СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 3, 1996

В статье исследуется начально–краевая задача для широкого класса вырождающихся квазилинейных эволюционных уравнений в частных производных высокого порядка. Устанавливается ее однозначная разрешимость в весовых функциональных пространствах. Доказывается существование аттракторов полугрупп, порожденных смешанными краевыми задачами. Строится функция Ляпунова и с ее помощью описывается структура аттракторов.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В банаховом пространстве $\mathbf{X}$ рассмотрим задачу с начальным условием для эволюционного операторного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}(u), \quad t > 0, \tag{0.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{0.2}$$

где $\mathcal{A}$, вообще говоря, – нелинейный оператор, а $u_0 \in \mathbf{X}$.

Как известно, центральной проблемой теории дифференциальных уравнений в частных производных является исследование ее разрешимости. Другой важной проблемой в этой области является изучение поведения траекторий $u(t, x)$ задачи (0.1), (0.2) при $t \to \infty$. Как оказалось, эта задача тесно связана с существованием многообразий, называемых аттракторами, обладающих свойством притяжения траекторий. Этому кругу вопросов посвящено довольно много работ (см., например, [1 — 6] и приведенную в них библиографию, а также цикл статей авторов [7 — 12]).

Настоящая статья посвящена исследованию однозначной разрешимости начально–краевых задач и построению аттракторов для широкого класса вырождающихся эволюционных дифференциальных операторов высокого порядка. В ней обобщаются также некоторые известные ранее результаты по разрешимости начально–краевых задач для уравнений второго порядка.

Статья состоит из пяти параграфов. В §1 описывается класс изучаемых операторов и вводятся функциональные пространства, в которых действуют рассматриваемые операторы. В §2 доказывается однозначная разрешимость начально–краевых задач в весовых функциональных пространствах. В §3 полученные в §2 результаты применяются к модельному уравнению высокого порядка. §4 посвящен доказательству существования аттракторов полугрупп, порожденных начально–краевыми задачами, исследованными в §§2,3. Наконец, в последнем §5 строится функция Ляпунова этих задач и с ее помощью описывается структура аттракторов полугрупп, порожденных исследуемым классом операторов.

§1. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Обозначим через $Q = (0,\infty) \times \Omega$ бесконечный цилиндр с основанием Ω, а его боковую поверхность – через $\Sigma = (0,\infty) \times \Gamma$. Для вырождающегося квазилинейного эволюционного уравнения порядка $2m$ $(m \geq 1)$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^{\alpha}(\mathcal{A}_{\alpha}(x,t;\mathcal{D}^{\gamma}u) = 0, \quad (x,t) \in Q \tag{1.1}$$

рассмотрим следующую начально–краевую задачу :

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \nu^s}\right|_{\Sigma} = 0, \qquad s = 0,1,...,s_0 - 1, \tag{1.3}$$

где α и γ – мультииндексы, функции $\mathcal{A}_{\alpha}(x,t;\xi_{\gamma})$ нелинейны и зависят, вообще говоря, от всех ξ_{γ} с $|\gamma| \leq m$, а $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ – дифференцирование в направлении внешней нормали к границе. Число s_0 зависит от характера вырождения и будет определено ниже.

1.2. Введем необходимые для дальнейшего обозначения и функциональные пространства. Обозначим через $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Пусть $\sigma \in \mathbb{R}^1$. $W^m_{p,\sigma}(\Omega)$, по определению, – весовой класс функций $u(x)$, определенных на Ω, для которых конечна норма

$$\|u\|_{W^m_{p,\sigma}} = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p\, dx + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \rho^{p\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^p\, dx \right\}^{1/p} . \tag{1.4}$$

Как известно [13 — 15], классы $W^m_{p,\sigma}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами с нормой (1.4). Обозначим далее

$$\|u\|_1 = \left\{ \sum_{|\alpha|\le m} \|\rho^\sigma(x)\mathcal{D}^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right\}^{1/p} \tag{1.5}$$

и

$$\|u\|_2 = \left\{ \|\rho^\sigma u\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|\rho^\sigma(x)\mathcal{D}^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)} \right\}^{1/p} . \tag{1.6}$$

Нормы (1.5) и (1.6) также порождают банаховы пространства, которые мы обозначим, соответственно, через ${}_1W^m_{p,\sigma}(\Omega)$ и ${}_2W^m_{p,\sigma}(\Omega)$.

Через $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ обозначим замыкание в норме $W^m_{p,\sigma}(\Omega)$ линейного многообразия $\mathbf{C}^\infty_0(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Теорема А ([13], теорема 1.1.4). *Пусть*

$$-\frac{1}{p} < \sigma \le m. \tag{1.7}$$

Тогда

$${}_1W^m_{p,\sigma}(\Omega) = {}_2W^m_{p,\sigma}(\Omega) = W^m_{p,\sigma}(\Omega), \tag{1.8}$$

где равенства понимаются , как обычно, с точностью до эквивалентности норм.

Теорема Б ([13], теорема 1.2.1). 1^0. *Если $\sigma < -1/p$ либо $\sigma > m - 1/p$, то $W^m_{p,\sigma}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$.*

2^0. *Если же весовой показатель σ удовлетворяет условию*

$$-\frac{1}{p} < \sigma < m - \frac{1}{p}, \tag{1.9}$$

то пространства $\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ имеют следующую структуру :

$$\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega) = \left\{ u \in W^m_{p,\sigma}(\Omega); \quad \left.\frac{\partial^s u}{\partial \nu^s}\right|_\Gamma = 0, \quad s = 0, 1, ..., s_0 - 1 \right\}, \tag{1.10}$$

. где s_0 – целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$m - \sigma - \frac{1}{p} \leq s_0 < m - \sigma + 1 - \frac{1}{p}, \qquad p > 1. \tag{1.11}$$

Замечание. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что целое число s_0, фигурирующее в постановке начально–краевой задачи (1.1) — (1.3), удовлетворяет условию (1.11), а $p > 2$.

Введем, наконец, банахово пространство $\mathbf{L}_p(0, T; W^m_{p,\sigma}(\Omega))$ функций $u(x,t)$: $(0,T) \to W^m_{p,\sigma}(\Omega)$ с нормой

$$|||u||| = \left(\int_0^T \|u\|^p_{W^m_{p,\sigma}(\Omega)}\, dt \right)^{1/p}, \tag{1.12}$$

а через $\mathbf{L}^{loc}_p(0, \infty; W^m_{p,\sigma}(\Omega))$ обозначим пространство функций $u(x,t)$, для которых при любом $T > 0$ конечна норма (1.12).

1.3. Опишем класс рассматриваемых операторов.

1) Функции $\mathcal{A}_\alpha(x, t; \xi_\gamma)$ в (1.1) определены для $(x, t) \in Q$ и всех вещественных ξ_γ ($|\gamma| \leq m$), непрерывны по t, непрерывно дифференцируемы по ξ_γ и удовлетворяют неравенствам

$$|\mathcal{A}_\alpha(x, t; \xi_\gamma)| \leq C\, \rho^{\sigma p}(x) \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_\gamma|^{p-1}, \tag{1.13}$$

$$\left| \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial \xi_\gamma} \right| \leq C \rho^{\sigma\, p}(x) \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_\gamma|^{p-2}, \qquad (p > 2) \tag{1.14}$$

с некоторой константой $C > 0$.

Для того, чтобы привести остальные условия, налагаемые на операторы, нам необходимо ввести в рассмотрение следующую нелинейную форму :

$$L(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x, t; \mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx, \tag{1.15}$$

заданную на пространстве $\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega)$. В силу условия (1.13) она корректно определена. В самом деле, справедлива

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия (1.13) и (1.7). Тогда при любом фиксированном $u \in \mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ форма (1.15) является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ фиксировано. Для любого $v \in \mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega)$, в силу (1.13), неравенства Гёльдера и (1.5), имеем

$$\left|\int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\,\mathcal{D}^\alpha v\,dx\right| = \left|\int_\Omega \rho^\sigma(x)\,\mathcal{D}^\alpha v\,\rho^{-\sigma}(x)\,\mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\,dx\right| \le$$

$$\le \left(\int_\Omega \rho^{p\,\sigma}(x)\,|\mathcal{D}^\alpha v|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega \rho^{-q\,\sigma}(x)\,|\mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u|^q\,dx\right)^{1/q} \le$$

$$\le C\left(\sum_{|\alpha|\le m}\|\rho^\sigma\,\mathcal{D}^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p}\left(\sum_{|\gamma|\le m}\int_\Omega \rho^{\sigma q(p-1)}(x)\,|\mathcal{D}^\gamma u|^{q(p-1)}dx\right)^{1/q} =$$

$$= C\|v\|_1\left(\sum_{|\gamma|\le m}\int_\Omega \rho^{\sigma p}|\mathcal{D}^\gamma u(x)|^p\,dx\right)^{1/q} = C\|u\|_1^{p-1}\cdot\|v\|_1 = C_1(u)\,\|v\|_1,$$

где $C_1 > 0$ – постоянная, зависящая от u, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Из последнего неравенства, очевидно, следует, что $|L(u,v)| \le C_2\|v\|_1$ с некоторой постоянной $C_2 > 0$, зависящей от u. В силу теоремы А имеем

$$|L(u,v)| \le C_3\|v\|_{W^m_{p,\sigma}}, \tag{1.16}$$

чем и завершается доказательство леммы.

2) **Условие эллиптичности :** для любого $u \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_p(0,\infty;\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega))$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\,\mathcal{D}^\alpha u\,dx \ge a_0\,\|u\|^p_{W^m_{p,\sigma}} - k(t), \tag{1.17}$$

где $a_0 > 0$ – постоянная, а $k(t) \ge 0$ – непрерывная на $[0,\infty)$ функция.

3) **Условие сильной эллиптичности :** для любого $T > 0$ и любых функций $u, v \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_p(0,\infty;W^m_{p,\sigma}(\Omega))$ таких, что $u - v \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}_p(0,\infty;\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega))$, имеет место неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^T\int_\Omega (\mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u) - \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma v))\,\mathcal{D}^\alpha(u-v)\,dx\,dt \ge a_1\int_0^T \|u-v\|^p_{W^m_{p,\sigma}}\,dt, \tag{1.18}$$

где $a_1 = \mathrm{const} > 0$.

1.4. В этом пункте будет дано определение обобщенного решения задачи (1.1) — (1.3). С этой целью, обозначим через $\overset{\circ}{H}(T)$ банахово пространство, получаемое при замыкании линейного многообразия гладких функций $z(x,t)$ таких, что

$$z(x,0)=0, \qquad \left.\frac{\partial^s z}{\partial \nu^s}\right|_{\Sigma_T}=0, \quad s=0,1,...,s_0-1$$

по норме

$$|||z|||' = \left(\int_0^T \|z\|^p_{W^m_{p,\sigma}}\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^T \left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\|^q_{(W^m_{p,\sigma}(\Omega))^*}\,dt\right)^{1/q}, \tag{1.19}$$

где $(W^m_{p,\sigma}(\Omega))^*$ – пространство; сопряженное $W^m_{p,\sigma}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $\Sigma_T=(0,T)\times\Gamma$, а через $H_T(u_0)$ – множество функций вида

$$u(x,t)=u_0(x)+z(x,t), \tag{1.20}$$

где $u_0\in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$, $z\in \overset{\circ}{H}(T)$.

Определение. Функция $u\in \mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_p(0,\infty;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$ называется обобщенным решением задачи (1.1) — (1.3), если для любой функции $v\in \mathbf{L}^{\mathrm{loc}}_p(0,\infty;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$ имеет место следующее интегральное тождество :

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}v(x,t)\,dx\,dt+\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^T\int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\,\mathcal{D}^\alpha v\,dx\,dt=0. \tag{1.21}$$

1.5. Введенное в предыдущем пункте понятие обобщенного решения позволяет свести задачу (1.1) — (1.3) к эквивалентной ей задаче Коши для операторного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+L(u)=0, \tag{1.22}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x). \tag{1.23}$$

1.2. *Пусть выполнены условия леммы 1.1. Тогда оператор L, действующий из пространства $\mathbf{L}_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$ в пространство $\mathbf{L}_q(0,T;\left(\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)\right)^*)$, является ограниченным.*

Доказательство. Пусть B – произвольное ограниченное множество пространства $\mathbf{L}_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$:

$$B=\left\{u\in \mathbf{L}_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)),\quad |||u|||\le R<\infty\right\}. \tag{1.24}$$

Зафиксируем произвольный элемент $u^* \in B$ и $t \in [0,T]$. Рассмотрим линейный функционал

$$l(v) = < L(u^*), v > \stackrel{def}{=} \int_0^T L(u^*, v)\, dt = \sum_{|\alpha| \le m} \int_0^T \int_\Omega A_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u^*)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx\, dt \tag{1.25}$$

на пространстве $\mathbf{L}_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$. В силу леммы 1.1 имеем

$$|L(u^*, v)| \le C \|u^*\|^{p-1}_{W^m_{p,\sigma}} \|v\|_{W^m_{p,\sigma}}, \tag{1.26}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная. Интегрируя последнее неравенство по $t \in [0,T]$, получим

$$| < L(u^*), v > | \le C |||u^*|||^{p-1}_p \left(\int_0^T \|v\|^p_{W^m_{p,\sigma}}\, dt \right)^{1/p} \le CR^{p-1} |||v|||_p. \tag{1.27}$$

Вводя обозначение

$$|||u|||'_q = \left(\int_0^T \|u\|^q_{(\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))^*}\, dt \right)^{1/q}, \tag{1.28}$$

из (1.27) имеем

$$|||L(u^*)|||'_q \le CR^{p-1}, \tag{1.29}$$

откуда следует ограниченность образа множества B в $\mathbf{L}_q(0,T;(\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))^*)$. Лемма доказана.

§2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1.1) — (1.3)

В этом параграфе будет доказана однозначная разрешимость задачи Коши (1.22), (1.23), к которой редуцируется начально–краевая задача (1.1) — (1.3). Доказательство проводится применением известного “метода монотонности” (см. [6], [16]). Мы опираемся на одну общую теорему существования, доказанную в работе [6].

Дадим необходимые определения. Пусть оператор A (вообще говоря нелинейный) действует из сепарабельного пространства $\mathbf{X}$ в пространство $\mathbf{X}^*$ линейных непрерывных функционалов над $\mathbf{X}$.

Определение 2.1. Оператор A называется ***монотонным***, если для любых $u, v \in \mathbf{X}$ имеет место неравенство

$$< Au - Av, u - v > \ge 0,$$

где символ $< \cdot >$ означает спаривание.

Определение 2.2. Оператор A называется *полунепрерывным*, если он всякую сильно сходящуюся последовательность пространства $\mathbf{X}$ переводит в слабо сходящуюся последовательность в $\mathbf{X}^*$.

Обозначим через $\mathbf{L}_p(0,T;\mathbf{X})$ $(p>1)$ пространство функций $u(t):\ (0,T)\to\mathbf{X}$ с нормой

$$\|u\| = \left(\int_0^T \|u\|_X\, dt\right)^{1/p},$$

где $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ – норма банахова пространства $\mathbf{X}$.

Пусть, далее, $\mathcal{A}(t,u)$ – нелинейный монотонный оператор, зависящий от параметра $t\in[0,T]$ и действующий из пространства $\mathbf{L}_p(0,T;\mathbf{X})$ в сопряженное пространство $\mathbf{L}_q(0,T;\mathbf{X}^*)$.

Рассмотрим следующую задачу Коши :

$$L(u) = u' + \mathcal{A}(t,u) = h, \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{2.2}$$

где $h(t)$ – произвольно заданный элемент пространства $\mathbf{L}_q(0,T;\mathbf{X}^*)$.

Обозначим, наконец, через $H(u_0)$ пространство функций $u(t)\in\mathbf{L}_p(0,T;\mathbf{X})$ таких, что $u'\in\mathbf{L}_q(0,T;\mathbf{X}^*)$, $u(0)=u_0$, $u_0\in\mathbf{X}$.

Теорема В (см. [6], теорема 13). *Пусть выполнены следующие условия :*

1. Для почти всех $t\in[0,T]$ и любого $u\in\mathbf{L}_p(0,T;\mathbf{X})$ справедливо неравенство

$$<\mathcal{A}(t,u),u>\ \geq C_0\,\|u\|_{\mathbf{X}}^p - k(t) \tag{2.3}$$

с некоторой постоянной $C_0>0$, $k(t)$ – ограниченная функция;

2. оператор $\mathcal{A}(t,u)$: $\mathbf{L}_p(0,T;\mathbf{X})\to\mathbf{L}_q(0,T;\mathbf{X}^*)$ ограничен и полунепрерывен. Тогда отображение

$$L:\quad H(u_0)\to\mathbf{L}_q(0,T;\mathbf{X}^*)$$

есть эпиморфизм, иными словами, для любого $h\in\mathbf{L}_q(0,T;\mathbf{X}^*)$ задача (2.1), (2.2) разрешима.

Теорема 2.1. *Пусть оператор L, действующий из пространства $\mathbf{L}_p(0,T;\overset{\bullet}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$ в $\mathbf{L}_q(0,T;(\overset{\bullet}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))^*)$, удовлетворяет условиям 1) — 3) n° 1.3. Тогда он является монотонным, ограниченным и полунепрерывным.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $T > 0$. Для любых u, v, принадлежащих $\mathbf{L}_p(0,T;\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega))$, в силу условия сильной эллиптичности (1.18) имеем

$$< L(u) - L(v), u - v >= \sum_{|\alpha|\le m} \int_0^T \int_\Omega [A_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u) - A_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma v)] \times$$

$$\times (\mathcal{D}^\alpha u - \mathcal{D}^\alpha v)\, dx\, dt \ge a_1 \int_0^T \|u - v\|^p_{W^m_{p,\sigma}}\, dt \ge 0$$

с некоторой постоянной $a_1 > 0$, а это означает, что оператор L монотонный.

Доказательство ограниченности оператора L содержится в лемме 1.2. Установим полунепрерывность оператора L. С этой целью, возьмем произвольные элементы $u, v \in \mathbf{L}_p(0,T;\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega))$, и пусть последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, $u_k \in$ $\in \mathbf{L}_p(0,T;\mathring{W}^m_{p,\sigma}(\Omega))$ такая, что

$$|||u_k - u||| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.4}$$

В силу (1.15)

$$\begin{aligned}< L(u_k) - L(u), v >&= \int_0^T (L(u_k, v) - L(u, v))\, dt = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} \int_0^T \int_\Omega (A_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u_k) - A_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u))\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx\, dt = \\ &= \sum_{|\alpha|,|\gamma|\le m} \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial A_\alpha\,(x,t;\mathcal{D}^\gamma u) + \tau(\mathcal{D}^\gamma u_k - \mathcal{D}^\gamma u))}{\partial \tau_\gamma} \mathcal{D}^\alpha(u_k - u)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx\, dt\, d\tau.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Оценим слагаемые последней суммы. В силу (1.14) имеем

$$\begin{aligned}J &= \left| \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial A_\alpha\,(x,t;\mathcal{D}^\gamma u) + \tau(\mathcal{D}^\gamma u_k - \mathcal{D}^\gamma u))}{\partial \tau_\gamma} \mathcal{D}^\alpha(u_k - u)\, \mathcal{D}^\alpha v\, dx\, dt\, d\tau \right| \le \\ &\le C \sum_{|\gamma|\le m} \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \rho^{\sigma p}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma u + \tau(\mathcal{D}^\gamma(u_k - u)|^{p-2}\, |\mathcal{D}^\alpha(u_k - u)| \times \\ &\times |\mathcal{D}^\alpha v|\, dx\, dt\, d\tau \le C_1 \sum_{|\gamma|\le m} \int_0^T \int_\Omega \rho^{p\sigma}(x) \left[|\mathcal{D}^\gamma u|^{p-2}\, |\mathcal{D}^\alpha(u_k - u)|\, |\mathcal{D}^\alpha v| + \right. \\ &\left. + |\mathcal{D}^\gamma(u_k - u)|^{p-1}\, |\mathcal{D}^\alpha v| \right] dx\, dt \le C_2 \sum_{|\gamma|\le m} \int_0^T \int_\Omega \rho^{p\sigma}(x) \times \\ &\times \left[\left(|\mathcal{D}^\gamma u|^{p-1} + |\mathcal{D}^\alpha v|^{p-1} \right) |\mathcal{D}^\gamma(u_k - u)| + |\mathcal{D}^\gamma(u_k - u)|^{p-1}\, |\mathcal{D}^\alpha v| \right] dx\, dt.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Оценим один из интегралов правой части последнего неравенства, поскольку остальные оцениваются аналогично. Имеем, с учетом теоремы А

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \rho^{p\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma u|^{p-1}\, |\mathcal{D}^\gamma (u_k-u)|\, dx\, dt = \\
&= \int_0^T \int_\Omega \rho^{\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma (u_k-u)|\, \rho^{\sigma(p-1)}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma u|^{p-1}\, dx\, dt \le \\
&\le \int_0^T \left(\int_\Omega \rho^{p\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma (u_k-u)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_\Omega \rho^{p\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma u|^p\, dx\right)^{1/q} dt \le \\
&\le \int_0^T \left(\sum_{|\gamma|\le m} \int_\Omega \rho^{p\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma (u_k-u)|^p\, dx\right)^{1/p} \times \\
&\times \left(\sum_{|\gamma|\le m} \int_\Omega \rho^{p\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma u|^p\, dx\right)^{1/q} dt = \\
&= \int_0^T \|u_k-u\|_1\, \|u\|_1^{p-1}\, dt \le C_3 \int_0^T \|u_k-u\|_{W^m_{p,\sigma}}\, \|u\|^{p-1}_{W^m_{p,\sigma}}\, dt \le \\
&\le C_3 \left(\int_0^T \|u_k-u\|^p_{W^m_{p,\sigma}}\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^T \|u\|^{q(p-1)}_{W^m_{p,\sigma}}\, dt\right)^{1/q} = C_3 |||u_k-u|||_p\, |||u|||_p^{p-1}.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Возвращаясь к неравенству (2.6), в силу (2.7) получим

$$
J \le C_4 \left[|||u_k-u|||_p \left(|||u|||_p^{p-1} + |||v|||_p^{p-1}\right) + |||u_k-u|||_p^{p-1} |||v|||_p \right]. \tag{2.8}
$$

Из (2.5), с учетом (2.4) и (2.8), приходим к окончательной оценке

$$
|< L(u_k) - L(u), v >| \le
$$

$$
\le C_5 |||u_k-u|||_p \left(|||u|||_p^{p-1} + |||v|||_p^{p-1} + |||u_k-u|||_p^{p-2}\, |||v|||_p\right) \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.
$$

Таким образом

$$
\lim_{k\to\infty} < L(u_k), v > = < L(u), v >,
$$

а это означает, что последовательность $\{L(u_k)\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится в пространстве $\mathbf{L}_q\left(0, T; (\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))^*\right)$, и полунепрерывность оператора L установлена, чем и завершается доказательство.

Теорема 2.2. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1) — 3) пункта 1.3. Тогда для любого $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ задача (1.1) — (1.3) разрешима в пространстве $\mathbf{L}_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$.*

Доказательство. Легко видеть, что теорема 2.1 гарантирует выполнение условий теоремы B, в силу которой для любого $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ и $T > 0$ существует по крайней мере одно решение $u(x,t)$ задачи (1.22), (1.23), принадлежащее пространству $\mathbf{L}_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$, и теорема доказана.

Теорема 2.3. *Пусть $p > 2$, а оператор L удовлетворяет условию (1.18). Тогда для любых начальных данных $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ решение задачи (1.22), (1.23) единственно в пространстве $\mathbf{L}^{\rm loc}_p(0,\infty;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$.*

Доказательство Пусть u_1, $u_2 \in H_T(u_0)$ – два решения задачи (1.22), (1.23). Тогда их разность $u_1 - u_2$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) + L(u_1) - L(u_2) = 0 \tag{2.9}$$

и

$$(u_1 - u_2)|_{t=0} = 0. \tag{2.10}$$

Теперь из тождества (2.9) следует, что для любого $\tau \in [0,T]$

$$\int_0^\tau < \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2), u_1 - u_2 > dt + \int_0^\tau < L(u_1) - L(u_2), u_1 - u_2 > dt = 0, \tag{2.11}$$

при этом сходимость первого интеграла обусловлена тем, что $\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) \in$ $\in \mathbf{L}_q(0,T;(\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))^*)$ (в силу определения обобщенного решения), а второго – леммой 1.1.

В силу монотонности оператора L из (2.11) следует

$$\int_0^\tau < \frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2), u_1 - u_2 > dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \|u_1 - u_2\|^2_{L_2}\, dt \le 0.$$

Нетрудно заметить, что из условия $p > 2$ и теоремы A следует принадлежность $u_1 - u_2$ пространству $\mathbf{L}_2(0,T;\mathbf{L}_2(\Omega))$. Теперь, с учетом начального условия (2.10), из последнего неравенства имеем

$$\int_\Omega |u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)|^2\, dx = 0.$$

В силу произвольности τ и T, отсюда заключаем, что $u_1 \equiv u_2$ в цилиндре Q. Теорема доказана.

§3. ПРИМЕР МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть основанием цилиндра Q служит единичный шар $K\{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < 1\}$ с границей $S = \partial K$. Для уравнения порядка $2m$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left[(1-|x|^2)^{p\,\sigma/2} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^{p-1} \right] +$$

$$+(1-|x|^2)^{p\,\sigma/2}\, u^{p-1} = 0, \tag{3.1}$$

часто встречающегося в приложениях, рассмотрим начально-краевую задачу

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \overline{K}, \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \nu^s}\right|_{\Sigma} = 0, \qquad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1, \tag{3.3}$$

где $\Sigma = (0, \infty) \times S$. Весовой показатель σ удовлетворяет условию (1.9), $\rho(x) = (1-|x|^2)^{1/2}$, а $p > 2$ – четное число. Покажем, что уравнение (3.1) принадлежит классу уравнений, рассмотренных в §1. С этой целью, проверим выполнение условий 1) — 3) пункта 1.3, §1. Условие (1.13) следует из очевидной оценки

$$\begin{gathered} |\mathcal{A}_\alpha(x, t; \xi_\gamma)| = \rho^{p\,\sigma}(x)\, |\xi_i^m|^{p-1} \le \rho^{p\,\sigma}(x) \sum_{|\gamma| \le m} |\xi_\gamma|^{p-1}, \\ \alpha \ne 0, \quad \mathcal{A}_0(x, t; \xi_\gamma) = \rho^{p\,\sigma}(x). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Имеем далее

$$\left|\partial_{\xi_\gamma} \mathcal{A}_\alpha(x, t; \xi_\gamma)\right| = \left|\partial_{\xi_i^m}(1 + (\xi_i^m)^{p-1})\right| = (p-1)\, |\xi_i^m|^{p-2} \le (p-1) \sum_{|\gamma| \le m} |\xi_\gamma|^{p-2}, \tag{3.5}$$

что доказывает справедливость условия (1.14).

Проверим справедливость условия 2). Для любого $u \in \mathrm{L}_p^{\mathrm{loc}}(0, \infty; \mathring{W}^m_{p,\sigma}(K))$ в силу четности p, имеем

$$\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x, t; \mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha u\, dx = \int_K \rho^{p\,\sigma}(x) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right)^p + |u(x)|^p \right) dx. \tag{3.6}$$

Нетрудно заметить, что справедлива двустороняя оценка

$$C_1 \|u\|_2^p \le \int_K \rho^{p\,\sigma/2}(x) \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right|^p + |u(x)|^p \right) dx \le \|u\|_2^p, \tag{3.7}$$

В самом деле, правое неравенство очевидно, а левое вытекает из легко проверяемой оценки

$$\frac{1+\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^{mp}}{1+\sum\limits_{|\alpha|=m}|\xi_\alpha|^p} \geq C_1 \tag{3.8}$$

с некоторой постоянной $C_1 > 0$.

Теперь, в силу теоремы А, из (3.6) и (3.7) получим

$$\int_K \rho^{p\sigma}(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right|^p + |u(x)|^p\right)dx \geq C_1\,\|u\|_2^p \geq C_2\|u\|^p_{W^m_{p,\sigma}} \tag{3.9}$$

и, стало быть, условие эллиптичности выполнено. Проверим, наконец, условие 3). Пусть $u, v \in \mathrm{L}_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty; W^m_{p\sigma}(K))$, $u-v \in \mathrm{L}_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty; \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(K))$. Тогда для любого $T>0$ в силу четности p, имеем

$$\begin{gathered}
I = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_0^T\int_K \left(\mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u) - \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma v)\right)\mathcal{D}^\alpha(u-v)\,dx\,dt = \\
= \int_0^T\int_K \rho^{p\sigma}(x)\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^{p-1} - \left(\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m}\right)^{p-1}\right]\frac{\partial^m(u-v)}{\partial x_i^m}\,dx\,dt + \\
+\int_0^T\int_K \rho^{p\sigma}(x)\left(u^{p-1}(x,t) - v^{p-1}(x,t)\right)\left(u(x,t)-v(x,t)\right)dx\,dt = \\
= (p-1)\int_0^T\int_K \rho^{p\sigma}(x)\int_0^1\left|\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} + \tau\frac{\partial^m(u-v)}{\partial x_i^m}\right|^{p-2}d\tau\left|\frac{\partial^m(u-v)}{\partial x_i^m}\right|^2 dx\,dt + \\
+(p-1)\int_0^T\int_K \rho^{p\sigma}(x)\int_0^1|u+\tau(u-v)|^{p-2}\,d\tau\,|u(x,t)-v(x,t)|^2\,dx\,dt.
\end{gathered} \tag{3.10}$$

Для любых a, b (см. [6])

$$\int_0^1 |a+\tau b|^{p-2}\,d\tau \geq C\,|b|^{p-2},$$

с некоторой постоянной $C>0$, не зависящей от a и b. Из (3.10), с учетом (3.7) и теоремы А, получим

$$\begin{gathered}
I \geq C(p-1)\int_0^T\int_K \rho^{p\sigma}(x)\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial^m(u-v)}{\partial x_i^m}\right|^p + |u-v|^p\right]dx\,dt \geq \\
\geq C_3\int_0^T \|u-v\|^p_{W^m_{p,\sigma}}\,dt
\end{gathered} \tag{3.11}$$

с некоторой постоянной $C_3>0$, и сильная эллиптичность оператора L установлена. Таким образом, выполнены все условия теорем 2.2 и 2.3. Из оценок (3.4), (3.5), (3.9), (3.11) и теорем 2.2, 2.3 непосредственно вытекает справедливость следующего утверждения :

Теорема 3.1. *Для любых начальных данных $u_0 \in \overset{\bullet}{W}{}^{m}_{p,\sigma}(K)$, существует единственное обобщенное решение задачи (3.1) — (3.3).*

§4. АТТРАКТОРЫ

4.1. В этом пункте будет доказано существование аттракторов полугрупп, порожденных начально–краевой задачей (1.1) — (1.3) (определение аттрактора см. [1], [5]).

Из теорем 2.2 и 2.3 следует существование семейства операторов $\{S_t,\ t \geq 0\}$, определенных на множестве начальных данных задачи (1.1) — (1.3), задачаемых следующим образом :

$$S_t u_0 = u(t), \tag{4.1}$$

где u – обобщенное решение задачи. Легко видеть, что $\{S_t\}$ – полугруппа, если оператор L зависит лишь от пространственных переменных.

Доказательство существования аттракторов опирается на одну общую теорему, установленную в [1]. Для полноты изложения приведем ее формулировку.

Теорема Г ([1], теорема 1.1). *Пусть* $\mathbf{X}$ *– банахово пространство с нормой* $\|\cdot\|$, *и пусть полугруппа* $\{S_t\}$, $S_t : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *удовлетворяет следующим условиям :*

а) полугруппа $\{S_t\}$ *равномерно ограничена, т.е. для любого* $R > 0$ *существует постоянная* $C(R) > 0$ *такая, что*

$$\|S_t u\| \leq C(R) \quad \text{при} \quad \|u\| \leq R \quad \text{и для любого} \quad t \geq 0; \tag{4.2}$$

б) существует ограниченное (компактное) в $\mathbf{X}$ *поглощающее множество* B_0, *т.е. для любого ограниченного множества* $B \subset \mathbf{X}$ *существует такое число* $T > 0$, *что*

$$S_t B \subset B_0 \qquad \text{для} \qquad t \geq T; \tag{4.3}$$

в) операторы $S_t : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *непрерывны при* $t \geq 0$.

Тогда у полугруппы $\{S_t\}$ *имеется ограниченный (компактный) в* $\mathbf{X}$ *аттрактор* $\aleph$.

Замечание 4.1 Пусть K – замкнутое подмножество пространства $\mathbf{X}$, слабо инвариантное относительно полугруппы $\{S_t\}$:

$$S_t K \subset K, \qquad t \geq 0, \tag{4.4}$$

и пусть для K выполнены условия теоремы Г. Тогда сужение $\{S_t|_K\}$ обладает аттрактором $\aleph_K$. Доказательство теоремы Г при этом сохраняется (см. [1], замечание 1.1).

Положим $K = \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$, $\mathbf{X} = \mathbf{L}_2(\Omega)$. Легко видеть, что подмножество $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}$ замкнуто в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Далее, в силу теорем 2.2 и 2.3 оно слабо инвариантно :

$$S_t \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega), \qquad t \geq 0. \tag{4.5}$$

Предположим, что функция $k(t)$, участвующая в условии (1.17), такова, что

$$\int_0^\infty e^{2a_0 t}\, k(t)\, dt = R_0 < +\infty, \tag{4.6}$$

а коэффициенты оператора L не зависят от t.

Теорема 4.1. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1) — 3) пункта 1.3, §1 и выполнено (4.6). Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (1.1) — (1.3), обладает аттрактором $\aleph \subset \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$, ограниченным в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 4.1. *Операторы S_t, действующие на пространстве $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$, непрерывны в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ при $t \geq 0$.*

Доказательство. Пусть u_0^1 и u_0^2 – произвольные элементы пространства $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$, а $u^1(x,t)$ и $u^2(x,t)$ – соответствующие им обобщенные решения задачи (1.1) — (1.3). Утверждение леммы равносильно следующей оценке, справедливой для любого $t \geq 0$:

$$\|S_t u_0^1 - S_t u_0^2\| \leq \|u_0^1 - u_0^2\|, \tag{4.7}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Из определения обобщенного решения следует, что для любых $t > 0$ и $v \in \mathbf{L}_p^{\mathrm{loc}}(0,\infty; \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega))$

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial(u^1 - u^2)}{\partial\tau}\, v(x,\tau)\, dx\, d\tau +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leq m} \int_0^t \int_\Omega \left(A_\alpha(x,\tau;\mathcal{D}^\gamma u^1) - A_\alpha(x,\tau;\mathcal{D}^\gamma u^2)\right) \mathcal{D}^\alpha v\, dx\, d\tau = 0. \tag{4.8}$$

Полагая в (4.8) $v = u^1 - u^2$, после несложных преобразований получим

$$\int_\Omega \left|u^1(x,\tau) - u^2(x,\tau)\right|^2 \, dx\Big|_0^t +$$

$$+2\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^t\int_\Omega \left(\mathcal{A}_\alpha(x,\tau;\mathcal{D}^\gamma u^1) - \mathcal{A}_\alpha(x,\tau;\mathcal{D}^\gamma u^2)\right)\mathcal{D}^\alpha(u^1 - u^2)\,dx\,d\tau = 0.$$

Отсюда в силу условия (1.18) имеем $\|u^1(t) - u^2(t)\| \le \|u_0^1 - u_0^2\|$, что равносильно оценке (4.7). Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Обобщенное решение задачи (1.1) — (1.3) удовлетворяет неравенству*

$$\|S_t u_0\|^2 = \|u(t)\|^2 \le e^{-2a_0 t}\left(\|u_0\|^2 + 2\int_0^t e^{2a_0\tau}k(\tau)\,d\tau\right), \quad t \ge 0. \tag{4.9}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи. Умножим тождество (1.1) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Получим

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}u\,dx + \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\,\mathcal{D}^\alpha u\,dx = 0.$$

В силу (1.17)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 + a_0\|u\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}} - k(t) \le 0. \tag{4.10}$$

Поскольку $p > 2$, то $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$, и из (4.10) следует оценка

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 + a_0\|u\|^2 \le k(t). \tag{4.11}$$

Применяя к (4.11) неравенство Гронуолла, приходим к оценке (4.9). Лемма 4.2 доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Проверим справедливость условий теоремы Г с учетом замечания 4.1. Выполнение условия а) теоремы вытекает из леммы 4.2. В самом деле, пусть $B \subset \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ – произвольное ограниченное в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множество :

$$B = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega), \|u\| \le R < \infty\}. \tag{4.12}$$

В силу оценки (4.9) имеем при любых $t \ge 0$ и $u_0 \in B$

$$\|S_t u_0\|^2 \le R^2 + 2\int_0^\infty e^{2a_0\tau}\,k(\tau)\,d\tau = R^2 + R_0 < \infty$$

и, стало быть, полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограничена.

Условие в) равносильно утверждению леммы 4.1. Проверим справедливость условия б). С этой целью обозначим через

$$B_0 = \{u \in \overset{\bullet}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega), \|u\| \leq R_0\}$$

(R_0 – постоянная, участвующая в (4.6)) и покажем что B_0 является поглощающим множеством. В самом деле, пусть $B \subset \overset{\bullet}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ – произвольное ограниченное множество, как в (4.12). В силу оценки (4.9) для любого $u_0 \in B$ имеем

$$\|S_t u_0\|^2 \leq e^{-2a_0\tau} \left(R^2 + R_0\right),$$

откуда следует, что существует $T = T(R) > 0$ такое, что $\|S_t u_0\| \leq R_0/2$ при $t \geq T$, а это означает, что B_0 – поглощающее множество полугруппы $\{S_t\}$. Таким образом, выполнены все условия теоремы Г и, стало быть, у полугруппы $\{S_t\}$ сущаествует аттрактор $\aleph$, ограниченный в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Теорема 4.1 доказана.

4.2. В этом пункте будет доказано существование компактного аттрактора полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1.1) — (1.3). В этой связи приведем одну теорему вложения для весовых пространств $W^m_{p,\sigma}(\Omega)$.

Теорема Д (см. [13], теорема 1.1.3). *Пусть $p \geq 1$, m и k – целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leq k \leq m$, а весовой показатель σ удовлетворяет условию (1.9). Тогда вложение*

$$W^m_{p,\sigma}(\Omega) \to W^k_{p,\alpha}(\Omega)$$

компактно в том и только том случае, если $m - \sigma > k - \alpha$.

Замечание 4.2. Ниже мы применим эту теорему для значений $\alpha = k = 0$. В этом случае имеем компактное вложение

$$W^m_{p,\sigma}(\Omega) \to L_p(\Omega), \tag{4.13}$$

поскольку, в силу (1.9), $m - \sigma > 0$.

Предложение 4.1. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям 1) — 3) пункта 1.3, §1. Пусть также выполнено условие*

$$\left|\frac{\partial A_\alpha(x,t;\xi_\gamma)}{\partial t}\right| \le C\rho^{p\,\sigma}(x) \sum_{|\gamma|\le m} |\xi_\gamma|^{p-1} \tag{4.14}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Тогда если решение u принадлежит пространству $\mathbf{L}_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)\bigcap W^{2m}_{p,\sigma}(\Omega))$, то семейство операторов $\{S_t\}$, порожденных задачей (1.1) — (1.3), отображает множества $B \subset \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$, ограниченные в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, в ограниченные множества пространства $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $T > 0$ фиксировано, а

$$U_0 = \{u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega), ||u_0|| \le R < \infty\} \tag{4.15}$$

– произвольное замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Пусть, далее, $u(x,t)$ – обобщенное решение задачи, соответствующее начальному условию $u_0 \in U_0$. Подставляя его в уравнение (1.1), умножая обе его части на $t^p Lu$ и интегрируя по области Ω, получим

$$\int_\Omega t^p\, L(u)\, \frac{\partial u}{\partial t}\, dx + t^p \int_\Omega |L(u)|^2\, dx = 0. \tag{4.16}$$

Отсюда следует неравенство

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega t^p\, \frac{\partial u}{\partial t} \mathcal{D}^\alpha \left(A_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\right) dx \le 0. \tag{4.17}$$

Интегрируя (4.17) по частям, имеем

$$\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega t^p\, \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{D}^\alpha u)\; A_\alpha \left(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\right) dx \le 0. \tag{4.18}$$

Интегрируя последнее неравенство по $t \in [0,T]$, после несложных преобразований получим

$$\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \int_0^T t^p\, \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{D}^\alpha u A_\alpha)\; dx\, dt - \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \int_0^T t^p\, \frac{\partial A_\alpha}{\partial t}\, \mathcal{D}^\alpha u\, dx\, dt \le 0. \tag{4.19}$$

Введем обозначения

$$J_1 = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \int_0^T t^p\, \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{D}^\alpha u A_\alpha)\; dx\, dt, \tag{4.20}$$

$$J_2 = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \int_0^T t^p \, \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial t} \, \mathcal{D}^\alpha u \, dx \, dt. \tag{4.21}$$

Интегрируя по частям, получим

$$J_1 = \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega t^p \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha u \, dx \Big|_0^T -$$

$$-p \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \int_0^T t^{p-1} \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha u \, dx \, dt. \tag{4.22}$$

Подставляя (4.22) в (4.19), приходим к неравенству

$$T^p \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha u \, dx \le J_1' + J_2, \tag{4.23}$$

где

$$J_1' = p \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \int_0^T t^{p-1} \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha u \, dx \, dt.$$

Последний интеграл оценим, используя условие (1.13). Имеем

$$|J_1'| \le p\, C\, T^{p-1} \sum_{|\alpha|,|\gamma|\le m} \int_\Omega \int_0^T \rho^{p\,\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\gamma u|^{p-1}\, |\mathcal{D}^\alpha u| \, dx \, dt.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в теореме 2.1 при доказательстве оценки (2.7), получим

$$|J_1'| \le C_1\, p\, T^{p-1} \int_0^T \|u(t)\|_1^p \, dt \le C_2\, p\, T^{p-1}\, |||u|||_p^p \tag{4.24}$$

с некоторой постоянной $C_2 > 0$.

Интеграл J_2 оценивается аналогично. В силу условия (4.24) имеем

$$|J_2| \le C\, T^p \sum_{|\alpha|,|\gamma|\le m} \int_\Omega \int_0^T \rho^{p\,\sigma}(x)\, |\mathcal{D}^\alpha u|^{p-1}\, |\mathcal{D}^\alpha u| \, dx \, dt \le C_3\, T^p\, |||u|||_p^q \tag{4.25}$$

с некоторой константой $C_3 > 0$.

Возвращаясь теперь к оценке (4.23), в силу (4.24) и (4.25) имеем

$$\sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u)\, \mathcal{D}^\alpha u \, dx \le \left(\frac{C_2\, p}{T} + C_3 \right) |||u|||_p^p. \tag{4.26}$$

Далее, в силу условия эллиптичности (1.17), из (4.26) получим

$$a_0\, \|u(T)\|^p_{W^m_{p,\sigma}} \le k(T) + C_4\, |||u|||_p^p$$

или

$$\|u(T)\|^p_{W^m_{p,\sigma}} \le C_5 \left(|||u|||^p_p + 1\right). \tag{4.27}$$

Интегрируя теперь неравенство по $t \in [0, T]$, придем к оценке

$$a_0\, |||u|||^p_p - \int_0^T k(t)\, dt \le -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|^2\, dt = -\frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 \le \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2,$$

откуда

$$|||u|||^p_p \le \frac{1}{2a_0}\|u_0\|^2 + \frac{1}{a_0}\int_0^T k(t)\, dt = \frac{1}{2a_0}\|u_0\|^2 + C_6, \tag{4.28}$$

где $C_6 = a_0^{-1} \int_0^T k(t)\, dt$.

Из (4.27) и (4.28) приходим к окончательной оценке :

$$\|S_T u_0\|^p_{W^m_{p,\sigma}} \le C_7 \left(\|u_0\|^2 + 1\right). \tag{4.29}$$

Поскольку $u_0 \in U_0$, то

$$\|S_T u_0\|^p_{W^m_{p,\sigma}} \le C_7\,(R^2 + 1) = C_8(R),$$

что и завершает доказательство предложения 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям предложения 4.1 и не зависит от t. Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (1.1) — (1.3) пункта 1.3, обладает аттрактором, компактным в $\mathbf{L}_2(\Omega)$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой Г нам надлежит проверить выполнение условия б), поскольку остальные условия проверены в процессе доказательства теоремы 4.1. Итак, докажем существование компактного в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ поглощающего множества. В силу предложения 4.1 произвольное замкнутое, ограниченное в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множество $U_0 \subset \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$ оператором S_t при $t \ge 0$ отображается в ограниченное множество пространства $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$. В силу теоремы Д и замечания 4.2 множество $S_t U_0$ компактно в $\mathbf{L}_p(\Omega)$, и поскольку $p > 2$, то оно компактно в $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Пусть B_0 – ограниченное в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ поглощающее множество, существование которого обеспечивается теоремой 4.1. Тогда множество $B^0 = S_1 B_0$ компактно в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Докажем, что B^0 – поглощающее множество. В самом деле, существует $T > 0$ такое, что $S_t U_0 \subset B_0$ при $t \ge T$. Далее, поскольку $\{S_t\}$ – полугруппа, то

$$S_t U_0 = S_1 S_{t-1} U_0 \subset S_1 B_0 = B^0 \quad \text{при} \quad t \ge T + 1,$$

а это и означает, в силу произвольности U_0, что B^0 – поглощающее множество.

Из теоремы Г следует, что у полугруппы $\{S_t\}$ имеется аттрактор, компактный в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Теорема доказана.

4.3. В этом пункте будет доказано существование компактного аттрактора полугруппы $\{S_t\}$, порожденной начально–краевой задачей для модельного уравнения (3.1).

Предложение 4.2. *Семейство операторов $\{S_t\}$, порожденных задачей (3.1) — (3.3), отображает множества $B \subset W^m_{p,\sigma}(K)$, ограниченные в $\mathbf{L}_2(K)$, в ограниченные множества пространства $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(K)$, если $u \in \mathbf{L}_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma} \bigcap W^{2m}_{p,\sigma}(K))$.*

Доказательство. Пусть

$$U_0 = \{u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(K); \|u_0\| \le R < \infty\}$$

– произвольное замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{L}_2(K)$, а $u(x,t)$ – решение задачи (3.1) — (3.3), соответствующее начальному условию $u_0 \in U_0$. Следуя схеме доказательства предложения 4.1, нетрудно убедиться в справедливости следующего неравенства :

$$\sum_{i=1}^n \int_K t^p \rho^{p\,\sigma}(x) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^p dx + \int_K t^p \rho^{p\,\sigma}(x) \frac{\partial u^p}{\partial t}\, dx \le 0 \qquad (4.30)$$

(ср. с (4.19)), здесь $\rho(x) = (1-|x|^2)^{1/2}$. Далее, поскольку

$$t^p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^p = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\,\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^p - p\,t^{p-1}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^p,$$

то легко видеть, что (4.30) после интегрирования по $t \in [0,T]$ примет вид

$$\sum_{i=1}^n \int_K \rho^{p\,\sigma}(x) \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(t\,\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^p + (t\,u)^p\right] dt\, dx -$$

$$-p\sum_{i=1}^n \int_K \int_0^T \rho^{p\,\sigma}(x) t^{p-1} \left[\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^p + u^p\right] dx\, dt \le 0.$$

Отсюда, в силу оценки (3.7) и (1.8), получим

$$\sum_{i=1}^n \int_K \rho^{p\,\sigma}(x) \left[\left|\frac{\partial^m u(x,T)}{\partial x_i^m}\right|^p + |u(x,T)|^p\right] dx \le \frac{C\,p}{T}\, |||u|||_p^p,$$

откуда

$$\|u(T)\|_{W^m_{p,\sigma}(\Omega)} \le C_1\, |||u|||_p$$

с некоторой постоянной $C_1 > 0$.

Далее, аналогично выводу неравенств (4.19) и (4.28), приходим к оценке

$$\|S_T u_0\|^p_{W^m_{p,\sigma}} \le C_2\, \|u_0\|^2 \tag{4.31}$$

и, поскольку $u_0 \in U_0$, то из (4.31) имеем

$$\|S_t u_0\|_{W^m_{p,\sigma}} \le C_3(R).$$

Доказательство завершено.

Из теоремы 3.1 и предложения 4.2 следует

Теорема 4.3. *Полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (3.1) — (3.3), обладает аттрактором, компактным в* $\mathbf{L}_2(K)$.

§5. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

В этом параграфе для некоторого специального класса уравнений вида (1.1) будет построена функция Ляпунова и с ее помощью описана структура аттракторов.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{A}_\alpha(x,t;\mathcal{D}^\gamma u) = 0 \tag{5.1}$$

и введем обозначения

$$h_\alpha(x,\xi) = \int_0^\xi \mathcal{A}_\alpha(x,\xi)\, d\xi, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{A}(x,\tau) = \sum_{|\alpha|\le m} h_\alpha(x,\tau_\alpha). \tag{5.3}$$

Из условия (1.13) легко следуют оценки

$$\begin{gathered} \int_0^\xi |\mathcal{A}_\alpha(x,\xi)|\, d\xi \le \frac{C}{p}\, \rho^{\sigma p}(x)\, |\xi|^{p-1}, \\ \int_\Omega |h_\alpha(x,\mathcal{D}^\alpha u|\, dx \le \frac{C}{p} \int_\Omega \rho^{\sigma p}(x)\, |\mathcal{D}^\alpha u|^p\, dx \le C\, \|u\|_1^p. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(u) = \int_\Omega \mathcal{A}(x,u,\dots,\mathcal{D}^\alpha u,\dots)\, dx, \tag{5.5}$$

определенный в силу (5.4) на пространстве $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$.

Теорема 5.1. *Предположим, что выполненеы условия теоремы 4.2. Тогда функционал Φ, задаваемый выражением (5.5), является функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (5.1), (1.2), (1.3).*

Доказательство. В силу теоремы 4.2 полугруппа $\{S_t\}$ обладает аттрактором $\aleph$, компактным в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Далее, в соответствии с определением функции Ляпунова (см. [1]), проверим вначале, что функционал Φ непрерывен на множестве $\aleph$. С этой целью составим разность

$$\begin{aligned}\Phi(u)-\Phi(v) &= \int_\Omega [\mathcal{A}(x,u,...,\mathcal{D}^\alpha u,...)-\mathcal{A}(x,u,...,\mathcal{D}^\alpha v,...)]\,dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial\mathcal{A}(x,...,\mathcal{D}^\alpha v+t(\mathcal{D}^\alpha u-\mathcal{D}^\alpha v)...)}{\partial\tau_\alpha}\mathcal{D}^\alpha(u-v)\,dt\,dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\int_0^1 \mathcal{A}_\alpha(x,...,\mathcal{D}^\alpha v+t\,\mathcal{D}^\alpha(u-v),...)\,\mathcal{D}^\alpha(u-v)\,dx\,dt = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x,...,\mathcal{D}^\alpha w^*,...)\,\mathcal{D}^\alpha(u-v)\,dx,\end{aligned}$$

где $w^*=v+t^*(u-v)$, а $0<t^*<1$.

Повторяя теперь рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 1.1, придем к оценке

$$|\Phi(u)-\Phi(v)|\le C\,\|u-v\|_1\,\|w^*\|_1^{p-1}\le C\,(\|u\|_1+\|v\|_1)^{p-1}\,\|u-v\|_1. \tag{5.6}$$

Поскольку множество $\aleph$ в силу предложения 4.1 ограничено в $\overset{\circ}{W}{}^m_{p,\sigma}(\Omega)$, то из (5.6) следует, что

$$|\Phi(u)-\Phi(v)|\le C_1\,\|u-v\|_1$$

с некоторой постоянной $C_1>0$, и непрерывность функционала Φ на $\aleph$ установлена.

Покажем теперь, что функционал Φ дифференцируем в смысле Фреше. Имеем для любых $u,v\in\aleph$

$$<\Phi'(u),v>=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\tau_\alpha}\mathcal{D}^\alpha v\,dx=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\mathcal{A}_\alpha(x,\mathcal{D}^\alpha u)\,\mathcal{D}^\alpha v\,dx.$$

Далее, в соответствии с определением функции Ляпунова, покажем, что $\Phi(S_tu_0)$, как функция переменной t, убывает при $t\ge 0$ и что множество решений уравнения $Lu = 0$ совпадает с множеством неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$. В самом деле, для любого $u \in \aleph$

$$\partial_t \Phi(S_t u_0) = \partial_t \Phi(u(t,x)) =< \Phi'(u), \frac{\partial u}{\partial t} >= \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega \mathcal{A}_\alpha(x, \mathcal{D}^\alpha u) \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{D}^\alpha u)\, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{A}_\alpha(x, \mathcal{D}^\alpha u)) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = -\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \le 0 \tag{5.7}$$

и, стало быть, функция $\Phi(S_t u_0)$ убывает при $t \ge 0$.

Предположим, что при некотором $t = \tau > 0$

$$\Phi(u(t,x)) - \Phi(u(0,x)) = \Phi(u_0).$$

В силу (5.7) имеем

$$0 = \Phi(u(\tau,x)) - \Phi(u_0) = \int_0^\tau \partial_t \Phi(u(t,x))\, dt = -\int_0^\tau |Lu|^2\, dt,$$

откуда следует, что $Lu = 0$ при $t \in [0,\tau]$. Положим $z = u_0(x)$. Поскольку

$$Lu_0 = Lu(0,x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0,$$

то функция $z(x)$ является решением задачи (5.1), (1.2), (1.3) и, следовательно, для любого $t \ge 0$ $S_t z = z$, т.е. z – неподвижная точка полугруппы $\{S_t\}$. Теорема доказана.

Из теорем 5.1, 4.2 и 10.2, [1] непосредственно следует

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теорем 4.2 и 5.1, и пусть множество $\mathcal{N} = \{z_1(x), ..., z_s(x)\}$ решений уравнения $Lu = 0$ конечно. Тогда аттрактор $\aleph$ имеет следующую структуру :*

$$\aleph = \bigcup_{z_i \in \mathcal{N}} N(z_i),$$

где $N(z_i)$ – неустойчивое инвариантное многообразие, исходящее из точки z_i.

ABSTRACT. In the paper initial boundary value problem for a wide class high–order quasilinear degenerate evolutionary partial differential equations is investigated. The existence and uniqueness of solutions of mixed problems in the wight functional spaces is established. The existence of attractors of semigroups generated by mixed problems is proved. Global Lyapunov function is constructed and the structure of attractors is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности", УМН, т. 38, № 4(232), стр. 133 — 187, 1983.
2. О. А. Ладыженская, "О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса", Зап. науч. сем. ЛОМИ, т. 27, стр. 91 — 115, 1972.
3. О. А. Ладыженская, "О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными", УМН, т. 42, № 6(258), стр. 25 — 80, 1987.
4. А. В. Бабин, М. И. Вишик, "Спектральное и стабилизированное асимптотическое поведение решений нелинейных эволюционных уравнений", УМН, т. 43, № 5(263), стр. 99 — 132, 1988.
5. А. В. Бабин, М. И. Вишик, Аттракторы эволюционных уравнений, М., Наука, 1989.
6. Ю. А. Дубинский, "Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка", УМН, т. 23, No 1(123), стр. 45 — 90, 1968.
7. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Построение аттракторов нелинейных параболических операторов высокого порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 25, № 6, стр.549 — 559, 1990.
8. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "О функции Ляпунова полугрупп, порожденных нелинейными параболическими уравнениями высокого порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 26, № 3, стр. 242 — 250, 1991.
9. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Построение аттрактора одного модельного нелинейного параболического уравнения высокого порядка", Изв. АН Армении, Математика, т. 27, № 4, стр. 59 — 69, 1992.
10. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Смешанная задача для нелинейных вырождающихся систем типа Соболева", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 18 — 30, 1993.
11. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Аттракторы эволюционных систем типа Соболева", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 5, стр. 21 — 30, 1994.
12. Г. С. Акопян, Р. Л. Шахбагян, "Смешанная задача для нелинейных вырождающихся систем типа Соболева", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 1, стр. 17 — 32, 1995.
13. С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, Н. В. Мирошин, "Весовые функциональные пространства и их приловения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений", Изв. ВУЗ-ов, сер. Матем., т. 8 (315), стр. 4 — 30, 1988.
14. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью", Труды МИ АН СССР, т. 163, стр. 157 — 183, 1983.
15. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, "Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением (случай обобщенных решений)", Труды МИ АН СССР, т. 157, стр. 90 — 118, 1981.
16. Ж.–Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., Мир, 1972.

21 июня 1996 Ереванский государственный университет