

## КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ, II

В. К. Оганян, А. Н. Давтян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,  
том 31, №4, 1996

Данная работа является продолжением исследования, начатого Р. В. Амбарцумяном и В. К. Оганяном в первой статье под тем же названием (настоящий журнал, том 29, №4, стр. 3 – 51, 1994). В статье I был определен класс конечно-аддитивных функционалов (валюаций) в пространстве  $\mathbb{E}$  плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ . Задача состояла в нахождении локальных условий, при которых эти валюации определяют (порождают) знакопеременные меры в  $\mathbb{E}$ . Было замечено, что задача распадается на две части : анализ первого и второго порядков. Предыдущая статья содержит только анализ первого порядка : были найдены необходимые локальные условия в терминах “флаговых плотностей” от которых зависят валюации. Однако, полное решение требует также и анализа второго порядка. Настоящая статья заполняет этот пробел и дает необходимые и достаточные локальные условия порождения мер.

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из находок комбинаторной интегральной геометрии [1], [2] есть класс конечно-аддитивных функционалов (валюаций), определенных на кольце  $U$  в пространстве  $\mathbb{E}$  плоскостей в  $\mathbb{R}^3$  (кольцо  $U$  определяется ниже). На первом этапе использование этих валюаций было ограничено представлением мер на множествах из  $U$  : это часто приводило к существенному упрощению вычисления геометрических вероятностей. Как часть широкого исследования понять вопросы продолжения мер в контексте комбинаторной интегральной геометрии (см. [4] — [8] и две другие статьи этого тома), Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян начали в [3] изучение валюаций на  $U$  как инструмент порождения знакопеременных мер в пространстве  $\mathbb{E}$ . Так как рассматриваемые валюации зависели от флаговых

плотностей, то основным вопросом был : какие флаговые плотности порождают знакопеременные меры в пространстве  $\mathbb{E}$ ? В [3] было отмечено, что задача распадается на две части : анализ первого и второго порядков. Выполненный в [3] анализ первого порядка привел к некоторым необходимым локальным условиям в терминах флаговых плотностей. Настоящая статья представляет анализ второго порядка, который отсутствовал в первой статье. Вместе с этим проблема получает полное решение, т.е. получены необходимые и достаточные локальные условия порождения меры.

Ниже в этом введении мы даем необходимые определения и кратко напоминаем основные результаты статьи [3].

Пусть задано конечное множество точек  $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ , содержащее не менее двух точек. Каждая плоскость, не содержащая точек  $P_i$ , производит разбиение множества  $\{P_i\}$  на два подмножества. Две плоскости, не содержащие точек из  $P_i$ , мы называем эквивалентными, если они индуцируют одно и то же разбиение множества  $\{P_i\}$ . Множество эквивалентных плоскостей мы называем атомом, если его замыкание компактно.

**Определение 1.** Для заданного множества  $\{P_i\}$ , обозначим через  $r\{P_i\}$  минимальное кольцо подмножеств  $\mathbb{E}$  содержащее все атомы.

Два множества  $A \in r\{P_i\}$  и  $B \in r\{Q_i\}$  называются эквивалентными, если их симметрическая разность  $A \Delta B$  принадлежит объединению конечного числа пучков. По определению, пучок есть множество  $[P]$  плоскостей проходящих через  $P \in \mathbb{R}^3$ . Определим кольцо подмножеств пространства  $\mathbb{E}$

$$U = \bigcup r\{P_i\},$$

где объединение берется по всем конечным подмножествам  $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$ , содержащим более одной точки.

Флаг  $f$  в  $\mathbb{R}^3$  есть тройка  $(P, \gamma, \epsilon)$ , состоящая из точки  $P \in \mathbb{R}^3$ , прямой  $\gamma$ , проходящей через точку  $P$  и определяемой своим пространственным направлением  $\Omega$  и плоскости  $\epsilon$  (плоскость флага  $f$ ) через  $\gamma$ , определяемой углом поворота  $\phi$  вокруг оси  $\gamma$ . Мы пишем

$$f = (P, \Omega, \phi), \quad P \in \mathbb{R}^3, \quad \Omega \in \mathcal{E}_2, \quad \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega),$$

где  $\mathcal{E}_2$  — проективная (или эллиптическая) плоскость,  $\mathcal{E}_1(\Omega) = \mathcal{E}_1(\gamma)$  — окружность длины  $\pi$ , представляющая пространство плоских направлений ортогональных к  $\gamma$ . Пространство флагов в  $\mathbb{R}^3$  обозначим через  $\mathcal{F}$ . Интерпретация флага как тройки замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^3$  индуцирует топологию в  $\mathcal{F}$ . Последняя определяется как след топологии, индуцированной стандартной топологией в пространстве троек замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^3$ .

Подчеркнем, что пространство  $\mathcal{F}$  есть произведение  $\mathbb{R}^3 \times \nabla$ , где  $\nabla$  есть пространство свободных флагов. Мы представляем флаг  $f$  как пару  $f = (P, \Lambda)$ , где  $P \in \mathbb{R}^3$ ,  $\Lambda = (\Omega, \phi)$  есть свободный флаг для  $f$ . Мы будем использовать представление свободных флагов в виде  $\Lambda = (\omega, \varphi)$  в терминах параметров дуальных к  $\Omega, \phi$ :

$\omega$  — направленная нормаль к плоскости флага  $f$ ,  $\omega \in \mathcal{E}_2$ ;

$\varphi$  — плоское направление в плоскости флага  $f$ , соответствующее  $\Omega$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$ .

Согласно этому флаг  $f \in \mathcal{F}$  можно представить как  $f = (P, \omega, \varphi) = (P, \epsilon, g)$ , где  $\epsilon$  — плоскость, содержащая  $P$ , нормальное направление которой есть  $\omega$  и  $g$  — прямая в  $\epsilon$ , содержащая  $P$  и с направлением  $\varphi$ .

Рассмотрим семейство флагов зависящих от прямой  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{F}_\gamma = \{f: P \in \gamma, \Omega \text{ совпадает с направлением прямой } \gamma, \phi \in \mathcal{E}_1(\Omega)\}. \quad (1.1)$$

Простейшие множества из  $\mathcal{F}_\gamma$  имеют форму произведения

$$\omega = \nu \times \lambda, \quad (1.2)$$

где  $\nu \subset \gamma$  есть замкнутый интервал и  $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$  — замкнутая дуга (длины, не превосходящей  $\pi$ ).

Множества (1.2) называются клиньями. Пусть  $e(\gamma, \phi)$  есть плоскость, проходящая через прямую  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  и повернутая на угол  $\phi \in \mathcal{E}_1(\gamma)$ .

Для заданной прямой  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  и замкнутой дуги  $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$  положим

$$V = \bigcup_{\phi \in \lambda} e(\gamma, \phi) \subset \mathbb{R}^3. \quad (1.3)$$

Это дает следующее эквивалентное определение клина : Клин есть пара  $w = (\nu, V)$ , где  $\nu \subset \gamma$  — игла, а  $V$  соответствует некоторому  $\lambda \subset \mathcal{E}_1(\gamma)$ . Эта интерпретация клина как пары замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^3$  позволяет определить топологию в пространстве клиньев. Последняя определяется как след топологии индуцированной стандартной топологией в пространстве пар замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^3$ .

Рассмотрим непрерывные функции  $F(w)$  определенные в пространстве клиньев. Функция  $F(w)$  аддитивна, если из  $w = w_1 \cup w_2$ ,  $\text{int}w_1 \cap \text{int}w_2 = \emptyset$  следует  $F(w) = F(w_1) + F(w_2)$ .

Приведем пример непрерывной и аддитивной функции клина.

Знакопеременная мера  $m$  в  $\mathbb{E}$  называется беспучковой, если значение меры  $m$  на любом пучке  $[P]$  равно нулю, т.е.

$$m([P]) = 0 \quad \text{для любой точки } P \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть  $m$  — знакопеременная мера в пространстве  $\mathbb{E}$ . Для клина  $w = (\nu, V)$  обозначим через  $|V \cap e|$  угол (радианную меру множества направлений в  $e$ ) плоской области  $V \cap e$ . Интеграл

$$F(w) = \int_{[\nu]} |V \cap e| m(de) \quad (1.4)$$

по множеству  $[\nu]$  плоскостей, пересекающих  $\nu$ , есть непрерывная аддитивная функция клина.

Следующая теорема была сформулирована в [1], [2] для неотрицательных мер. Настоящее обобщение на знакопеременные меры есть непосредственное следствие (см. также [8], [3]). Для заданного конечного множества точек  $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$  определим множество  $W\{P_i\}$  клиньев, ассоциированных с  $\{P_i\}$ :

клин  $w = (v, V)$  принадлежит  $W\{P_i\}$  тогда и только тогда, когда концы отрезка  $v$  принадлежат  $\{P_i\}$ , каждая из двух плоскостей, ограничивающих  $V$ , содержит точки из  $\{P_i\}$  и внутренность  $V$  не содержит точек из  $\{P_i\}$ .

**Теорема 1.** (Р. В. Амбарцумян) Пусть  $m$  — беспучковая знакопеременная мера в пространстве  $\mathbb{E}$ ,  $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$  — произвольное конечное множество точек. Для любого  $A \in \tau\{P_i\}$  величина  $m(A)$  может быть представлена в виде

$$m(A) = \sum c_s(A) F(w_s), \quad (1.5)$$

где сумма распространена на множество  $W\{P_i\}$  клиньев, ассоциированных с  $\{P_i\}$ ,  $F$  есть функция клина (1.4), коэффициенты  $c_s(A)$  — целые числа не зависящие от выбора меры  $m$ .

Комбинаторный алгоритм для вычисления целочисленных коэффициентов  $c_s(A)$  в (1.5) можно найти в [1] и [3].

Рассмотрим пример, который будет использован ниже.

**Пример 1.** Пусть  $\tau$  — ограниченный выпуклый многоугольник на плоскости  $e \subset \mathbb{R}^3$  с вершинами  $v_1, \dots, v_n$ . Пусть  $Q$  — точка вне плоскости  $e$ . Пару  $(Q, \tau)$  мы называем пирамидой с вершиной  $Q$  и с основанием  $\tau$ . Обозначим через  $K$  выпуклую оболочку  $\tau$  и  $Q$ . Мы хотим записать (1.5) для пирамидального множества

$$A = Q|v_1, \dots, v_n = Q|\tau = \{e \in \mathbb{E}: e \text{ отделяет } Q \text{ от } \tau\}.$$

Рассмотрим клинья  $w_s$ , ассоциированные с  $\{P_i\} = \{Q, v_1, \dots, v_n\}$ . Ребро пирамиды  $K$  назовем боковым, если оно имеет тип  $Qv_i$ , и базовым, если оно имеет

тип  $v_i v_j$ . Клинь  $w_s = (\text{ребро}, V)$  называется опорным, если  $V \cap \text{int } K = \emptyset$ , и покрывающим, если  $\text{int } K \subset V$ . Будем писать  $w_s \in \text{sl}$ , если  $w_s$  является опорным клином на боковом ребре, и  $w_s \in \text{cb}$ , если  $w_s$  – покрывающий клин на базовом ребре.

Используя алгоритм получаем

$$m(Q | v_1, \dots, v_n) = \sum_{\text{sl}} F(w_s) - \sum_{\text{cb}} F(w_s). \quad (1.6)$$

Разность в правой части (1.6) будем называть *пирамидальным эксцессом*.

Пусть  $F(w)$  — непрерывная функция, заданная в пространстве клиньев. Каждому множеству  $\{P_i\}$  и каждому кольцу  $A \in \tau\{P_i\}$  сопоставим

$$\Psi(A) = \sum_{w_s \in W\{P_i\}} c_s(A) F(w_s), \quad (1.7)$$

где  $c_s(A)$  вычислены согласно комбинаторному алгоритму из [1], [3].

Следующее предложение доказано в [3] (Леммы 6 и 7 из [3]):

Если функция клина  $F(w)$  непрерывна и аддитивна, то  $\Psi(A)$ , заданная по (1.7), определяет валюацию на кольце  $U$ .

Любая непрерывная функция  $\rho(f)$ , заданная в пространстве  $\mathcal{F}$  флагов, порождает функцию клина  $F(w)$  по формуле

$$F(w) = \int_w \rho(f) df. \quad (1.8)$$

Выше  $df$  — единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на  $\mathcal{F}_\gamma$ , инвариантная относительно евклидовых сдвигов и вращений вокруг  $\gamma$ :  $df = dl d\phi$ , где  $dl$  — элемент длины на  $\gamma$ , а  $d\phi$  — элемент равномерной угловой меры.

Функцию  $\rho(f): \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть флаговой функцией или флаговой плотностью, если ею по формулам (1.7), (1.8) порождается валюация  $\Psi$ . Из результатов [3] следует, что существуют флаговые плотности даже из класса гладкости  $C^{(\infty)}$ , которые не порождают знакопеременную меру по формулам (1.7), (1.8).

**Определение 2.** Последовательность пирамид  $(Q_s, \tau_s)$  называется асимптотически плоской, если

1) все пирамиды имеют общее основание  $\tau$ , т.е.  $\tau_n \equiv \tau$ ;

2) все вершины  $Q_n$  лежат на прямой, проходящей через некоторую точку  $Q_0 \in \text{int}\tau$ , в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью, содержащей  $\tau$ ;

3) расстояние  $h_n = |Q_n Q_0|$  монотонно стремится к нулю.

Для заданной последовательности асимптотически плоских пирамид, рассмотрим последовательность пирамидальных множеств  $\{Q_s | \tau\}$ .

**Теорема 2** (Р. В. Амбарцумян и В. К. Оганян (см. [3])). Пусть  $\Psi$  — валюация на  $U$ , порожденная флаговой плотностью  $\rho \in C^{(3)}$  по формулам (1.7), (1.8).

Если для каждой последовательности асимптотически плоских пирамид  $(Q_s, \tau_s)$  пирамидальные эксцессы (см. (1.6)) удовлетворяют условиям

$$\lim h_s^{-2} \Psi(Q_s | \tau) = 0, \tag{1.9}$$

то существует единственная локально-конечная знакопеременная мера  $\tau$  в  $\mathbb{E}$ , сужение которой на  $U$  есть  $\Psi$  (кратко:  $\Psi$  есть локально-конечная знакопеременная мера в  $\mathbb{E}$ ).

Уравнения (1.9) можно интерпретировать в терминах разложения Тейлора для  $\Psi(Q_s | \tau)$ . Ниже будем использовать обозначение

$$\Psi(Q_s | \tau) = \Psi_1(h_s).$$

Используя непрерывность  $F(w)$  из (1.6) получаем

$$\Psi_1(0) = 0. \tag{1.10}$$

Следовательно, условие (1.9) эквивалентно следующим условиям:

$$\frac{d\Psi_1(0)}{dh} = 0, \tag{1.11}$$

$$\frac{d^2\Psi_1(0)}{dh^2} = 0. \quad (1.12)$$

Изучение аналитических следствий уравнения (1.11) (т.е. анализ первого порядка) привело (см. [3]) к результату, который мы воспроизводим в теореме 3.

В Теореме 3 и всюду ниже  $\frac{\partial}{\partial_x P}$  будет обозначать дифференцирование по аргументу  $P$  в направлении оси  $x$ .  $(\varphi, x)$  есть угол между направлением  $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$  и осью  $x$  на плоскости  $e_f$  флага  $f = (P, \omega, \varphi)$ ;  $\Lambda_x$  есть свободный флаг  $(\omega, \text{ось} - x)$ .

**Теорема 3.** Пусть на каждой плоскости  $e \in \mathbb{E}$  выбраны декартовы координаты  $(x, y)$ . Функция флага  $\rho \in C^{(3)}$  удовлетворяет условию первого порядка (1.11) тогда и только тогда, когда для любой точки  $P \in \mathbb{R}^3$  и  $\omega \in \mathcal{E}_2$  функция  $\rho$  имеет тригонометрический вид

$$\rho(P, \omega, \varphi) = A(P, \Lambda_x) \sin 2(\varphi, x) + B(P, \Lambda_x) \cos 2(\varphi, x) + C(P, \omega) \quad (1.13)$$

и сужение функций  $A, B, C$  на любую плоскость  $e$ , ортогональную направлению  $\omega$ , удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$2 \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} - \left( \frac{\partial^2 C}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2 C}{(\partial_y P)^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 B}{(\partial_x P)^2} - \frac{\partial^2 B}{(\partial_y P)^2} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Левая часть (1.14) не зависит от выбора системы декартовых координат на плоскости  $e_f$ .

Однако по Теореме 2 полное решение задачи требует изучения условия (1.12) (анализ второго порядка). В нижеследующих параграфах мы будем изучать условие (1.12), при условии, что выполнено условие (1.11) или, эквивалентно, Теорема 3.

Список некоторых обозначений часто используемых при анализе второго порядка:

$\tau$  — многоугольное основание ассимптотически плоских пирамид;

$\omega$  — направление нормальное к плоскости  $\tau$ ,  $\omega \in \mathcal{E}_2$ ;

$Q_0$  — точка в  $\text{int } \tau$ , предел последовательности вершин пирамид;

$Q$  — переменная точка на перпендикуляре из точки  $Q_0$  к плоскости  $\tau$ ;

$x, y, z$  — декартовы координаты в  $\mathbb{R}^3$  с началом координат в  $O = Q_0$ , ось  $z$  ортогональна к  $\tau$ ;

$(v, \Phi)$  — “двуугольник” в плоскости  $\tau$ , т.е. множество на плоскости, представимое как объединение прямых, проходящих через точку  $v$  с направлениями заполняющими дугу  $\Phi$  (см. Рис. 1 б));

$v_1, \dots, v_n$  — вершины многоугольника  $\tau$ ;

$b_1, \dots, b_n$  — стороны многоугольника  $\tau$  (основания пирамиды) или их длины;

$\beta_i$  — плоские углы между  $\tau$  и плоскостью, проходящей через  $b_i$  и  $Q$ ;

$L_1, \dots, L_n$  — боковые ребра пирамиды  $(Q, \tau)$  (или их длины);

$(r, \varphi)$  — полярные координаты точки  $v$  на плоскости  $\tau$  с началом координат в  $O = Q_0$ ,  $\varphi = 0$  совпадает с направлением оси  $x$ ;

$r_i$  — отрезок, соединяющий  $Q_0$  с вершиной  $v_i$  (или его длина);

$dl$  — мера длины на  $\tau$ ;

$S_2$  — пространство ориентированных направлений (единичная сфера) в  $\mathbb{R}^3$ ;

$b$  — отрезок в плоскости  $\tau$ , направление которого не содержит  $O$ ;

$b^*$  — ориентированный вариант отрезка  $b$ : по определению,  $O$  лежит в левой полуплоскости относительно  $b^*$ ;

$p$  — расстояние от  $O$  до прямой, содержащей отрезок  $b$ ;

$\Lambda_x$  — свободный флаг  $(\omega, \text{ось} - x)$ ;

$(l, r, \tau)$  — флаг  $f = (P, \gamma, e)$  с  $P$  на  $r$ ,  $\gamma = r$  и  $e = \tau$ ;

$((x, y), \omega, \varphi)$  — флаг с  $P = (x, y) \in \tau$ , записанный в дуальных координатах;

$\frac{\partial}{\partial \eta P}$  — дифференцирование по аргументу  $P$  в направлении оси  $\eta$ ;

$\frac{\partial}{\partial \eta \Lambda}$  — дифференцирование по аргументу  $\Lambda$  соответствующее положитель-

ному вращению вокруг оси  $\eta$ .

Положительное направление вращения вокруг  $\eta \in S_2$  определим согласно правилу правого буравчика. Направление оси  $z$  определяет таким путем ориентацию многоугольника  $\tau$ , в частности, направления сторон  $b_i^* \in S_2$  многоугольника  $\tau$ .

$\rho'(f; g)$  — производная функции флага  $\rho(f)$  относительно оси  $g$ . Эта производная определяется следующим образом: пусть  $r$  — положительное вращение пространства  $\mathbb{R}^3$  вокруг  $g$  на угол  $\sigma$ . Тогда

$$\rho'(f; g) = \left. \frac{d\rho(rf)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}. \quad (1.15)$$

## §2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ $\frac{d^2\Psi_1(0)}{dh^2}$

В этом параграфе мы рассматриваем систему декартовых координат, связанную с  $\tau$  и  $Q_0$ . Начало координат  $O$  выбираем совпадающим с  $Q_0$ , а плоскость  $z = 0$  совпадает с плоскостью  $\tau$ . Естественно, на плоскости, содержащей  $\tau$ , мы имеем координаты  $x, y$ .

Рассмотрим (1.12), предполагая, что  $\{Q_s\}$  принадлежат полупространству  $z > 0$ .

Очевидно  $\frac{d^2\Psi_1(0)}{dh^2} = \left. \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_\Omega Q)^2} \right|_{Q=Q_0}$  где  $\frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_\Omega Q)^2}$  есть вторая производная  $\Psi(Q|\tau)$ , взятая в направлении  $\Omega$  прямой, содержащей вершины  $\{Q_s\}$ . Используя стандартные формулы дифференцирования, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_\Omega Q)^2} &= \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_x Q)^2} \cos^2(\Omega, x) + 2 \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{\partial_x Q \partial_z Q} \cos(\Omega, x) \cos(\Omega, z) + \\ &+ \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_z Q)^2} \cos^2(\Omega, z), \end{aligned}$$

где  $\frac{\partial}{\partial_x Q}$  мы предполагаем для простоты, что проекция  $\Omega$  на плоскость  $z = 0$  совпадает с направлением оси  $x$ .

Так как  $\Psi_1(0) = 0$  для всех точек  $Q_0 \in \tau$ , отсюда следует, что  $\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2\Psi(Q|\tau)}{(\partial_x Q)^2} =$

0. Уравнение (1.11) означает, что

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial\Psi(Q|\tau)}{\partial_x Q} = 0 \quad \text{для любого } Q_0 \in \tau$$

и влечет

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2 \Psi(Q|\tau)}{\partial_x Q \partial_x Q} = 0.$$

Так как функция флага  $\rho$  удовлетворяет (1.12), следует, что

$$\lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2 \Psi(Q|\tau)}{(\partial_\Omega Q)^2} = 0 \iff \lim_{Q \rightarrow Q_0} \frac{\partial^2 \Psi(Q|\tau)}{(\partial_x Q)^2} = 0.$$

Следовательно, не умаляя общности мы можем предположить, что прямая, содержащая последовательность  $\{Q_n\}$ , перпендикулярна к  $\tau$  в точке  $Q_0$ .

Мы используем обозначения (часть из них суть версии обозначений предыдущего списка) :

$\Phi_i$  — внешний угол многоугольника  $\tau$  при вершине  $v_i$  ;

$\xi_i$  — направление в  $\Phi_i$  ;

$d\xi$  — мера на  $\Phi$ , инвариантная относительно вращений ;

$(\xi_i, r_i)$  — угол между  $\xi_i$  и  $r_i$ , измеряемый из  $r_i$  против часовой стрелки ;

$r_i$  — расстояние от  $Q_0$  до прямой, содержащей  $b_i$  ;

Пусть  $w_i$  —  $sl$  клин (см. (1.6)) и пусть  $(l, \phi)$  — координаты флага из  $w_i$ , использованные в (1.8). Сделаем замену переменной  $\phi \rightarrow \xi_i$ . Используя стандартную формулу из сферической тригонометрии, получаем, что соответствующий якобиан имеет следующий асимптотический ( $h \rightarrow 0$ ) вид :

$$\left| \frac{d\phi}{d\xi_i} \right| = \frac{h}{r_i \sin^2(\xi_i, r_i)} + o(h^2). \tag{2.1}$$

Теперь уравнение (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(h) &= h \sum_i \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{r_i \sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{L_i} \rho dl - \sum_i \int_{b_i} dl \int_0^{\beta_i} \rho d\phi + o(h^2) = \\ &= E_1(h, \tau) - E_2(h, \tau) + o(h^2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$E_1(h, \tau) = h \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{L_i} \rho(l, L_i, \xi_i) dl \tag{2.3}$$

и

$$E_2(h, \tau) = \sum_{b_i} \int_{b_i} dl \int_0^{\beta_i} \rho(l, b_i, \phi) d\phi. \quad (2.4)$$

В (2.3) тройка  $l, L_i, \xi_i$  определяет флаг  $f = (P, \Omega, \phi)$ , где  $P$  — точка на  $L_i$  на расстоянии  $l$  от  $v_i$ ,  $\Omega$  — пространственное направление  $L_i$  и  $\phi$  соответствует  $\xi_i$ ; В (2.4) тройка  $l, b_i, \phi$  определяет флаг  $f = (P, \Omega, \phi)$ , где  $P$  — точка на  $b_i$  на расстоянии  $l$  от  $v_i$ ,  $\Omega$  — пространственное направление  $b_i$ ; В (2.4) так  $\beta_i = h/p_i$  и границы  $\phi = 0$  и  $\phi = \beta_i$  соответствуют плоскости  $\tau$  и плоскости, содержащей  $Q$  и  $b_i$ .

Нашей целью является получение точного выражения для слагаемых, пропорциональных  $h^2$  в разложении Тейлора формулы (2.2). Мы начинаем с  $E_1(h, \tau)$ . Так как присутствует множитель  $h$  в (2.3), то достаточно рассмотреть первые два слагаемых в разложении Тейлора для  $\rho(l, L_i, \xi_i)$ . Для этой цели рассмотрим положительные вращения  $\tau$  вокруг оси  $g(\xi_i^*) : g(\xi_i^*)$  — опорная ось многоугольника  $\tau$  через вершину  $v_i$ , направление которой  $\xi_i^* \in S_2$ . Действительно,  $\xi_i^*$ , направленная версия  $\xi_i \in \Phi_i$ , выбранная таким образом, чтобы  $\tau$  оставалась бы в левой полуплоскости относительно  $g(\xi_i^*)$ .

Мы пишем (см. (1.15))

$$\rho'((l, r_i, \tau); \xi_i) = \rho'((l, r_i, \tau); g(\xi_i^*)). \quad (2.5)$$

Разложение Тейлора имеет вид

$$\rho(l, L_i, \xi_i) = \rho(l, r_i, \tau) + \rho'((l, r_i, \tau); \xi_i) \frac{h}{r_i \sin(\xi_i, r_i)} + O(h^2). \quad (2.6)$$

Заметим, что флаг  $(l, r_i, \tau)$ , предельный (при  $h \rightarrow 0$ ) для флагов  $(l, L_i, \xi_i)$ .

Имеем

$$\int_{L_i} \rho(l, r_i, \tau) dl = \int_{r_i} \rho(l, r_i, \tau) dl + O(h^2),$$

откуда следует

$$E_1(h, \tau) = h \sum_{v_i} \frac{1}{r_i} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_0^{r_i} \rho(l, r_i, \tau) dl + h^2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl + o(h^2), \quad (2.7)$$

где

$$\Theta_i(l) = \int_{\neq i} \rho'((l, \tau_i, \tau); \xi_i) \frac{d\xi_i}{\sin^3(\xi_i, \tau_i)}. \quad (2.8)$$

Окончательно имеем

$$\left. \frac{\partial^2 E_1(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0} = 2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl. \quad (2.9)$$

Теперь найдем  $\left. \frac{\partial^2 E_2(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0}$  (см. (2.4)). Имеем (см. (1.15))

$$\rho'((l, b_i, \tau)) = \rho'((l, b_i, \tau); b_i^*).$$

Вид первых двух слагаемых в разложении Тейлора имеют вид

$$\rho(l, b_i, \phi) = \rho(l, b_i, \tau) + \rho'((l, b_i, \tau)) \phi + O(\phi^2).$$

Отсюда следует

$$E_2(h, \tau) = \sum_{b_i} \beta_i \int_{b_i} \rho(l, b_i, \tau) dl + \sum_{b_i} \frac{\beta_i^2}{2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl + o(h^2).$$

Так как  $\beta_i = h/p_i + o(h^2)$ , мы находим

$$\left. \frac{\partial^2 E_2(h, \tau)}{\partial h^2} \right|_{h=0} = \sum_{b_i} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl. \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.10) и (2.2) получаем следующую переформулировку уравнения (1.12).

**Предложение 1.** Уравнение (1.12) эквивалентно условию

$$E(Q_0, \tau) = 2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl - \sum_{b_i} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl = 0, \quad (2.11)$$

которое должно выполняться для любого многоугольника  $\tau$  и любой точки  $Q_0 \in \tau$ .

### §3. ВАЛЮАЦИИ НА ПЛОСКОСТИ $\tau$

Уравнение (2.11) предлагает конструкцию двух валюаций, определенных на классе выпуклых многоугольников на плоскости  $\tau$ . Их комбинаторная структура повторяет плоские валюации, рассмотренные в [3], §10. Целью является получение множества условий, эквивалентных условию (2.11).

Мы рассматриваем два выражения, которые имеются в правой части (2.11) :

$$E_1(Q_0, \tau) = 2 \sum_{v_i} \frac{1}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl$$

и

$$E_2(Q_0, \tau) = \sum_{b_i} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl.$$

В этом и следующем параграфе плоскость, содержащую  $\tau$  мы будем обозначать  $\mathbb{R}^2$ . Из  $\mathbb{R}^3$  на  $\mathbb{R}^2$  наследуется прямоугольная система координат  $x, y$  с центром в точке  $O = Q_0$ . Через  $\tau_3$  мы будем обозначать треугольники, а через  $\tau_4$  четырехугольники на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

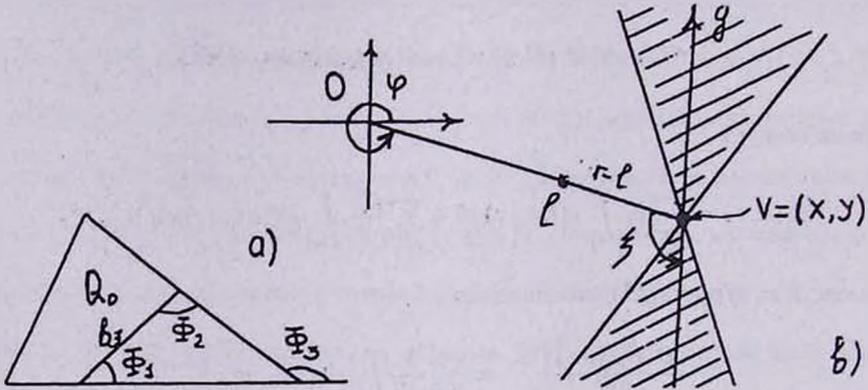


Рис. 1. Заштрихованная область в б) соответствует двугольнику с вершиной в точке  $v$ .

Пусть  $\tau_3$  - большой треугольник, показанный на Рис. 1, а).  $\tau'_3$  - треугольная часть  $\tau_3$ , не содержащая  $O$ ,  $\tau_4 = \tau_3 \setminus \tau'_3$ . Ясно, что

$$E_1(\tau'_3) = E_1(Q_0, \tau_3) - E_1(Q_0, \tau_4) = 2 \frac{1}{r_3^2} \int_0^{r_3} \Theta_3(l) dl - \sum_{i=1,2} \frac{2}{r_i^2} \int_0^{r_i} \Theta_i(l) dl,$$

где  $\Theta_i(l)$  определяется по (2.8), соответствующие углы  $\Phi_i$  (от которых зависит  $\Theta_i(l)$ ) показаны на Рис. 1, б).

Аналогично получаем

$$E_2(\tau'_3) = E_2(Q_0, \tau_3) - E_2(Q_0, \tau_4) = \sum_{\substack{b_i \\ i=1,2}} \frac{1}{p_i^2} \int_{b_i} \rho'((l, b_i, \tau)) dl - \frac{1}{p_3^2} \int_{b_3} \rho'((l, b_3, \tau)) dl.$$

Этот принцип вычитания используется для получения валюаций определенных на классе  $C_2$  выпуклых ограниченных многоугольников  $\tau \subset \mathbb{R}^2$ .

$$C_2 = \{\tau: O \notin \text{int } \tau, \text{ продолжения сторон многоугольника } \tau \text{ не содержат } O\}.$$

Они выражаются в терминах функций  $G_1(v, \phi)$  и  $G_2(b)$ , заданных в пространстве двуугольников (см. Рис. 1, б)) и отрезков  $b$  в  $\mathbb{R}^2$  соответственно. Рассмотрим функцию  $G_1$ , определенную на двуугольниках

$$G_1(v, \phi) = \frac{2}{r^2} \int_r \Theta(l) dl, \tag{3.1}$$

где  $r$  — отрезок, соединяющий  $O$  и  $v$ , и для  $l \in r$

$$\Theta(l) = \int_{\phi} \rho'((l, r, \tau); \xi) \frac{d\xi}{\sin^3(\xi, r)}, \tag{3.2}$$

где для краткости (сравните с (2.5))  $\rho'((l, r, \tau); \xi) = \rho'((l, r, \tau); g)$ ,  $g$  — ось в плоскости  $\tau$ , содержащая  $v$ , направление оси совпадает с  $\xi$  и которая оставляет  $O$  в левой полуплоскости (см. Рис. 1 б)). Последний интеграл сходится, так как замыкание двуугольника  $(v, \phi)$  не содержит  $O$ .

Мы также определяем функцию отрезка (ср. с (2.10))

$$G_2(b) = \frac{1}{p^2} \int_b \rho'((l, b, \tau)) dl, \tag{3.3}$$

где  $\rho'((l, b, \tau)) = \rho'((l, b, \tau); b^*)$ .

**Определение 3.** Для многоугольника  $\tau \in C_2$

$$E_1(\tau) = \sum_1 G_1(v_i, \Phi_i) - \sum_2 G_1(v_i, \Phi_i^c), \tag{3.4}$$

$$E_2(\tau) = \sum_3 G_2(b_i) - \sum_4 G_2(b_i). \tag{3.5}$$

В (3.4)  $\Phi_i$  обозначают внешние углы многоугольника  $\tau$ ,  $\Phi_i^c$  — их дополнения (внутренние углы многоугольника  $\tau$ ), сумма  $\sum_1$  распространяется на вершины

$\tau$ , для которых *внутренний двугольник* содержит  $O$ ,  $\sum_2$  взята по дополнительному множеству вершин. По определению, *внутренний двугольник* многоугольника  $\tau$  соответствует вершине  $v_i$  и внутреннему углу  $\tau$  в  $v_i$ . В (3.5)  $\sum_3$  взята по сторонам  $b_i$ , чьи продолжения не разделяют  $O$  от внешности  $\tau$ , а  $\sum_4$  взята по дополнению этого множества.

Представляют интерес значения  $E_1$  и  $E_2$  на треугольниках и четырехугольниках из классов

$$\Delta =$$

$$= \{ \text{прямоугольный треугольник из } \mathbf{C}_2 \text{ с катетами параллельными } x \text{ и } y \text{ осям} \},$$

$$\Xi = \{ \text{прямоугольники из } \mathbf{C}_2 \text{ со сторонами, параллельными } x \text{ и } y \text{ осям} \}.$$

Эти выражения как и описание классов  $\Delta$  и  $\Xi$  были впервые введены в [3].

Для треугольника  $\tau_3 \in \Delta$  определим следующие параметры :

$P = (x, y)$  — вершина прямого угла ;

$\alpha \in (0, \pi)$  — направление гипотенузы ;

$\gamma \in (0, 2\pi)$  — направление перпендикуляра из  $P$  на гипотенузу ;

$c$  — длина гипотенузы.

Мы всегда имеем

$$\gamma = \alpha + (-1)^k \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1$$

и вместо  $\gamma$  мы будем использовать параметр  $k$ , принимающий два значения.

Определим *положительные направления* на катетах треугольников  $\tau_3 \in \Delta$  так, чтобы они совпадали, соответственно, с направлениями осей  $x$  и  $y$ . Через  $H$  и  $T$  будем обозначать соответственно *головной* и *хвостовой* концы данного катета. Верхние индексы 1, 2 к  $H$  или  $T$  будут относиться к катетам, параллельным, соответственно, осям  $x$  и  $y$ .

Для треугольника  $\tau_3 \in \Delta$  уравнение (3.4) может быть записано в виде

$$E_1(\tau_3) = z_1 [G_1(H_1, Z_1) - G_1(T_1, Z_1)] + z_2 [G_1(H_2, Z_2) - G_1(T_2, Z_2)]. \quad (3.6)$$

Здесь каждое множество  $Z_i \subset (0, \pi)$  является интервалом, либо же объединением двух интервалов.

В Таблице 1 указана зависимость  $Z_1, Z_2; z_1$  и  $z_2$  от параметров  $P, \alpha$  и  $k$  треугольника  $\tau_3 \in \Delta$ . Таблица записана для малых  $s$ , а точнее, для значений  $s$ , при которых замыкание  $\tau_3$  не пересекается с координатными осями или прямой, проходящей через  $O$  по направлению  $\alpha$ . Римские цифры первого столбца соответствуют двугольным областям на Рис. 2.

Таблица 1 ( $k = 0$ )

$P \in \text{int}$	$\alpha \in$	$Z_1$	$Z_2$	$z_1$	$z_2$
I	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\alpha, \pi)$	$(\alpha, \frac{\pi}{2})$	-1	-1
II	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, \alpha)$	$(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (0, \alpha)$	+1	+1
III	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, \alpha)$	$(\alpha, \frac{\pi}{2})$	+1	-1
IV	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(0, \alpha)$	$(\frac{\pi}{2}, \alpha)$	-1	+1
V	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\alpha, \pi)$	$(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\alpha, \pi)$	+1	-1
VI	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\alpha, \pi)$	$(\frac{\pi}{2}, \alpha)$	+1	+1

Мы использовали значения  $Z_i, z_i$  при  $k = 0$ ; при  $k = 1$  множества  $Z_i$  остаются неизменными, а значения  $z_i$  меняют знаки.

Представление аналогичное (3.6) можно записать для  $E_2(\tau_3), \tau_3 \in \Delta$ . Обозначим через  $b_1, b_2$  катеты треугольника  $\tau_3$ , параллельные осям  $x$  или  $y$  соответственно, а через  $b_3$  его гипотенузу. Имеем

$$E_2(\tau_3) = t_1 G_2(b_1) + t_2 G_2(b_2) + t_3 G_2(b_3), \tag{3.7}$$

где

$$t_1 = (-1)^k \text{sign}(-y \cos \alpha), t_2 = (-1)^k \text{sign}(x), t_3 = (-1)^k \text{sign}(y \cos \alpha - x \sin \alpha). \tag{3.8}$$

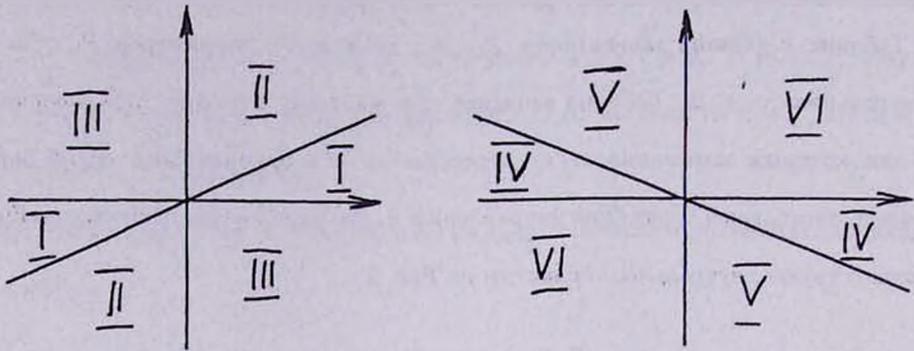


Рис. 2.

Прямоугольник  $\tau_4 \in \Xi$  будем задавать параметрами :

$(x, y)$  — центр прямоугольника  $\tau_4$  ;

$2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2$  — длины горизонтальной и вертикальной сторон прямоугольника  $\tau_4$  ;

Для прямоугольника  $\tau_4 \in \Xi$  уравнение (3.4) принимает вид

$$E_1(\tau_4) = z [G_1(x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2, Z) + G_1(x - \varepsilon_1, y - \varepsilon_2, Z) - G_1(x + \varepsilon_1, y - \varepsilon_2, Z) - G_1(x - \varepsilon_1, y + \varepsilon_2, Z)]. \quad (3.9)$$

В случае, когда  $\tau_4$  не пересекается с координатными плоскостями, для  $z$  и  $Z$  имеем таблицу.

Таблица 2

$$z = -1, Z = (0, \frac{\pi}{2}), \text{ если } x \cdot y < 0$$

$$z = 1, Z = (\frac{\pi}{2}, \pi), \text{ если } x \cdot y > 0.$$

Если  $\tau_4 \in \Xi$  не пересекается с координатными осями, то (3.5) принимает вид

$$E_2(\tau_4) = \text{sign}(y) [G_2(b_1) - G_2(b_2)] + \text{sign}(x) [G_2(b_3) - G_2(b_4)], \quad (3.10)$$

где предполагаем, что  $b_1, b_2$  параллельны оси  $x$ , проекции которых на ось  $y$  суть  $y + \varepsilon_2$  и  $y - \varepsilon_2$  соответственно. Аналогично,  $b_3, b_4$  параллельны оси  $y$  и проекции  $b_3$  и  $b_4$  на ось  $x$  суть  $x + \varepsilon_1$  и  $x - \varepsilon_2$  соответственно.

Следующее предложение является следствием Предложения 1.

Предложение 2. Функционалы  $E_1$  и  $E_2$  суть валюции на классе  $C_2$ . Если уравнение (2.11) удовлетворяется, то для каждого многоугольника  $\tau \in C_2$

$$E_1(\tau) - E_2(\tau) \equiv 0. \quad (3.11)$$

Доказательство : следует из замечания, что каждый многоугольник  $\tau \in C_2$  можно представить как конечную комбинацию выпуклых многоугольников, каждый из которых содержит  $O$ . Записывая (2.11) для всех многоугольников, мы получим (3.11) •

Предложение 3. Пусть валюции  $E_1, E_2$  зависят от флаговой функции  $\rho(f) \in C^{(3)}$ . Пусть  $\tau_3(c)$  — семейство треугольников, соответствующее некоторым фиксированным  $P, \alpha$  и  $k$ . Пусть  $\tau_4(q)$  — семейство прямоугольников, соответствующее некоторому фиксированному  $P$ , и  $q$  есть площадь прямоугольника  $\tau_4(q)$ . Если всегда

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{E_1(\tau_3(c)) - E_2(\tau_3(c))}{c} = 0, \quad (3.12)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{E_1(\tau_4(q)) - E_2(\tau_4(q))}{q} = 0 \quad (3.13)$$

то  $E_1(\tau) - E_2(\tau)$  тождественно равно нулю на  $C_2$ .

Мы опускаем доказательство, которое повторяет со всеми деталями доказательство аналогичного утверждения параграфа 10 из [3].

Пусть  $\tau_O^{(n)}$  — последовательность выпуклых многоугольников, содержащих  $O$  и стягивающихся к точке  $O$ .

Предложение 4. Соотношения (3.12), (3.13) вместе с

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tau_O^{(n)}) = 0 \quad (3.14)$$

эквивалентны условию (2.11).

§4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ОСЕЙ  $x$  И  $y$ 

Во-первых мы докажем общую лемму, касающуюся дифференцируемых функций  $\rho(\Lambda)$ , определенных в пространстве  $\nabla$  свободных флагов.

Пусть  $r$  — положительное вращение  $S_2$  вокруг оси  $\eta \in S_2$  на угол  $r$ . Для заданного свободного флага  $\Lambda$ , мы лишем  $r\Lambda$  для свободного флага, полученного из  $\Lambda$  вращением  $r$  и полагая

$$\frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial \eta} = \left. \frac{d\rho(r\Lambda)}{dr} \right|_{r=0}. \quad (4.1)$$

Через  $S_1(\omega)$  обозначаем окружность направленных направлений в плоскости, ортогональной  $\omega \in \mathcal{E}_2$ .

**Лемма 1.** (сообщена Р. В. Амбарцумяном) Пусть  $\Lambda$  — свободный флаг с дуальным представлением  $\Lambda = (\omega, \varphi)$ . Предположим, что  $X \in S_1(\omega)$  и  $Y \in S_1(\omega)$  — два ортогональных направления. Для любого третьего направления  $\eta \in S_1(\omega)$  имеет место следующее разложение :

$$\frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial \eta} = \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial X} \cos(\eta, X) + \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial Y} \cos(\eta, Y). \quad (4.2)$$

**Доказательство :** Используя уравнение

$$\rho_\eta(\omega, (\eta, \varphi)) = \rho(\omega, \varphi)$$

определим новую функцию  $\rho_\eta(\omega, (\eta, \varphi))$ , где второй аргумент  $(\eta, \varphi)$  есть угол между  $\eta$  и  $\varphi$ .

Выберем вращение  $r$  и рассмотрим повернутую ось  $r\omega$ . Пусть  $\delta_1, \delta_2 \in S_2$  основания геодезических перпендикуляров из  $r\omega$  на большие окружности, полюсы которых  $Y$  и  $X$  соответственно. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \rho(r\Lambda) - \rho(\Lambda) &= \rho(r\Lambda) - \rho_X(\omega, (X, \varphi)) = \\ &= \rho(r\Lambda) - \rho_X(\omega, (X, \varphi)) + \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) - \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)). \end{aligned}$$

Так как вторые аргументы совпадают при  $r$  (угол вращения  $r$ ) стремящемся к нулю 0, мы имеем

$$\rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) - \rho_X(\omega, (X, \varphi)) = r \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial X} \cos(\eta, X) + o(r). \quad (4.3)$$

Пусть  $\tilde{Y}$  есть полюс большой окружности, проходящей через  $r\omega$  и  $\delta_2$ . Для некоторого направления  $\varphi_1 \in S_2$  имеем

$$\rho(r\Lambda) - \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) = \rho_{\tilde{Y}}(r\omega, (\tilde{Y}, \varphi)) - \rho_{\tilde{Y}}(\delta_2, (\tilde{Y}, \varphi_1)). \quad (4.4)$$

Так как  $r \rightarrow 0$ , то  $\varphi_1$  стремится к  $\varphi$ , оставаясь на окружности с центром в точке  $X$ . В точке  $\varphi$  эта окружность ортогональна большой окружности, содержащей  $X$  и  $Y$ . Так как предельное положение  $\tilde{Y}$  есть  $Y$ , мы заключаем, что в "узком" сферическом треугольнике  $\tilde{Y}, \varphi, \varphi_1$  оба угла сторон  $\varphi, \varphi_1$  стремятся к  $\pi/2$ .

Отсюда следует

$$(\tilde{Y}, \varphi) - (\tilde{Y}, \varphi_1) = o(r).$$

Это замечание позволяет преобразовать (4.4) тем же путем как и (4.3), т.е.

$$\rho(r\Lambda) - \rho_X(\delta_2, (X, \varphi)) = r \frac{\partial \rho(\Lambda)}{\partial Y} \cos(\eta, Y) + o(r).$$

Это завершает доказательство •

Мы пишем  $f = (P, \Lambda)$ , где  $\Lambda$  — свободный флаг флага  $f$  и обозначаем через  $\frac{\partial \rho(f)}{\partial_x P}$  частные производные функции  $\rho$  по аргументу  $P$  в направлении  $x$ . Мы будем использовать запись  $\frac{\partial \rho(f)}{\partial_\eta \Lambda} = \frac{\partial \rho_P(\Lambda)}{\partial \eta}$  (см. (4.1)), где  $\rho_P(\Lambda)$  есть сужение  $\rho(f)$  на множество  $\{f = (P, \Lambda): P \text{ фиксировано}\}$ .

Следствие 1 касается функции двугольника  $G_3$ , определенной по формулам (3.1), (3.2). Для любого  $\xi \in \Phi$  рассмотрим его направленную версию  $\xi^*$ . По определению, прямая содержащая  $v$  с направлением  $\xi^*$ , оставляет  $O$  в левой полуплоскости.

**Следствие 1.** Для любой дифференцируемой функции флага  $\rho$  имеет место следующее разложение (см. (3.2)) :

$$\rho'((l, r, \tau); \xi) = \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x P} (r-l) \sin(\xi, r) + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x \Lambda} \cos(\xi^*, x) + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_y \Lambda} \cos(\xi^*, y), \quad (4.5)$$

где точка  $l \in \tau$  идентифицируется с ее расстоянием от начала координат  $O$  (см. Рис. 1 б)).

**Доказательство :** Наше предположение, что  $\{Q_s\}$  принадлежит оси  $z$  важно для слагаемого  $\frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x Q} (r-l) \sin \xi$ . Вид двух оставшихся слагаемых в (4.5) следует из Лемм 1 и 2, если заметить, что

$$\rho'((l, r, \tau); \xi) = \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial g^*} = \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x Q} (r-l) \sin(\xi, r) + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_{\xi^*} \Lambda},$$

где  $g^*$  есть ось, проходящая через вершину  $v$  с направлением  $\xi^*$ . •

Следующее Следствие 2 касается разложений производных  $\rho'(l, b, \tau)$ , которые возникают в (3.3).

**Следствие 2.** Для флагов  $f = (l, b, \tau)$  имеем

$$\rho'(f) = \frac{\partial \rho(f)}{\partial_x \Lambda} \cos(b^*, x) + \frac{\partial \rho(f)}{\partial_y \Lambda} \cos(b^*, y). \quad (4.6)$$

**Доказательство :** Так как  $l$  принадлежит оси вращения  $b$

$$\rho'(f) = \frac{\partial \rho(f)}{\partial_{b^*} \Lambda}.$$

Теперь (4.6) следует из Леммы 1 •

Функция  $\Theta(l)$  в (3.2) имеет следующее представление :

$$\begin{aligned} \Theta(l) = & \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x P} (r-l) \int_{\Phi} \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_x \Lambda} \int_{\Phi} \frac{\cos(\xi^*, x) d\xi}{\sin^3(\xi, r)} + \\ & + \frac{\partial \rho(l, r, \tau)}{\partial_y \Lambda} \int_{\Phi} \frac{\cos(\xi^*, y) d\xi}{\sin^3(\xi, r)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Доказательство** следует из (2.8) и (4.5) •

§5. ПОЛУЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Мы намерены преобразовать условия (3.12) — (3.14). Начнем с уравнения (3.12).

Асимптотическая ( $c \rightarrow 0$ ) версия формулы (3.6) для фиксированной величины  $\alpha$

имеет вид

$$E_1(\tau_3) = z_1 \frac{\partial G_1(P, Z_1)}{\partial x} \varepsilon_1 + z_2 \frac{\partial G_1(P, Z_2)}{\partial y} \varepsilon_2 + O(c^2), \quad (5.1)$$

где  $\varepsilon_1 = c |\cos \alpha|$  и  $\varepsilon_2 = c |\sin \alpha|$  суть длины катетов  $T_1 H_1$  и  $T_2 H_2$  соответственно.

Имеется аналогичная асимптотическая версия формулы (3.7) :

$$\begin{aligned} E_2(\tau_3) = & -t_1 \frac{1}{y^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial x \Lambda} \cdot \text{sign}(y) \varepsilon_1 + t_2 \frac{1}{x^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \pi/2)}{\partial y \Lambda} \cdot \text{sign}(x) \varepsilon_2 + \\ & + t_3 \frac{1}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2} \left[ -\frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial y \Lambda} \sin \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial x \Lambda} \cos \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) \right] c + o(c^2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В (5.2) мы использовали следующие соотношения :

$$\rho'(l, \omega, 0) = -\frac{\partial \rho(l, \omega, 0)}{\partial x \Lambda} \cdot \text{sign}(y), \quad \text{и} \quad \rho'(l, \omega, \pi/2) = \frac{\partial \rho(l, \omega, \pi/2)}{\partial y \Lambda} \cdot \text{sign}(x),$$

т.е.  $\cos(b^*, x) = -\text{sign}(y)$ ,  $\cos(b^*, y) = 0$  для катета, параллельного оси  $x$ , и

$\cos(b^*, x) = 0$ ,  $\cos(b^*, y) = \text{sign}(x)$  для катета, параллельного оси  $y$ .

Подставляя (5.1) и (5.2) в (3.12) получаем

$$\begin{aligned} & z_1 \frac{\partial G_1(P, Z_1)}{\partial x} |\cos \alpha| + z_2 \frac{\partial G_1(P, Z_2)}{\partial y} |\sin \alpha| + \\ & + t_1 \frac{1}{y^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial x \Lambda} \cdot \text{sign}(y) |\cos \alpha| - t_2 \frac{1}{x^2} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \pi/2)}{\partial y \Lambda} \cdot \text{sign}(x) |\sin \alpha| + \\ & + t_3 \frac{1}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2} \left[ \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial y \Lambda} \sin \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial x \Lambda} \cos \alpha \text{sign}(\sin(\varphi - \alpha)) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Функция  $G_1$  определена в (3.1). Функция  $\Theta(l)$ , от которой зависит  $G_1$ , имеет вид

(4.7) с  $\Phi = Z_1$  или  $Z_2$ . Соответствующие интегралы могут быть вычислены :

$$\int_{z_1} \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} = (-1)^k z_1 \text{sign}(\cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)},$$

$$\int_{z_2} \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} = (-1)^k z_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi \sin(\varphi - \alpha)},$$

$$\int_{z_1} \frac{\cos(\xi^*, x)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \int_{z_1} \frac{\cos(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi =$$

$$= (-1)^{k+1} z_1 \operatorname{sign}(\cos \alpha) \frac{\sin \alpha (\cos \alpha \sin \varphi + \sin(\varphi - \alpha))}{2 \sin^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)},$$

$$\int_{z_2} \frac{\cos(\xi^*, x)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \int_{z_2} \frac{\cos(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = (-1)^{k+1} z_2 \frac{\cos^2 \alpha}{2 \cos \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)},$$

$$\int_{z_1} \frac{\cos(\xi^*, y)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \int_{z_1} \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = (-1)^{k+1} z_1 \operatorname{sign}(\cos \alpha) \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)},$$

$$\int_{z_2} \frac{\cos(\xi^*, y)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \int_{z_2} \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = (-1)^k z_2 \frac{\cos \alpha (\sin(\varphi - \alpha) - \sin \alpha \cos \varphi)}{2 \cos^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)}.$$

Подставляя эти значения интегралов в (4.7), а также значения  $t_i$  (см. (3.8)) в (5.3) мы получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \cos \alpha}{\partial x} \frac{1}{r^2} \left[ \int_r \left( \frac{2(r-l) \sin \alpha}{\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial x P} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial y \Lambda} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sin \alpha (\cos \alpha \sin \varphi + \sin(\varphi - \alpha))}{\sin^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial x \Lambda} \right) dl \right] + \\ & + \frac{\partial \sin \alpha}{\partial y} \frac{1}{r^2} \left[ \int_r \left( \frac{2(r-l) \cos \alpha}{\cos \varphi \sin(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial x P} - \frac{\cos \alpha (\sin(\varphi - \alpha) - \sin \alpha \cos \varphi)}{\cos^2 \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial y \Lambda} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \varphi \sin^2(\varphi - \alpha)} \frac{\partial \rho}{\partial x \Lambda} \right) dl \right] - \frac{1}{y^2} \cos \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial x \Lambda} \\ & - \frac{1}{x^2} \sin \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \pi/2)}{\partial y \Lambda} + \\ & + \frac{1}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2} \left( \sin \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial y \Lambda} + \cos \alpha \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \alpha)}{\partial x \Lambda} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Отметим, что  $\int_r$  обозначает интегрирование по прямолинейному отрезку  $r$ , соединяющему  $O$  с  $v$ . Подынтегральная функция этих интегралов равна  $\rho = \rho(l, r, \omega)$ . В слагаемых, не содержащих интегралов,  $x$  и  $y$  суть декартовы координаты точки  $v$ , т.е.  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Отметим исчезновение разрывных коэффициентов  $z_i$  и  $t_i$ . Уравнение (5.4) имеет место для обоих значений  $k = 0, 1$ .

Мы приходим к следующему результату :

условие (3.12) эквивалентно условию (5.4).

Изучим условие (3.13). Рассмотрим функцию  $G_1$ , которая фигурирует в (3.9).

Предположим, что отношение  $\nu^2 = \frac{\varepsilon_2}{4\varepsilon_1}$  остается фиксированным. Обозначая через  $q = 4\varepsilon_2\varepsilon_1$  площадь прямоугольника  $\tau_4$ , мы получаем

$$G_1(x \pm \varepsilon_1, y \pm \varepsilon_2, Z) = G_1(x \pm (4\nu)^{-1}\sqrt{q}, y \pm \nu\sqrt{q}, Z).$$

Используя формулу Тейлора для каждого слагаемого мы приходим к асимптотической ( $q \rightarrow 0$ ) форме для (3.9)

$$E_1(\tau_4) = z \frac{\partial^2 G_1(P, Z)}{\partial x \partial y} q + O(q^{3/2}). \tag{5.5}$$

Интегралы по  $\Phi_1 = Z$  (см. Таблицу 2) легко вычисляются :

$$\int_Z \frac{d\xi}{\sin^2(\xi, r)} = \frac{2z}{\sin 2\varphi}, \quad \int_Z \frac{\cos(\xi^*, x)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \int_Z \frac{\cos(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = -\frac{z}{2 \sin^2 \varphi \cos \varphi},$$

$$\int_Z \frac{\cos(\xi^*, y)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \int_Z \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin^3(\xi, r)} d\xi = \frac{z}{2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}.$$

Получаем

$$G_1(x, y, Z) = \frac{z}{r^2} \int_r \left( \frac{4}{\sin 2\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} (r-l) + \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} - \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} \right) dl. \tag{5.6}$$

Используя разложение Тейлора для разностей в (3.10), получаем

$$G_2(b_1) - G_2(b_2) = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{|y|^2} \left( \frac{\partial \rho'((x, y), \omega, 0)}{\partial y} - \frac{2}{y} \rho'((x, y), \omega, 0) \right) + o(q),$$

$$G_2(b_3) - G_2(b_4) = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{|x|^2} \left( \frac{\partial \rho'((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial x} - \frac{2}{x} \rho'((x, y), \omega, \frac{\pi}{2}) \right) + o(q). \tag{5.7}$$

Подставляя (5.6) в (5.5), и (5.7) в (3.10), мы получаем асимптотическое выражение для  $E_1(\tau_4) - E_2(\tau_4)$ .

Следовательно, из (3.13) мы получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{1}{r^2} \int_r \left( \frac{4}{\sin 2\varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} (r-l) + \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} - \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} \right) dl \right] +$$

$$+ \frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \frac{2}{y} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \right) - \frac{1}{x^2} \left( \frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{x} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_y \Lambda} \right) = 0. \tag{5.8}$$

Интегралы берутся по прямолинейным отрезкам  $\tau$ , подынтегральная функция  $\rho = \rho(l, \tau, \omega)$ .

Мы приходим к следующему результату :

условие (3.13) эквивалентно (5.8).

Аналогично преобразуем условие (3.14), предполагая, что многоугольник  $\tau$  стягивается к точке  $O$ , сохраняя прямоугольную форму многоугольника  $\tau$ .

$$E_1(O, \tau) = \sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} (r-l) dl + \\ + \sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, x)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} dl + \sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, y)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} dl,$$

$$E_2(O, \tau) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i^2} \int_{i=1}^4 \rho'(l, b_i, \tau) dl.$$

Суммы в  $E_1(O, \tau)$  имеют следующий асимптотический вид :

$$\sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{d\xi_i}{\sin^2(\xi_i, r_i)} \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial_x P} (r-l) dl = \\ = \frac{2}{\sin \varphi \cos \varphi} \left( \frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P} + \frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P} \right) + o(\tau),$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, x)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial_x \Lambda} dl = -\frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \left[ \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \sin \varphi - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \cos \varphi + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \sin \varphi \right] + o(\tau),$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{2}{r_i^2} \int_{\Phi_i} \frac{\cos(\xi_i^*, y)}{\sin^3(\xi_i, r_i)} d\xi_i \int_{r_i} \frac{\partial \rho}{\partial_y \Lambda} dl = \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} \sin \varphi + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} \cos \varphi - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} \sin \varphi \right] + o(\tau).$$

Для  $E_2(O, \tau)$  мы имеем асимптотическое разложение

$$E_2(O, \tau) = -4 \cot \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, 0)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + 4 \tan \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi/2)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + o(\tau).$$

Следовательно, подставляя последние два выражения в (2.11) и используя условие (3.14), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \left[ \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + 2 \frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P} + 2 \frac{\partial \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P} \right] + \\ & + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} \right] - \\ & - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[ \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi - \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \right] + \\ & + 4 \cot \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, 0)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - 4 \tan \varphi \frac{\partial^2 \rho(Q_0, \omega, \pi/2)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Мы доказали следующий результат :

условие (3.14) эквивалентно (5.9).

Условия (5.4), (5.8) и (5.9) мы называем полулокальными, потому что присутствует интеграл по отрезкам  $\tau$  и  $\sin$  или  $\cos$  угла между  $\tau$  и осью  $x$ . В следующем параграфе мы заменим их на условия, которые чисто локальны, т.е. имеют форму дифференциальных соотношений в точке.

## §6. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ (5.8)

В этом параграфе мы опишем результат анализа поведения (5.8) для малых значений  $\tau$ , предполагая, что отношение  $k = y/x = \tan \varphi$  остается фиксированным.

Затем докажем, что из полученных уравнений следует (5.8).

Рассмотрим функцию флага  $\rho$ , заданную по (1.13) на флагах  $(l, \tau)$ . Так как все производные  $\frac{\partial \sin 2(r_i, x)}{\partial_x \Lambda}$ ,  $\frac{\partial \sin 2(r_i, x)}{\partial_y \Lambda}$ ,  $\frac{\partial \cos 2(r_i, x)}{\partial_x \Lambda}$ ,  $\frac{\partial \cos 2(r_i, x)}{\partial_y \Lambda}$  равны нулю, мы получаем

$$\frac{\partial \rho(l, \tau, \tau)}{\partial_x P} = \frac{\partial A(l, \Lambda_x)}{\partial_x P} \sin 2(r_i, x) + \frac{\partial B(l, \Lambda_x)}{\partial_x P} \cos 2(r_i, x) + \frac{\partial C(l, \omega)}{\partial_x P}, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \rho(l, \tau, \tau)}{\partial_x \Lambda} = \frac{\partial A(l, \Lambda_x)}{\partial_x \Lambda} \sin 2(r_i, x) + \frac{\partial B(l, \Lambda_x)}{\partial_x \Lambda} \cos 2(r_i, x) + \frac{\partial C(l, \omega)}{\partial_x \Lambda}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \rho(l, r, r)}{\partial y \Lambda} = \frac{\partial A(l, \Lambda_x)}{\partial y \Lambda} \sin 2(\gamma_l, x) + \frac{\partial B(l, \Lambda_x)}{\partial y \Lambda} \cos 2(\gamma_l, x) + \frac{\partial C(l, \omega)}{\partial y \Lambda}. \quad (6.3)$$

Следовательно, из (5.8) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{4}{x^2 + y^2} \int_0^r \frac{\partial A}{\partial_x P} (r-l) dl + \frac{2(x^2 - y^2)}{xy(x^2 + y^2)} \int_0^r \frac{\partial B}{\partial_x P} (r-l) dl + \right. \\ & + \frac{2}{xy} \int_0^r \frac{\partial C}{\partial_x P} (r-l) dl + \frac{2}{x \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} dl + \\ & + \frac{x^2 - y^2}{x^2 y \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} dl + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 y} \int_0^r \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} dl - \frac{2}{y \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} dl - \\ & - \left. \frac{x^2 - y^2}{y^2 x \sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^r \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} dl - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y^2 x} \int_0^r \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} dl \right] + \frac{1}{y^2} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) - \right. \\ & - \left. \frac{2}{y} \left( \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} \right) \right] - \frac{1}{x^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) - \frac{2}{x} \left( -\frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} + \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ясно, что выражение (6.4) имеет асимптотическое ( $r \rightarrow 0$ ) разложение

$$\frac{a_2}{r^2} + \frac{a_1}{r} + a_0 + o(1).$$

Выражения для  $a_2$ ,  $a_1$  и  $a_0$  могут быть найдены, используя стандартные разложения Тейлора (см. [3], где аналогичная задача рассмотрена детально). Ясно, что из (6.4) следует  $a_2 = 0$ ,  $a_1 = 0$  и  $a_0 = 0$ .

Условие  $a_2 = 0$  эквивалентно следующему дифференциальному уравнению :

$$\begin{aligned} & -\cos 2\varphi \frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{\partial C}{\partial_x P} - \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) - \frac{\cos 2\varphi}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Последнее условие выполняется для любого  $\varphi$ . Представляя его как линейную комбинацию независимых функций  $\cos 2\varphi$  и 1 с коэффициентами, которые не зависят от  $\varphi$ , мы заключаем, что коэффициенты равны нулю, т.е.

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (6.5)$$

где

$$F_1 = \frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right), \quad (6.6)$$

$$F_2 = \frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right). \quad (6.7)$$

Условие  $a_1 = 0$  эквивалентно

$$\begin{aligned} & - \frac{2x}{3y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial B}{\partial_x P} + \frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) \right] + \frac{2y}{3x^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \right. \\ & - \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) \right] = \\ & = - \frac{2x}{3y^2} \frac{\partial}{\partial x} [F_1 + F_2] + \frac{2y}{3x^2} \frac{\partial}{\partial y} [F_2 - F_1] = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Используя (6.5), получаем, что (6.8) есть тождество. Следовательно, из (6.5) следует  $a_1 = 0$ .

Условие  $a_0 = 0$  эквивалентно

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 (F_2 - F_1)}{(\partial_x P)^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 (F_1 + F_2)}{(\partial_y P)^2} - \frac{1}{4} \frac{x^2 \partial^2 (F_1 + F_2)}{y^2 (\partial_x P)^2} + \frac{1}{4} \frac{y^2 \partial^2 (F_2 - F_1)}{x^2 (\partial_y P)^2} + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial_x P} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2 C}{(\partial_y P)^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{(\partial_x P)^2} - \frac{\partial^2 B}{(\partial_y P)^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Используя (6.5), получаем производную формулы (1.14) :

$$\frac{\partial}{\partial_x P} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{(\partial_x P)^2} + \frac{\partial^2 C}{(\partial_y P)^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{(\partial_x P)^2} - \frac{\partial^2 B}{(\partial_y P)^2} \right) \right] = 0. \quad (6.10)$$

Резюмируем сказанное :

из условия (5.8) следуют (6.5) и (6.10).

Теперь докажем, что из условий (6.5) и (6.10) следует (5.8).

Ниже будем использовать следующие формулы :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [f(x, y)g(x, y)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot g + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_r F(u, v) dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l dl + \frac{x}{r^2} \int_r F dl, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_r F(u, v) dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l dl + \frac{y}{r^2} \int_r F dl, \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \int_r F(u, v) dl \right] = \frac{1}{r^2} \int_r \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} l^2 dl + \frac{y}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l dl + \frac{x}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l dl - \frac{xy}{r^4} \int_r F dl, \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_r F(u, v) l dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^2 dl + \frac{2x}{r^2} \int_r F l dl, \quad (6.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_r F(u, v) l dl \right] = \frac{1}{r} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^2 dl + \frac{2y}{r^2} \int_r F l dl, \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \int_r F(u, v) l dl \right] = \frac{1}{r^2} \int_r \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} l^3 dl + \frac{2y}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^2 dl + \frac{2x}{r^3} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^2 dl, \quad (6.17)$$

$$\int_r F(u, v) dl = F(x, y) |r| - \cos \varphi \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l dl - \sin \varphi \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l dl, \quad (6.18)$$

$$\int_r F(u, v) l dl = F(x, y) \frac{|r|^2}{2} - \frac{\cos \varphi}{2} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^2 dl - \frac{\sin \varphi}{2} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^2 dl, \quad (6.19)$$

$$\int_r F(u, v) l^2 dl = F(x, y) \frac{|r|^3}{3} - \frac{\cos \varphi}{3} \int_r \frac{\partial F}{\partial u} l^3 dl - \frac{\sin \varphi}{3} \int_r \frac{\partial F}{\partial v} l^3 dl. \quad (6.20)$$

Рассмотрим слагаемые в левой части уравнения (5.8). Используя (6.11) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{4}{r^2} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right] &= 4 \left[ \frac{8xy}{r^6} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl - \frac{2x}{r^4} \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right) - \right. \\ &\left. - \frac{2y}{r^4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right) \right]. \end{aligned}$$

Из (6.15) — (6.17) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{4}{r^2} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} l dl \right] = \frac{4}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^3 dl$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{4}{r} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} dl \right] = \frac{4}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^2 dl.$$

Следовательно, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{4}{r^2} \int_r \frac{\partial A}{\partial z P} (r-l) dl \right] = \frac{4}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^2 dl - \frac{4}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 A}{\partial u \partial v \partial z P} l^3 dl. \quad (6.21)$$

Действуя аналогично мы можем преобразовать оставшиеся слагаемые в (5.8). В

частности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{2(x^2 - y^2)}{xyr^2} \int_r \frac{\partial B}{\partial z P} (r-l) dl \right] &= \frac{y^2 - x^2}{x^2 y^2} \frac{\partial B}{\partial z P} + \frac{x^2 - 3y^2}{r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2 B}{\partial u \partial z P} l^2 dl + \\ &+ \frac{3x^2 - y^2}{r^3 y x^2} \int_r \frac{\partial^2 B}{\partial v \partial z P} l^2 dl + \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial u^2 \partial z P} l^2 dl - \\ &- \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial v^2 \partial z P} l^2 dl - \frac{2}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial u^2 \partial z P} l^3 dl + \frac{2}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 B}{\partial v^2 \partial z P} l^3 dl, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{2}{xy} \int_r \frac{\partial C}{\partial_x P} (r-l) dl \right] &= -\frac{x^2+y^2}{x^2 y^2} \frac{\partial C}{\partial_x P} + \frac{3y^2+x^2}{r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial_x P} l^2 dl + \\
 &+ \frac{3x^2+y^2}{r^3 y x^2} \int_r \frac{\partial^2 C}{\partial v \partial_x P} l^2 dl - \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial u^2 \partial_x P} l^2 dl - \\
 &- \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial v^2 \partial_x P} l^2 dl + \frac{2}{r^4} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial u^2 \partial_x P} l^3 dl + \frac{2}{r^3} \int_r \frac{\partial^3 C}{\partial v^2 \partial_x P} l^3 dl,
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{2}{xr} \int_r \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{x^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \frac{2}{x r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl = \\
 &= -\frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{3}{x r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl + \frac{y}{x^2 r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{\partial A}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{x^2-y^2}{x^2 y r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} dl \right] &= \frac{2}{x^3 r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} dl - \frac{1}{y^2 x^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \\
 &+ \frac{2y}{x^3 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \frac{x^2-y^2}{x^2 y r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl = \frac{2}{x^3} \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} - \\
 &- \frac{x^2+3y^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial_y \Lambda} + \frac{y^2+3x^2}{2r^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl + \\
 &+ \frac{3y^2+x^2}{2r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{r}{x^2 y} \int_r \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{x^3 r} \int_r \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} dl + \frac{y^2-x^2}{y^2 x^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l dl - \frac{2y}{x^3 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l dl + \\
 &+ \frac{1}{x^2 y r} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl = -\frac{2}{x^3} \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} + \frac{3y^2-x^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \\
 &+ \frac{3x^2-y^2}{2r^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl + \frac{x^2-3y^2}{2r^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{2}{y r} \int_r \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{y^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l dl + \frac{2}{y r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl = \\
 &= -\frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial_x \Lambda} + \frac{3}{y r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl + \frac{x}{y^2 r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{\partial A}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{x^2-y^2}{y^2 x r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} dl \right] &= \\
 &= -\frac{2}{y^3 r} \int_r \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} dl - \frac{2x}{y^3 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l dl + \frac{1}{y^2 r^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l dl + \\
 &+ \frac{x^2-y^2}{x y^2 r^3} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl = -\frac{2}{y^3} \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} + \frac{y^2+3x^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \\
 &- \frac{x^2+3y^2}{2|r|^3 x y^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl - \frac{3x^2+y^2}{2|r|^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} \right) l^2 dl,
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \frac{|r|}{y^2 x} \int_r \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} dl \right] &= -\frac{2}{|r| y^3} \int_r \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} dl - \frac{2x}{y^3 |r|^2} \int_r \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} \right) l dl + \\
&+ \frac{x^2 - y^2}{y^2 x^2 |r|^2} \int_r \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} \right) l dl + \frac{1}{xy^2 |r|} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} \right) l^2 dl = \\
&= -\frac{2}{y^3} \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} + \frac{3x^2 - y^2}{2x^2 y^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \frac{3y^2 - x^2}{2|r|^3 xy^2} \int_r \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} \right) l^2 dl + \\
&+ \frac{y^2 - 3x^2}{2|r|^3 x^2 y} \int_r \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{\partial C}{\partial x \Lambda} \right) l^2 dl.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Последние два слагаемых в левой части (5.8) преобразуем, подставляя (1.13).

Получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{y^2} \left( \frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \frac{2}{y} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, 0)}{\partial_x \Lambda} \right) - \\
&- \frac{1}{x^2} \left( \frac{\partial^2 \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{2}{x} \frac{\partial \rho((x, y), \omega, \frac{\pi}{2})}{\partial_y \Lambda} \right) = \\
&= \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \frac{2}{y^3} \frac{\partial B}{\partial_x \Lambda} - \frac{2}{y^3} \frac{\partial C}{\partial_x \Lambda} + \\
&+ \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - \frac{2}{x^3} \frac{\partial B}{\partial_y \Lambda} + \frac{2}{x^3} \frac{\partial C}{\partial_y \Lambda}.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Из результатов (6.21) — (6.30) следует, что

левая часть (5.8) тождественно равна

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2} (F_2 - F_1) - \frac{1}{y^2} (F_2 + F_1) - \frac{3}{|r|^3 x} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial u} l^2 dl + \frac{3}{|r|^3 y} \int_r \frac{\partial (F_2 + F_1)}{\partial v} l^2 dl - \\
&- \frac{y}{|r|^3 x^2} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial v} l^2 dl + \frac{x}{|r|^3 y^2} \int_r \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial u} l^2 dl + \\
&+ \frac{4}{|r|^4} \int_r \frac{\partial}{\partial_x P} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial v^2} \right) \right] l^2 (r - l) dl,
\end{aligned}$$

где  $F_1$  и  $F_2$  определены по (6.6) и (6.7).

Прямое исследование формул показывает, что если условия (6.5) и (6.10) удовлетворены, то верхнее выражение равно нулю. Другими словами, из (6.5) и (6.10) следует (5.8).

## §7. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ (5.9)

В этом параграфе мы покажем, что условия (6.5) и (6.10) достаточны для (5.9).

Подставляя  $\rho = A \sin 2\varphi + B \cos 2\varphi + C$  в (5.9), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} \left[ 2 \frac{\partial^2 B}{\partial_x \partial_y \Lambda} \cos 2\varphi + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - 2 \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \cos 2\varphi - 2 \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \right. \\ & + 4 \frac{\partial B}{\partial_x P} \cos 2\varphi + 4 \frac{\partial C}{\partial_x P} \left. \right] + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[ 2 \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} \sin 2\varphi \right] - \\ & - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[ 2 \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \sin 2\varphi \right] + 4 \cot \varphi \left[ \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right] - 4 \tan \varphi \left[ -\frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} \right] = 4(\cot \varphi - \tan \varphi) \frac{\partial B}{\partial_x P} + 4(\cot \varphi + \tan \varphi) \frac{\partial C}{\partial_x P} + 4 \tan \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \\ & - 4 \cot \varphi \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2(\cot \varphi + \tan \varphi) \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + 2(\cot \varphi + \tan \varphi) \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \\ & + 2(\cot \varphi - \tan \varphi) \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - 2(\tan \varphi - \cot \varphi) \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} = \\ & = 4 \cot \varphi (F_1 + F_2) - 4 \tan \varphi (F_2 - F_1) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

### §8. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ (5.4)

Мы можем исследовать (5.4) также как и уравнение (5.8) в §6, т.е. выделим слагаемых, имеющих порядок  $r^{-1}$  в разложении Тейлора для сумм. Мы получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)} \left[ \frac{x}{y} (F_1 + F_2) - \frac{y}{x} (F_2 - F_1) + \frac{\partial^2 (B + C)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 (B - C)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2 \frac{\partial A}{\partial_x P} \right] = 0 \end{aligned}$$

Используя уравнения (6.5), мы приходим к следующему результату :

Из условий (6.5) и (5.4) следует

$$F_3 = \frac{\partial^2 (B + C)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 (B - C)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2 \frac{\partial A}{\partial_x P} = 0. \quad (8.1)$$

Используя (6.12) - (6.20) получаем, что левая часть (5.4) тождественно равна

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(y \cos \alpha - x \sin \alpha)} \left[ \frac{x}{y} (F_1 + F_2) - \frac{y}{x} (F_2 - F_1) - \frac{x^2}{y|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial u} l^2 dl + \right. \\ & + \frac{y}{|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial u} l^2 dl - \frac{x}{|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_1 + F_2)}{\partial v} l^2 dl + \\ & \left. + \frac{y^2}{x|r|^3} \int_r \frac{\partial (F_2 - F_1)}{\partial u} l^2 dl + F_3 - \frac{x}{|r|^3} \int_r \frac{\partial F_3}{\partial u} l^2 dl - \frac{y}{|r|^3} \int_r \frac{\partial F_3}{\partial v} l^2 dl \right]. \end{aligned}$$

С одной стороны, это тождество можно использовать для проверки (8.1), а с другой стороны, для доказательства того, что из уравнений (6.5), (8.1) следует (5.4).

## §9. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Мы резюмируем полученные результаты :

Флаговая функция  $\rho \in C^{(3)}$  имеющая вид (1.13) удовлетворяет условию второго порядка тогда и только тогда, если коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  удовлетворяют уравнениям (6.5), (6.10) и (8.1).

Согласно Теореме 3 эти уравнения дают необходимые и достаточные условия того, что валюация  $\Psi$ , соответствующая флаговой функции  $\rho \in C^{(3)}$ , порождает, с помощью (1.7) и (1.8), локально-конечную знакопеременную меру в  $\mathbb{E}$ .

Заметим, что дифференцируя (1.14) по  $\partial_x P$ , мы получим (6.10). Приведем полное множество уравнений :

$$\rho(P, \omega, \varphi) = A(P, \Lambda_x) \sin 2(\varphi, x) + B(P, \Lambda_x) \cos 2(\varphi, x) + C(P, \omega), \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 B}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial_x P} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 C}{\partial_y P \partial_x \Lambda} \right) = 0, \quad (9.3)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 (B+C)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} + \frac{\partial^2 (B-C)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} \right) + \frac{\partial A}{\partial_x P} = 0, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial_x P \partial_y P} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B-C)}{(\partial_x P)^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B+C)}{(\partial_y P)^2} = 0. \quad (9.5)$$

Результаты работы [3] и настоящей статьи приводят к следующей теореме :

Пусть  $\Psi_F$  — валюация на  $U_{\mathbb{E}}$ , порожденная флаговой функцией  $\rho \in C^{(3)}$  с помощью (1.7) и (1.8). Валюация  $\Psi_F$  порождает локально-конечную знакопеременную меру в  $\mathbb{E}$  тогда и только тогда, если  $\rho$  имеет вид (9.1) и функции  $A$ ,  $B$  и  $C$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям (9.2) — (9.5).

Сделаем замечания, касающиеся этих уравнений.

Условия (9.2) — (9.4) вместе эквивалентны уравнению

$$2 \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_{\varphi+\pi/2} \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_{\varphi+\pi/2} P \partial_\varphi \Lambda} - \frac{\partial^3 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_\varphi \Lambda \partial \varphi} = 0. \quad (9.6)$$

Для доказательства, продифференцируем (9.1), получаем (сравните с (6.2), (6.3))

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P} &= \frac{\partial A(P, \Lambda_x)}{\partial_x P} \sin 2\varphi + \frac{\partial B(P, \Lambda_x)}{\partial_x P} \cos 2\varphi + \frac{\partial C(P, \omega)}{\partial_x P}, \\ \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial \varphi} &= 2 A(P, \Lambda_x) \cos 2\varphi - 2 B(P, \Lambda_x) \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_{\varphi+\pi/2} \Lambda} &= -\sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \\ &+ \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda}, \\ \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_{\varphi+\pi/2} P \partial_\varphi \Lambda} &= -\sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \\ &- \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_y P \partial_y \Lambda}, \\ \frac{\partial^3 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_\varphi \Lambda \partial \varphi} &= 2 \cos 2\varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} + 2 \cos 2\varphi \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} + \\ &+ 2 \cos 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} + 2 \cos 2\varphi \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 A(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_y \Lambda} - \\ &- 2 \sin 2\varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_x \Lambda} - 2 \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_x \Lambda} - \\ &- 2 \sin 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_x P \partial_y \Lambda} - 2 \sin 2\varphi \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 B(P, \Lambda_x)}{\partial_y P \partial_y \Lambda}. \end{aligned}$$

Напомним, что  $F_1$ ,  $F_2$  и  $\frac{1}{2}F_3$  суть левые части формул (9.2) — (9.4) соответственно.

Мы получаем

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} F_3 \sin 2\varphi &= \\ &= \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_x P} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_{\varphi+\pi/2} \Lambda} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_{\varphi+\pi/2} P \partial_\varphi \Lambda} - \frac{\partial^3 \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial_\varphi P \partial_\varphi \Lambda \partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, из  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$  вытекает дифференциальное уравнение (9.8).

Обратно, из (9.6) следует, что

$$F_1 + F_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} F_3 \sin 2\varphi = 0. \quad (9.7)$$

Так как (9.7) есть линейная комбинация независимых функций  $\sin 2\varphi$ ,  $\cos 2\varphi$  и 1, мы получаем (9.2) — (9.4).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $\Psi_F$  — валюация на  $U_E$ , порожденная флаговой функцией  $\rho \in C^{(3)}$  с помощью (1.7) и (1.8). Валюация  $\Psi_F$  порождает локально-конечную знакопеременную меру в  $E$  тогда и только тогда, когда  $\rho$  удовлетворяет условиям Теоремы 3, а также следующему дифференциальному уравнению :

$$2 \frac{\partial \rho(P, \omega, \Omega)}{\partial_\omega P} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \Omega)}{\partial_{\Omega P} \partial_{\mathcal{N} \Lambda}} + \frac{\partial^2 \rho(P, \omega, \Omega)}{\partial_{\mathcal{N} P} \partial_{\Omega \Lambda}} - \frac{\partial^2}{\partial_{\Omega P} \partial_{\Omega \Lambda}} \left( \frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

где  $\mathcal{N}$  — направление перпендикулярное как  $\Omega$ , так и  $\omega$ ,  $\frac{\partial \rho(P, \omega, \varphi)}{\partial \varphi}$  обозначает производную в  $\mathcal{E}_1(\omega)$ ,  $\varphi \in \mathcal{E}_1(\omega)$  соответствует  $\Omega$ .

Авторы благодарят профессора Р. В. Амбарцумяна за полезные дискуссии и замечания.

**ABSTRACT.** Guided by a decomposition in Combinatorial Integral Geometry, we define a class of finitely additive functionals on the sets from the so-called Buffon ring in the space of planes in  $\mathbb{R}^3$ . Under certain smoothness assumptions, we find necessary and sufficient conditions when these functionals define a signed measure in that space. They are formulated in terms of the rate of decrease of the so-called pyramidal excess. Some necessary conditions are found in terms of certain "flag densities" on which the functionals depend.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, *Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology*, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, *Введение в стохастическую геометрию*, Москва, Наука, 1989.
3. Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, "Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, I", *Известия НАН Армении, серия Математика*, том 29, №4, стр. 7 – 63, 1994.
4. R. V. Ambartzumian with the Appendix by V. K. Oganian, "Measure generation by Euler functionals", *Adv. Appl. Prob. (SGSA)*, vol. 27, pp. 606 — 626, 1995.
5. Р. В. Амбарцумян, "Замечания о порождении мер в пространстве прямых в  $\mathbb{R}^3$ ", *Известия НАН Армении, серия Математика*, том 27, №5, стр. 1 – 21, 1992.
6. В. К. Оганян, А. Абдалла, "О порождении мер в пространстве прямых финслеровыми метриками", *Известия НАН Армении, серия Математика*, том 27, №5, стр. 69 – 80, 1992.

7. Г. С. Сукиасян, "О порождении мер пространственными флаговыми функциями", Известия НАН Армении, серия Математика, том 28, №2, стр. 61 – 70, 1993.
8. Р. В. Амбарцумян, "Об одном конечно-аддитивном функционале в  $\mathbb{R}^3$ ", Известия НАН Армении, серия Математика, том 28, №2, стр. 51 – 60, 1993.

16 июля 1996

Ереванский государственный университет,  
Институт математики,  
Национальной Академии Наук Армении  
E-mail : rhambart@aua.am