u} H_1(r_i, t_i) dt_i + \rho(P) H_2(r_i) = \rho(P) C_i H_3(r_i). \tag{9.7}$$

В последнем интеграле произведем замену переменных, приняв  $l_i = r_i - t_i$ . Заметим, что  $l_i$  соответствует выбору точки  $P$  за начало координат на  $\gamma$  и положительного направления от  $P$  к  $P_i$ . Записав  $l_i$  для точки  $(\gamma_i, t_i) \in \gamma$ , получим

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial \rho(l_i)}{\partial u} H_1(r_i, r_i - l_i) dl_i + \rho(P) H_2(r_i) = \rho(P) C_i H_3(r_i).$$

Дифференцируем это равенство дважды по  $r_i$ . Так как  $H_1(r_i, 0) \equiv 0$ , первое дифференцирование дает

$$\int_0^{r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} \left[ \frac{\partial \rho(l_i)}{\partial u} H_1(r_i, r_i - l_i) \right] dl_i + \rho(P) \frac{d}{dr_i} H_2(r_i) = \rho(P) C_i \frac{d}{dr_i} H_3(r_i). \tag{9.8}$$

Подставляя  $r_i = 0$ , получаем

$$\frac{d}{dr_i} H_2(0) = C_i \frac{d}{dr_i} H_3(0), \tag{9.9}$$

т.е. не получаем условия на  $\rho$  (само равенство будет проверено в следующем параграфе). После второго дифференцирования, подставляя  $r_i = 0$ , получаем

$$\frac{\partial \rho(P)}{\partial u_0} \frac{d}{dr_i} H_1(0, 0) + \rho(P) \frac{d^2}{dr_i^2} H_2(0) = \rho(P) C_i \frac{d^2}{dr_i^2} H_3(0), \quad (9.10)$$

где  $u_0$  – предел направлений  $u = u(r_i, t_i)$  при  $r_i \rightarrow 0$ . Равенство (9.10) мы легко проинтегрируем и получим значение  $\rho(P)$ . Но сначала надо найти направление  $u_0$ , а также коэффициенты  $\frac{d}{dr_i} H_1(0, 0)$ ,  $\frac{d^2}{dr_i^2} H_2(0)$ ,  $C_i \frac{d^2}{dr_i^2} H_3(0)$  (они являются функциями от  $P$  и  $\gamma \in [P]$ ). Все это сделано в следующем параграфе.

## §10. ПРИБЛИЖЕНИЕ КРУГОВЫМИ ДУГАМИ

Этот параграф посвящен вычислению коэффициентов, а также направления  $u_0$  в (9.10). Для этого мы используем локальное приближение кривых  $\gamma$  круговыми дугами. Если мы предположим, что кривые из  $\Gamma$  суть круговые дуги в области  $D$  евклидовой плоскости, то функции  $H_1(r_i, t_i)$ ,  $H_2(r_i)$ ,  $H_3(r_i)$  допускают точное выражение через элементарные функции. Покажем это.

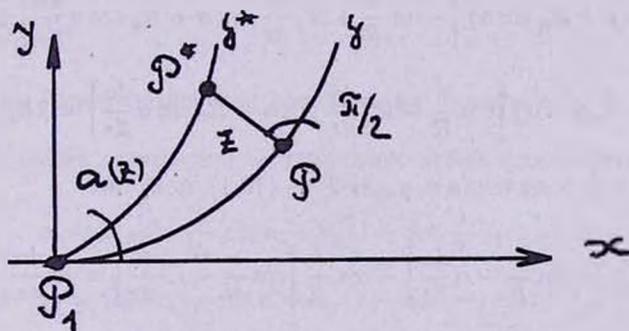


Рис. 5

Рассмотрим точки  $P_1, P, P_2 \in \gamma$  и  $P^*$ , определенные в §9, полагая, что  $\gamma$  – дуга окружности. Выберем  $P_1$  в качестве начала декартовой системы координат, а в качестве  $x$ -оси возьмем прямую, касающуюся  $\gamma$  в  $P_1$ , причем положительное направление берем так, чтобы абсцисса точки  $P$  оказалась бы положительной. Берем  $y$ -ось направленной к центру дуги  $\gamma$  (см. Рис. 5). В этой системе координат

(x, y)

$$P = \left( R \sin \frac{r}{R}, R(1 - \cos \frac{r}{R}) \right),$$

$$P^* = \left( (R - z) \sin \frac{r}{R}, R(1 - \cos \frac{r}{R}) + z \cos \frac{r}{R} \right), \quad (10.1)$$

где  $R$  — радиус дуги  $\gamma$ . Дуга  $\gamma$  при наших вычислениях остается фиксированной.

Для простоты мы пишем  $r$  вместо  $r_i$ . Через  $R_\alpha$  обозначим радиус круговой дуги из  $[P]$ , чье направление в точке  $P$  составляет угол  $\alpha$  с  $x$ -осью, так что  $R = R_0$ .

Пусть также  $R'_\alpha = \frac{d}{d\alpha} R_\alpha$  и  $R' = R'_0$ .

**Вычисление  $H_3(r)$ .**

Для малых значений  $\alpha$  уравнение окружности, проходящей через  $P_1, P^*$ , будет

$$(x + R_\alpha \sin \alpha)^2 + (y - R_\alpha \cos \alpha)^2 = R_\alpha^2.$$

После подстановки координат  $P^*$  из (10.1) это уравнение определяет  $\alpha = \alpha(z)$  как функцию от  $z$ . Дифференцированием по  $z$  находим

$$2(x + R_\alpha \sin \alpha) \left[ -\sin \frac{r}{R} + R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz} \sin \alpha + R_\alpha \cos \alpha \frac{d\alpha}{dz} \right] +$$

$$+ 2(y - R_\alpha \cos \alpha) \left[ \cos \frac{r}{R} - R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz} \cos \alpha + R_\alpha \sin \alpha \frac{d\alpha}{dz} \right] = 2R_\alpha R'_\alpha \frac{d\alpha}{dz}.$$

Подставляя  $\alpha = 0$  и значения  $x, y$  для  $P$  из (10.1), получим

$$\sin \frac{r}{R} \left[ -\sin \frac{r}{R} + R \frac{d\alpha}{dz} \right] - \cos \frac{r}{R} \left[ \cos \frac{r}{R} - R' \frac{d\alpha}{dz} \right] = R' \frac{d\alpha}{dz} \Big|_{z=0},$$

что эквивалентно

$$\left[ R \sin \frac{r}{R} + R' \cos \frac{r}{R} - R' \right] \frac{d\alpha}{dz} \Big|_{z=0} = 1.$$

Так как  $H_3(r) = \frac{dz}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}$ , то

$$H_3(r) = R \sin \frac{r}{R} + R' (\cos \frac{r}{R} - 1). \quad (10.2)$$

**Вычисление  $H_2(r)$ .**

Пусть  $\chi(z)$  – евклидово расстояние от  $P^*$  до начала координат. Ясно, что

$$r^* = 2R_\alpha \arcsin \frac{\chi(z)}{2R_\alpha}.$$

Следовательно

$$\frac{dr^*}{d\alpha} = R'_\alpha \frac{r^*}{R_\alpha} + \frac{2R_\alpha}{\sqrt{4R_\alpha^2 - \chi^2(z)}} \left[ \chi'(z) \frac{dz}{d\alpha} - \frac{\chi(z)R'_\alpha}{R_\alpha} \right],$$

где  $\chi'(z) = \frac{d}{dz}\chi(z)$ . Из  $H_2(r) = \left. \frac{dr^*}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$ , заключаем, что

$$H_2(r) = R' \frac{r}{R} + \frac{2R}{\sqrt{4R^2 - \chi^2(0)}} \left[ \chi'(0)H_3(r) - \frac{\chi(0)R'}{R} \right] \quad (10.3)$$

(мы использовали соотношение  $H_3(r) = \left. \frac{dz}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$ ). Координаты точки  $P^*$  даны в (10.1). Легко находим

$$\chi(0) = R \sqrt{\sin^2 \frac{r}{R} + (1 - \cos \frac{r}{R})^2} = r + O(r^3),$$

$$\chi'(0) = \frac{R}{\chi(0)} (\cos \frac{r}{R} - 1) = -\frac{r}{2R} + O(r^3).$$

**Вычисление  $H_1(r, t)$ .**

Точка, имеющая в "прегеодезических координатах" с полюсом в  $P_1$  координаты  $(\gamma^*, t)$  (см. §9), в нашей декартовой системе будет иметь координаты

$$x_\alpha = R_\alpha \sin \frac{t}{R_\alpha} \cos \alpha - R_\alpha (1 - \cos \frac{t}{R_\alpha}) \sin \alpha,$$

$$y_\alpha = R_\alpha \sin \frac{t}{R_\alpha} \sin \alpha + R_\alpha (1 - \cos \frac{t}{R_\alpha}) \cos \alpha$$

(берем точку  $P$ , определенную в (10.1) с  $R = R_\alpha$ , и поворачиваем вокруг  $O = P_1$  на угол  $\alpha$ ). Ясно, что

$$H_1(r, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-1} \sqrt{(x_\alpha - x_0)^2 + (y_\alpha - y_0)^2} = \sqrt{(x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2} = \sqrt{(x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2},$$

где  $x'_\alpha, y'_\alpha$  – производные по  $\alpha$ . Отсюда

$$H_1^2(r, t) = \left[ R' \sin \frac{t}{R} - tR'R^{-1} \cos \frac{t}{R} - R(1 - \cos \frac{t}{R}) \right]^2 +$$

$$+ \left[ R \sin \frac{t}{R} - t R' R^{-1} \sin \frac{t}{R} + R'(1 - \cos \frac{t}{R}) \right]^2. \quad (10.4)$$

Вычисление направления  $u$ .

Выражения в квадратных скобках в (10.4) представляют собой значения  $x'_\alpha$  и  $y'_\alpha$  для  $t > 0$ . Для соответствующего направления  $u$  имеем

$$\tan u = \frac{y'_\alpha}{x'_\alpha} = \frac{t + o(t)}{o(t)}. \quad (10.5)$$

Теперь снимем условие, что кривые  $\gamma$  — круговые дуги, и вернемся к общим  $\gamma$ . Можно ожидать, что при разумных предположениях о гладкости относительно семейства  $\Gamma$ , имеет место следующий *асимптотический аналог* при  $r \rightarrow 0$  формул (10.2) — (10.5):

$$H_3(r) = r + O(r^2), \quad (10.2a)$$

$$H_2(r) = -R^{-1} \frac{r^2}{2} + O(r^3), \quad (10.3a)$$

$$H_1(r, r) = r + o(r), \quad (10.4a)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tan u = \infty. \quad (10.5a)$$

Отложив изучение условий гладкости на  $\Gamma$ , из которых эти асимптотические соотношения могли бы следовать, дадим следующее определение. Для заданного семейства  $\Gamma$  прегеодезических внутри плоской области  $D$  рассмотрим *функцию кривизны*  $k(P, \gamma) \geq 0$ , определяемую как кривизну в точке  $P$  кривой  $\gamma \in [P]$ .

**Определение 7.** Семейство  $\Gamma$  назовем *регулярным*, если для любых  $P$  и  $\gamma \in [P]$  имеют место асимптотические соотношения (10.2a) — (10.5a), при условии, что в (10.3a)  $R^{-1} = k(P, \gamma)$ .

Асимптотические соотношения (10.2a) — (10.5a) приводят к следующим значениям коэффициентов в равенстве (9.10):

$$\frac{d}{dr_i} H_1(0, 0) = 1, \quad \frac{d^2}{dr_i^2} H_2(0) = -k(P, \gamma), \quad C_i = 0.$$

Также заметим, что предел (при  $r \rightarrow 0$ ) направления и есть направление  $n = n(\gamma, P)$  от  $P$  к центру окружности, соприкасающейся с  $\gamma$  в  $P$ . Мы пришли к следующему утверждению.

Для регулярных семейств  $\Gamma$  прегеодезических кривых в области  $D$ , лежащей на евклидовой плоскости, равенство (9.10) имеет вид

$$\frac{\partial \rho(P)}{\partial n} = k(P, \gamma) \rho(P). \quad (10.6)$$

### §11. УСЛОВИЕ НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ ПУТИ

В этом параграфе рассмотрим следствия равенства (10.6) для регулярных семейств прегеодезических в области  $D$  на евклидовой плоскости. Через  $K(P, \alpha)$ ,  $\alpha \in (0, 2\pi)$  обозначим *знакопеременную версию* функции кривизны  $k(P, \gamma)$ : полагаем  $K(P, \alpha) = k(P, \gamma)$ , если  $\gamma \in [P]$  и  $\alpha \in [P]$  взаимно перпендикулярны, причем  $\alpha$  направлено от  $P$  к центру окружности, соприкасающейся с  $\gamma$  в  $P$ , и  $K(P, \alpha) = -k(P, \gamma)$  в противном случае.

Выберем кусочно-дифференцируемый путь  $\Theta$ , соединяющий две точки  $Q_1, Q_2 \in D$ . Направление вдоль  $\Theta$  от  $Q_1$  к  $Q_2$  назовем *положительным*. Через  $l$  обозначим одномерную координату на  $\Theta$ , а через  $dl$  — элемент длины на  $\Theta$ . Дифференцирование в точке  $l \in \Theta$  в положительном направлении обозначаем через  $\frac{\partial}{\partial l}$ . Пусть  $K(l)$  — сужение  $K(P, \alpha)$  на кривую  $\Theta$ :  $l$  определяет положение точки  $P \in \Theta$ , а  $\alpha$  — положительное направление кривой  $\Theta$  в  $l$ . Запишем (10.6) для  $l \in \Theta$  в виде

$$(\rho(l))^{-1} \frac{d\rho(l)}{dl} = K(l). \quad (11.1)$$

Интегрирование (11.1) от  $Q_1$  до  $Q_2$  дает

$$\rho(Q_2) = \rho(Q_1) \exp \left( \int_{\Theta} K(l) dl \right). \quad (11.2)$$

Будучи эквивалентным (9.10), этот результат влечет следующее *внутреннее описание* прегеодезических семейств, допускающих интерпретацию как геодезических для поточечно изотропных метрик.

Теорема 7. Для всякого регулярного семейства  $\Gamma$  прегеодезических кривых в области  $D$  на евклидовой плоскости, следующие три утверждения эквивалентны :

1) кривые из  $\Gamma$  являются геодезическими для некоторой метрики, обладающей круговой индикатрисой в каждой точке  $P \in D$ ;

2) интеграл  $\int_{\Theta} K(l)dl$  не зависит от выбора пути  $\Theta$ , коль скоро концы  $\Theta$  фиксированы, т.е.  $\int_{\Theta} K(l)dl = 0$ , если путь интегрирования  $\Theta$  замкнут;

3) существуют две функции, определенные на  $D$  : функция амплитуды  $A(P)$  со значениями в  $(0, \infty)$  и функция фазы  $\Phi(P)$  со значениями в  $(0, 2\pi)$ , через которые функция кривизны  $K(P, \alpha)$  выражается в виде

$$K(P, \alpha) = A(P) \cos(\alpha - \Phi(P)). \quad (11.3)$$

Функции  $A(P)$ ,  $\Phi(P)$  удовлетворяют следующему уравнению с производными по направлениям :

$$\frac{\partial A(P)}{\partial_n P} + A(P) \frac{\partial \Phi(P)}{\partial_n P} = 0, \quad (11.4)$$

где направление  $n = n(P)$  — одно из двух направлений, нормальных к  $\Phi(P)$ .

Доказательство : Импликация 1)  $\implies$  2) следует прямо из (11.2). Импликация же 2)  $\implies$  3) следует из результатов Г. С. Сукиасяна [10]. В [10] даны необходимые и достаточные условия продолжения конечно-аддитивных функционалов, определенных на выпуклых многоугольниках на плоскости, до знакопеременных мер. Достаточно применить этот результат к функционалу  $\int_{\Theta} K(l)dl$  для выпуклых многоугольных путей  $\Theta$ . Равенство (11.3) означает возможность продолжения до знакопеременной меры, тогда как (11.4) означает, что знакопеременная мера имеет плотность, тождественно равную нулю. Импликация 3)  $\implies$  1) следует в два шага. Если выполнено 3), то согласно [10], равенство (11.2) состоятельным образом задает  $\rho(P)$ . Поэтому  $\rho(P)$  удовлетворит (10.6), а значит и (9.10). Отсюда следует 1). Доказательство завершено.

Равенства (11.3) и (11.4) можно легко проверить для двух классических примеров семейств  $\Gamma$ : полукруги в модели Пуанкаре гиперболической плоскости и круговые дуги в модели Кейли-Клейна той же плоскости. В первом случае  $D$  – верхняя полуплоскость, во втором  $D$  – единичный диск. В обоих случаях известно, что гиперболическая метрика поточечно круговая.

**Следствие.** Для всякого регулярного семейства  $\Gamma$  прегеодезических кривых в области  $D$ , лежащей на евклидовой плоскости, функции кривизны которых  $K(P, \alpha)$  удовлетворяют эквивалентным свойствам 2), 3), существует ровно одна (с точностью до постоянного множителя) гладкая  $\Gamma$ -метрика с круговой индикатрисой. Для последней  $\rho(P)$  задается согласно (11.2), где  $\rho(Q_1)$  играет роль постоянного множителя. Значение  $\rho(Q_2)$ , полученное таким способом, не зависит от выбора пути  $\Theta$ , соединяющего  $Q_1$  с  $Q_2$ .

**ABSTRACT.** A family of curves  $\Gamma$  on a two-dimensional manifold is called pregeodesic if the combinatorial behavior of the curves copies the well-known local behavior of the geodesics on a surface. In the paper a class of combinatorial valuations on  $\Gamma$  is defined. A valuation depends on a function  $F(s)$  that maps pregeodesic segments into  $(-\infty, \infty)$ . The main question is: for which functions  $F(s)$  these valuations can be extended to signed measures on  $\Gamma$ ? In case the extension exists and is a nonnegative measure, the function  $F(s)$  becomes a metric for which  $\Gamma$  is the family of geodesics. This observation connects the topic with Hilbert's fourth problem posed for the family  $\Gamma$ . Nonnegativity of the extension (if the latter exists) can be guaranteed by the requirement that the directional indicatrix of  $F(s)$  is convex at each point of the manifold. In the paper a differential equation is derived yielding a necessary and sufficient condition for signed measure generation. The case of circular directional indicatrix (pointwise isotropic  $F(s)$ ) is studied in some detail. Along with several uniqueness results, description of pregeodesic families in Euclidean planar domains which admit geodesic interpretation with respect to a pointwise isotropic metric is given.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. В. Погорелов, Четвертая проблема Гильберта, Наука, М., 1974.
2. R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points," Illinois J. Math., vol. 22, pp. 177 – 190, 1978.
3. R. V. Ambartzumian, "A note on pseudo-metrics on the plane," Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 25 – 31, 1974.
4. Р. В. Амбарцумян, "Заметки о порождении мер в пространстве прямых в  $\mathbb{R}^3$ ", Изв. АН Армении, Математика, том. 27, №5, стр. 1– 21, 1992.

5. R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry*, J. Wiley & Sons, 1982.
6. R. V. Ambartzumian, *Factorization Calculus and Geometric Probability*, Cambridge University Press, 1990.
7. R. V. Ambartzumian, "Measure Generation by Euler functionals," *Adv. Appl. Prob. (SGSA)*, vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
8. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей", *Изв. АН Армении, Математика*, том. 29, №4, стр. 3 — 51, 1994.
9. R. V. Ambartzumian, V. K. Oganian, "Parametric versions of Hilbert's fourth problem", *Israel Journal of Mathematics*, vol. 103, no. 1, pp. 41 — 65, 1998.
10. Г. С. Сукиасян, "Конечно-аддитивные функционалы на плоскости", *Изв. АН Армении, Математика*, том. 29, №4, стр. 75 — 88, 1994.

7 июля 1996

Институт математики  
НАН Армении  
E-mail: rhambart@aua.am