О ЗАМЫКАНИИ СИСТЕМЫ МНОГОЧЛЕНОВ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

| И. О. Хачатрян |

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 2, 1996

Пусть $w(t) \geq 1$ – действительная измеримая функция, определенная на объединении E линий $\mathrm{Im} z = \pi/2$ и $\mathrm{Im} z = -\pi/2$ таких, что $t^n w^{-1}(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$, $t \in E, n = 0, 1, \ldots$. Пусть $\mathbf{C}_w(E)$ – пространство непрерывных функций $f(t)$, определенных на E, удовлетворяющих условию $f(t)\, w^{-1}(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$, $t \in E$, и пусть $P_w(E)$ означает замыкание системы многочленов в метрике пространства $\mathbf{C}_w(E)$. В статье приводится критерий для замыкаемости многочленов в $\mathbf{C}_w(E)$ и описывается пространство $P_w(E)$ при условии, что $P_w(E) \neq \mathbf{C}_w(E)$.

1^0. Пусть $w(t) \geq 1$ – действительная измеримая функция, определенная на объединении E двух линий $\mathrm{Im}\, z = \pi/2$ и $\mathrm{Im}\, z = -\pi/2$ таких, что

$$t^n w^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty, \quad t \in E, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Через $\mathbf{C}_w(E)$ обозначим пространство непрерывных функций, определенных на E, удоветворяющих условию

$$f(t)\, w^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при} \quad |t| \to +\infty, \quad t \in E.$$

Норму функции $f \in \mathbf{C}_w(E)$ определим как

$$\|f\| = \sup_{t \in E} |f(t)|\, w^{-1}(t). \tag{2}$$

Через $P_w(E)$ обозначим замыкание системы многочленов в метрике пространства $\mathbf{C}_w(E)$ так, что

$$P_w(E) \subset \mathbf{C}_w(E).$$

Вопрос, являющийся продолжением классической задачи С. Н. Бернштейна для вещественной оси (см. [1]) был поставлен в ряде статей : вывести необходимые и достаточные условия в терминах весовой функции $w(t)$, при которых замыкание системы многочленов совпадает с пространством $\mathbf{C}_w(E)$, т.е.

$$P_w(E) = \mathbf{C}_w(E). \tag{3}$$

В работах М. М. Джрбашяна [2] и С. Н. Мергеляна [3] задача замыкаемости многочленов была рассмотрена на произвольных кривых. Мы выводим некоторые следствия из результатов этих работ для нашего случая.

Теорема (М. М. Джрбашян, [2]). *Пусть функция $w(t)$ нормально возрастающая, т.е. допускает представление*

$$w(t) = w(|t|) = w(1)\exp\left\{\int_1^{|t|} \frac{\omega(u)}{u}\,du\right\},$$

где $\omega(u) \uparrow +\infty$ при $u \uparrow +\infty$. Тогда (3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int^{+\infty} e^{-|t|}\ln w(t)\,dt = \infty.$$

В статье [3] содержится необходимое и достаточное условие для (3) без каких–либо ограничений на вес $w(t)$. Для формулировки этого результата обозначим через $\mathcal{M}_w$ множество многочленов $p(t)$, удовлетворяющих условиям $\|t^{-1}p(t)\| \le 1$ и положим $\widetilde{w}(z) = \sup\limits_{p\in\mathcal{M}} |p(z)|$.

Теорема (С. Н. Мергелян, [3]). *Условие*

$$\widetilde{w}(z) = +\infty, \quad z \notin E$$

необходимо и достаточно для выполнения (3).

2^0. Ниже мы даем *интегральный* критерий замыкаемости многочленов в $\mathbf{C}_w(E)$ для произвольной весовой функции $w(t)$. Результат аналогичен теореме С. Н. Мергеляна для оси. Мы также описываем пространство P_w в случае, когда $P_w \ne \mathbf{C}_w$.

Теорема 1. *Нижеследующие условия (4), (5) необходимы и достаточны для (3) :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\widetilde{w}\,(\xi \pm i\pi/2)\,\frac{d\xi}{\xi^2+1} = +\infty, \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\frac{\pi}{2}) \frac{d\xi}{\cosh \xi} + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\frac{\pi}{2}) \frac{d\xi}{\cosh \xi} = +\infty. \tag{5}$$

Доказательство *Необходимость* : Пусть $P_w = \mathbf{C}_w$. Имеем $\widetilde{w}(z) = +\infty$, $z \notin E$. Для произвольного многочлена $p(z)$

$$\ln |p(z)| \leq -\frac{1}{\pi}(y + \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |p(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y + \frac{\pi}{2})^2}, \quad \operatorname{Im} z < -\frac{\pi}{2},$$

$$\ln |p(z)| \leq \frac{1}{\pi}(y - \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |p(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y - \frac{\pi}{2})^2}, \quad \operatorname{Im} z > \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \ln |p(z)| \leq \frac{1}{\pi} e^x \cos y \Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln |p(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi \, d\xi}{(e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |p(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi \, d\xi}{(-e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} \Bigg], \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Теперь пусть $p \in \mathcal{M}_w$. Тогда $|p(t)| \leq \widetilde{w}(t)$, $t \in E$ и с помощью неравенств (6) получим

$$\ln |p(z)| \leq -\frac{1}{\pi}(y + \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y + \frac{\pi}{2})^2}, \quad y < -\frac{\pi}{2},$$

$$\ln |p(z)| \leq \frac{1}{\pi}(y - \frac{\pi}{2}) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y - \frac{\pi}{2})^2}, \quad y > \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \ln |p(z)| \leq \frac{1}{\pi} e^x \cos y \Bigg[\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi \, d\xi}{(e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\frac{\pi}{2})| \frac{e^\xi \, d\xi}{(-e^\xi + e^x \sin y)^2 + (e^x \cos y)^2} \Bigg], \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Взяв в этих неравенствах супремум по $\mathcal{M}_w$ в точках $z = -i(1+\pi/2)$, $z = i(1+\pi/2)$ и $z = 0$, соответственно, получим (4) и (5).

Достаточность : Докажем, что если $P_w \neq \mathbf{C}_w$, то по крайней мере одно из условий (4) и (5) не выполняется. Согласно теореме Хана–Банаха существует нетривиальный функционал, равный нулю на многочленах. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный функционал такой, что

$$\mathcal{F}[t^n] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для каждого многочлена $p(t)$ имеем

$$\mathcal{F}\left[\frac{p(t) - p(z)}{t - z}\right] = 0. \tag{7}$$

Обозначая $F(z) = \mathcal{F}[(t-z)^{-1}]$, из (7) получим

$$p(z)F(z) = \mathcal{F}\left[(t-z)^{-1}p(t)\right]. \tag{7'}$$

Пусть теперь $p \in \mathcal{M}_w$. Мы имеем

$$\left|\mathcal{F}\left[\frac{p(t)}{t-z}\right]\right| \le \|\mathcal{F}\| \cdot \|\frac{p(t)}{t-z}\| = \|\mathcal{F}\| \cdot \|\frac{p(t)}{t}\frac{t}{t-z}\| =$$

$$= \|\mathcal{F}\| \cdot \|\frac{p(t)}{t}\| \cdot \max_{t\in E}\left|\frac{t}{t-z}\right| \le C\left(1 + \frac{|z|}{\delta(z)}\right),$$

где C – постоянная, не зависящая от многочлена $p \in \mathcal{M}_w$, а $\delta(z) = \delta(z, E)$ – расстояние z от множества E. Следовательно, для каждого многочлена $p \in \mathcal{M}_w$

$$|p(z)|\,|F(z)| \le C\left(1 + \frac{|z|}{\delta(z)}\right).$$

Поэтому

$$\widetilde{w}(z)|F(z)| \le C\left(1 + \frac{|z|}{\delta(z)}\right) \tag{8}$$

или, эквивалентно

$$|F(z)| \le C\frac{\delta(z) + |z|}{\delta(z)\,\widetilde{w}(z)}. \tag{8'}$$

По условию $P_w \ne \mathbf{C}_w$. Следовательно, $\widetilde{w}(z) \not\equiv +\infty$ по крайней мере для одной из областей Δ_-, Δ или Δ_+, где

$$\Delta_- = \{z:\quad \operatorname{Im} z < -\pi/2\},\quad \Delta = \{z:\quad \operatorname{Im} z < \pi/2\},\quad \Delta_+ = \{z:\quad \operatorname{Im} z > \pi/2\}.$$

Если $\widetilde{w}(z_0) < +\infty$, $z_0 \in \Delta_-$ ($z_0 \in \Delta$, $z_0 \in \Delta_+$), то $\widetilde{w}(z) < +\infty$ для всех $z \in \Delta_-$ (соответственно для $z_0 \in \Delta$, $z_0 \in \Delta_+$). Возможны следующие случаи :

a) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta_-$. Тогда среди функционалов $\mathcal{F}$, равных нулю на многочленах, существует функционал, для которого соответствующая функция $F(z)$ в Δ_- не равна нулю тождественно. Из 8 ′) следует, что $F(z)$ ограничена в области $\operatorname{Im} z \le -\pi$. Следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|F(\xi - i\pi)|}{1+\xi^2}\,d\xi > -\infty. \tag{9}$$

С учетом (8) и (9), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \widetilde{w}(\xi - i\pi)}{1+\xi^2}\,d\xi < +\infty. \tag{10}$$

Для всякого многочлена $p \in \mathcal{M}_w$ можем написать

$$\ln|p(z)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|p(\xi - i\pi)| \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} ds \le \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} ds, \quad (11)$$

где $\dfrac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} ds = \dfrac{y+\pi}{\pi} \dfrac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y+\pi)^2}$ – нормальная производная функции Грина для задачи Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\pi$, $z = x + iy$. Сходимость последнего интеграла следует из (10). С помощью (11) получим

$$\ln \widetilde{w}(z) \le \frac{y+\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + (y+\pi)^2}, \quad \operatorname{Im} z > -\pi. \quad (12)$$

Из (12) следует, что $\widetilde{w}(z)$ ограничена для всех z в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\pi$. Следовательно, в этом случае

$$\widetilde{w}(z) < +\infty, \quad z \in \mathbf{C}. \quad (13)$$

Фиксируя $y_0 > -\pi$, запишем (12) следующим образом :

$$\ln \widetilde{w}(x + iy_0) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n} d\xi. \quad (12')$$

Умножая обе части формулы (12) на $\dfrac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n}$ и интегрируя по $(-\infty, +\infty)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(x + iy_0) \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n} dx \le$$
$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n} d\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi)\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + (1+y_0)i)}{\partial n} \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n} dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi - i\pi) \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n} ds < +\infty.$$

Здесь мы использовали тот факт, что функция $\dfrac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n}$ $(y_0 > -\pi)$ сужение гармонической в полуплоскости $\operatorname{Im} z > -\pi$ функции $\dfrac{\partial G_{-\pi}(\zeta; z)}{\partial n}$ на линию $\operatorname{Im} z = y_0$, а $\dfrac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n}$ – нормальная производная функции Грина для задачи Дирихле в $\operatorname{Im} z > y_0$ в точке $(x_0, 1 + y_0)$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G_{y_0}(x + iy_0; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n} \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x + iy_0)}{\partial n} dx = \frac{\partial G_{-\pi}(\zeta; x_0 + i(1+y_0))}{\partial n}.$$

Следовательно, интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(x+iy_0)\, \frac{\partial G_{y_0}(x+iy_0; x_0+i(1+y_0))}{\partial n}\, dx < +\infty \tag{14}$$

сходятся для любого $y_0 > -\pi$.

Взяв в (14) $y_0 = -\pi/2$ и $y_0 = \pi/2$, легко проверить, что условия (4) и (5) не выполняются. Аналогичное заключение справедливо в случае б) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta_+$. Таким образом, для этих двух случаев имеем $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \mathbf{C}$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\eta)\, \frac{d\xi}{1+\xi^2} < +\infty$$

для любого $\eta \in \mathbb{R}$. Из последних неравенств следует, что случай $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta_-(z \in \Delta_+)$; $w(z) = +\infty$, $z \in \dot{\Delta}$ невозможен. Остается рассмотреть случай

$$\text{c)}\quad \widetilde{w}(z) = +\infty, \quad z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+, \tag{15}$$

$$\widetilde{w}(z) < +\infty, \quad z \in \Delta.$$

Имеем

$$F(z) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right] \equiv 0, \qquad z \in \Delta_+ \bigcup \Delta_-. \tag{16}$$

Используя общий вид линейного функционала в пространстве $\mathbf{C}_{\widetilde{w}}(E)$, получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\sigma(t)}{(t-z)\,\widetilde{w}(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\sigma_1(t)}{(t-z)}.$$

Следовательно, функция $F(z)$ ограниченного типа в полосе Δ, имеет граничные значения $F(t)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln |F(\xi - i\pi/2)|\, \frac{d\xi}{\cosh \xi} > -\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |F(\xi + i\pi/2)|\, \frac{d\xi}{\cosh \xi} > -\infty. \tag{17}$$

Условие (16) эквивалентно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{d\sigma_1(t)}{t-z} \equiv 0, \quad z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+. \tag{18}$$

Из (18) следует, что функция $\sigma_1(t)$ абсолютно непрерывна, а граничные значения $F(t)$ совпадают с $\sigma_1'(t)$ почти всюду в E. Поэтому

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{\sigma_1'(t)\, dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{F(t)\, dt}{t-z}. \tag{19}$$

Из равенства $d\sigma(t) = \widetilde{w}(t)\,d\sigma_1(t) = \widetilde{w}(t)\,\sigma_1'(t)\,dt$ мы заключаем, что мера σ абсолютно непрерывна и $d\sigma(t) = \sigma'(t)\,dt$, следовательно

$$F(t) = \frac{\sigma'(t)}{\widetilde{w}(t)}. \tag{20}$$

Таким образом, условие (17) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\ln|\sigma'(\xi \pm i\pi/2)| - \ln|\widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2)|]\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} > -\infty.$$

Пользуясь хорошо известным неравенством $\exp\int f\,d\mu \le \int \exp f\,d\mu$, $\int d\mu = 1$, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\sigma'(\xi \pm i\pi/2)|\,\frac{d\xi}{k\cosh\xi} \le \ln\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma'(\xi \pm i\pi/2)|\,\frac{d\xi}{k\cosh\xi}\right] =$$

$$= \ln\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\sigma(\xi \pm i\pi/2)|}{k\cosh\xi}\right] < +\infty,$$

где $k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\cosh\xi}$. Следовательно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2)\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} < +\infty.$$

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 легко вывести следующий критерий полноты типа Полларда.

Теорема 2. *Пусть весовая функция $w(t)$ непрерывна на E. Нижеследующие условия I, II необходимы и достаточны для того, чтобы множество многочленов было всюду плотно в $\mathbf{C}_w(E)$:*

I. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln w(\xi \pm i\pi/2)\frac{d\xi}{\xi^2+1} = +\infty; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \ln[w(\xi + i\pi/2)\,w(\xi - i\pi/2)]\,\frac{d\xi}{\cosh\xi} = +\infty;$$

II. существует последовтаельность многочленов $P_n(t)$ с ограниченными нормами, поточечно сходящаяся к $w(t)$ на E, т.е.

$$\|P_n(t)\| \le M, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{и} \quad \lim P_n(t) = w(t), \quad t \in E.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $P_w = \mathbf{C}_w$. Условия (4) и (5) выполняются по теореме 1. Для доказательства условия II мы выбираем непрерывную функцию $f_n(t)$ такую, что $f_n(t) = 1, t \in E, |\mathrm{Re}\, t| < n$; $|f_n(t)| \le 1, t \in E$; $f_n(t) = 0$, $|\mathrm{Re}\, t| > n+1$. Для функции $f_n(t)\, w(t) \in \mathbf{C}_w(E)$ существует многочлен $P_n(t)$ такой, что $\|f_n(t)w(t) - P_n(t)\| < 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Имеем $\|P_n(t)\| \le \|f_n(t)w(t)\| + 1/n \le 2$ и $|w(t) - P_n(t)| < 1/n$, $|\mathrm{Re}\, t| < n$ или $\lim P_n(t) = w(t)$.

Достаточность. Предположим, что оба условия I и II выполнены. Пусть $\{P_n(t)\}$ – последовательность многочленов, удовлетворяющая условию II. Имеем $P_n(t)/M \in \mathcal{M}_w$ и, следовательно

$$\widetilde{w}(t) = \sup_{P \in \mathcal{M}_w} |P(t)| \ge \sup_{n \in \mathcal{N}} \left| \frac{1}{M} P_n(t) \right| = \frac{1}{M} w(t).$$

Так как $w(t)$ удовлетворяет условию I, то для $\widetilde{w}(t)$ выполняются (4) и (5). Поэтому $P_w = \mathbf{C}_w$. Теорема 2 доказана.

3⁰. Теперь мы обратимся к описанию замыкания $P_w(E)$ системы многочленов, предполагая, что $P_w \ne \mathbf{C}_w$. Согласно теореме Мергеляна по крайней мере в одной из областей Δ_-, Δ_+ и Δ имеем $\widetilde{w}(z) \not\equiv \infty$. С учетом рассуждений, используемых при доказательстве теоремы 1, возможны следующие случаи : а) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \mathbf{C}$; б) $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta$; $\widetilde{w}(z) = +\infty$, $z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \mathbf{C}$, и пусть $f_0(t) \in P_N$ (без потери общности можно предположить, что $\|f_0(t)\| \le 1$). Существует многочлен $Q_n(t)$ такой, что $\|Q_n(t) - f_0(t)\| < 1/n$ и $\|Q_n(t)\| \le 1$. Имеем $\sup_{n \in \mathcal{N}} |Q_n(z)| \le$ $\le \sup_{P \in \mathcal{M}_w} |P(z)| = \widetilde{w}(z)$. Таким образом, $\{Q_n\}$ – компактное семейство в любой части плоскости. Следовательно, из $\{Q_n\}$ мы можем выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любом круге $|z| \le R$. Предельную функцию обозначим через $\widetilde{f}_0(z)$. Заметим, что $\widetilde{f}_0(z)$ – целая функция и $|\widetilde{f}_0(z)| \le \widetilde{w}(z)$. С другой стороны, из $\|f_0(t) - Q_n(t)\| < 1/n$ следует, что $\lim Q_n(t) = f_0(t)$, $t \in E$, где сходимость равномерна на любом компакте из E. Это означает, что $f_0(t) = \widetilde{f}_0(t)$, $t \in E_0$ где $E_0 = \{t \in E\colon w(t) \not\equiv \infty\}$. Далее, из сходимости интеграла (4) следует сходимость интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi + i\alpha)\, \frac{d\xi}{\xi^2 + 1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |\widetilde{f}_0(\xi + i\alpha)|\, \frac{d\xi}{\xi^2 + 1},$$

для любой $\alpha \in \mathbb{R}$ и неравенства

$$\ln \widetilde{w}(z) \le \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi)\, \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2},$$

$$\ln|\widetilde{f}_0(z)| \le \frac{|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|\widetilde{f}_0(\xi)|\,\frac{d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}.$$

Отсюда заключаем, что $\widetilde{f}_0(z)$ – целая функция порядка 0, а функция $\widetilde{w}(z)$ допускает оценку $\ln\widetilde{w}(iy) = o(|y|)$ при $|y| \to +\infty$. Таким образом, для случая а) каждая функция $f(t) \in \mathbf{C}_w(E)$, допускающая приближение многочленами на E есть сужение на E некоторой целой функции $f(z)$ порядка 0, удовлетворяющей условию $|f(z)| \le C_f\widetilde{w}(z)$.

Докажем обратное : если $f(z)$ – целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию

$$|f(z)| \le C_f\widetilde{w}(z), \quad f \in \mathbf{C}_w(E), \tag{21}$$

то $f \in P_w$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольный линейный функционал такой, что $\mathcal{F}(t^n) = 0$ и $f(t)$ – произвольная целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию (21). Покажем, что $\mathcal{F}[f] = 0$. Пусть $\varphi(t)$ – произвольная целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию

$$\|t^{-1}\varphi(t)\| \le 1, \qquad \lim\left[\varphi(t)t^{-1}w^{-1}(t)\right] = 0. \tag{22}$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)}{t-z}\right] - \varphi(z)\mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right].$$

Очевидно, $g(z)$ – целая функция. Покажем, что она порядка 0. Имеем

$$\begin{aligned}|g(z)| &\le \|\mathcal{F}\|\left\|\frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{t}{t-z}\right\| + |\varphi(z)|\|\mathcal{F}\|\left\|\frac{1}{t-z}\right\| \le\\ &\le \|\mathcal{F}\|\left\|\frac{\varphi(t)}{t}\right\|\max_{t\in E}\left|\frac{t}{t-z}\right| + |\varphi(z)|\|\mathcal{F}\|\max_{t\in E}\left|\frac{1}{(t-z)\,w(t)}\right| \le\\ &\le \|\mathcal{F}\|\left(1+\frac{|z|}{\delta(z)}\right) + \|\mathcal{F}\|\,|\varphi(z)|\,\frac{1}{\delta(z)} = \frac{\|\mathcal{F}\|}{\delta(z)}\left(\delta(z)+|z|+|\varphi(z)|\right),\end{aligned}$$

где $\delta(z)$ – расстояние z от множества E, т.е. $\delta(z) = \min(|y-\pi/2|, |y+\pi/2|)$. Предполагая, что $|z| \ge \pi$, мы можем написать $\delta(z) \le 3|z|$, $\delta^{-1}(z) \le |y-\pi/2|^{-1} + |y+\pi/2|^{-1} \le 3|z||y^2-\pi^2/4|^{-1}$. Поскольку $y^2 - \pi^2/4 = -\dfrac{1}{4z^2}\left(z^2-|z|^2+i\pi z\right) \times \left(z^2-|z|^2-i\pi z\right)$ для $|z| \ge \pi$, то можно получить следующую оценку для $g(z)$:

$$\left|g(z)\left(z^2-|z|^2+i\pi z\right)\left(z^2-|z|^2-i\pi z\right)\right| \le 4|z|^2\|\mathcal{F}\|(4|z|+|\varphi(z)|). \tag{22'}$$

Пусть $|\zeta| < r/2$, $r = |z|$ и $|z| \geq \pi$. Имеем

$$|\zeta^2 - r^2 \pm i\pi\zeta| \geq r^2 - |\zeta|^2 - \pi|\zeta| \geq \frac{r}{4}(3r - 2\pi) \geq \frac{r^2}{4}.$$

По формуле Коши

$$g(\zeta)\,\left(\zeta^2 - r^2 + i\pi\zeta\right)\,\left(\zeta^2 - r^2 - i\pi\zeta\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{g(z)\,\left(z^2 - r^2 + i\pi z\right)\,\left(z^2 - r^2 - i\pi z\right)}{z - \zeta}\,dz,$$

тогда как из (22′) для $|\zeta| < r/2$ имеем

$$|g(\zeta)\,\left(\zeta^2 - r^2 + i\pi\zeta\right)\,\left(\zeta^2 - r^2 - i\pi\zeta\right)| \leq$$
$$\leq 2\max_{|z|=r}|g(z)\,\left(z^2 - r^2 + i\pi z\right)\,\left(z^2 - r^2 - i\pi z\right)| \leq$$
$$\leq 8r^2\|\mathcal{F}\|(4r + \max_{|z|=r}|\varphi(z)|) = 8r^2\|\mathcal{F}\|(4r + \mathcal{M}_\varphi(r)),$$

откуда следует, что $|g(\zeta)| \leq 16r^{-2}(4r + \mathcal{M}_\varphi(r)) \leq \mathrm{const}\,\mathcal{M}_\varphi(r)$. Следовательно, $\mathcal{M}_g(r) \leq \mathrm{const}\,\mathcal{M}_\varphi(2r)$. Это означает, что $g(z)$ – также целая функция порядка 0. Легко проверить, что $g(z)$ стремится к нулю вдоль мнимой оси. Поэтому $g(z) \equiv 0$. Итак, для любой функции $\varphi(z)$ порядка 0, удовлетворяющей условию (22) при любом $z \in \mathbf{C}$, имеем

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t) - \varphi(z)}{t - z}\right] = 0.$$

Пусть z_0 – корень $\varphi(z)$. Имеем

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)}{t - z_0}\right] = 0. \tag{23}$$

Пусть f – произвольная целая функция порядка 0, удовлетворяющая условию (21). Функция $\varphi(t) = (t - i)\,f(t)$ удовлетворяет условию (22) и $\varphi(i) = 0$ и, следовательно, согласно (23) $\mathcal{F}[f] = 0$. Мы доказали следующее :

Теорема 3. *Пусть $P_w(E) \neq \mathbf{C}_w(E)$, и пусть сходятся интегралы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2)\,\frac{d\xi}{1+\xi^2}.$$

Тогда $P_w(E)$ совпадает с множеством целых функций $f \in \mathbf{C}_w(E)$ порядка 0, удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leq C_f\widetilde{w}(z), \quad z \in \mathbf{C}.$$

Теперь рассмотрим второй случай : $\widetilde{w}(z) = \infty$, $z \in \Delta_- \bigcup \Delta_+$; $\widetilde{w}(z) < +\infty$, $z \in \Delta$. Этот случай также характеризуется условиями

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \widetilde{w}(\xi \pm i\pi/2) \frac{d\xi}{1+\xi^2} = +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} \ln [\widetilde{w}(\xi - i\pi/2)\, \widetilde{w}(\xi + i\pi/2)] \frac{d\xi}{\cosh \xi} < +\infty. \tag{24}$$

Рассуждение, использованное в предыдущем случае, приводит к заключению, что если функция $f(t)$ допускает приближение многочленами, то она совпадает со значениями аналитической в Δ и непрерывной в $\overline{\Delta}$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условию

$$|f(z)| \le C_f \widetilde{w}(z), \quad z \in \Delta. \tag{25}$$

Докажем противное : если $f \in \mathbf{C}_w(E)$ – произвольная функция, аналитическая в Δ, непрерывная в $\overline{\Delta}$ и удовлетворяющая условию (25), то $f \in P_w$. Достаточно доказать, что любой линейный функционал $\mathcal{F}$, равный нулю на многочленах, равен нулю на f.

Пусть $\varphi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в Δ, непрерывная в $\overline{\Delta}$ и удовлетворяющая условию

$$t^{-1}\varphi(t) \in \mathbf{C}_w(E), \quad |\varphi(z)| \le C\,(1+|z|)\, \widetilde{w}(z), \quad z \in \Delta. \tag{25$'$}$$

Для функции

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t-z}\right] = F(z) = \int_E \frac{d\sigma(t)}{(t-z)\,\widetilde{w}(t)}$$

имеем $F(z) \equiv 0$, $z \notin \overline{\Delta}$, $F(t) = \dfrac{\sigma'(t)}{\widetilde{w}(t)}$ и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{F(t)\, dt}{t-z},$$

т.е. функцию F можно представить ее интегралом Коши в обеих областях Δ и Δ_R: $-R < x < R$, $-\pi/2 < y < \pi/2$. Функцию $F(z)\,\varphi(z)$ также можно представить ее интегралом Коши в области Δ_R :

$$F(z)\,\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_R} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{F(\xi - i\pi/2)\,\varphi(\xi - i\pi/2)}{\xi - z - i\pi/2}\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{F(R+i\eta)\,\varphi(R+i\eta)}{R-z+i\eta}\, d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{R}^{-R} \frac{F(\xi + i\pi/2)\,\varphi(\xi + i\pi/2)}{\xi - z + i\pi/2}\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{F(-R+i\eta)\,\varphi(-R+i\eta)}{-R-z+i\eta}\, d\eta. \tag{26}$$

Интеграл $\int_{\partial\Delta} \dfrac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt$ сходится абсолютно для любого $z \notin \partial\Delta$, так как

$$|F(t)\,\varphi(t)| \le \frac{|\sigma'(t)|}{\widetilde{w}(t)}(1+|t|)\,\widetilde{w}(t) = (1+|t|)\,|\sigma'(t)|. \qquad (26\,')$$

Следовательно, предел

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-R}^{R} \frac{F(\xi - i\pi/2)\,\varphi(\xi - i\pi/2)}{\xi - z - i\pi/2}\,d\xi + \int_{R}^{-R} \frac{F(\xi + i\pi/2)\,\varphi(\xi + i\pi/2)}{\xi - z + i\pi/2}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt \qquad (27)$$

существует для любого $z \notin \partial\Delta$. Устремив R к бесконечности, из (26) получим

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{F(R+i\eta)\,\varphi(R+i\eta)}{R-z+i\eta}\,d\eta + \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{F(-R+i\eta)\,\varphi(-R+i\eta)}{-R-z+i\eta}\,d\eta\right] =$$

$$= g(z), \quad z \in \Delta.$$

Ясно, что этот предел существует для любого $z \in \mathbf{C}$ и равномерно в любом конечном круге, откуда следует, что $g(z)$ – целая функция. Из (26) и (27) следует, что

$$F(z)\,\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt + g(z), \quad z \in \Delta$$

или, эквивалентно

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{t-z}\right] = g(z), \quad z \in \Delta. \qquad (28)$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_R} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt = 0, \qquad z \notin \overline{\Delta}$$

или, эквивалентно

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-R}^{R} \frac{F(\xi - i\pi/2)\,\varphi(\xi - i\pi/2)}{\xi - z - i\pi/2}\,d\xi + \int_{R}^{-R} \frac{F(\xi + i\pi/2)\,\varphi(\xi + i\pi/2)}{\xi - z + i\pi/2}\,d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{F(R+i\eta)\,\varphi(R+i\eta)}{R-z+i\eta}\,d\eta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{F(-R+i\eta)\,\varphi(-R+i\eta)}{-R-z+i\eta}\,d\eta\right].$$

Устремив R к бесконечности, получим

$$-g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{F(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt, z \notin \overline{\Delta}. \qquad (29)$$

Оценим целую функцию $g(z)$. Из (28) для $z \in \Delta$ имеем

$$|g(z)| \leq \left|\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t)}{t-z}\right]\right| + |\varphi(z)|\,|F(z)| \leq \|\mathcal{F}\|\,\|t^{-1}\varphi(t)\| \max_{t\in E}\left|\frac{t}{t-z}\right| + |F(z)||\varphi(z)| \leq$$
$$\leq \|\mathcal{F}\| \cdot C_1\,(|z| + \delta(z))\,\delta^{-1}(z) + |F(z)|\,|\varphi(z)|. \tag{30}$$

Из (8), (25′) и (30)

$$|g(z)| \leq \text{const}(|z| + \delta(z))\,\delta^{-1}(z), \qquad z \in \Delta. \tag{31}$$

Из (29) и (26′), для $z \notin \overline{\Delta}$

$$|g(z)| \leq \text{const} \cdot \delta^{-1}(z), \quad z \notin \overline{\Delta}, \quad \text{и} \quad g(iy) \to 0, \quad |y| \to +\infty. \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует, что $g(z) \equiv 0$. Следовательно, для любой голоморфной в Δ и непрерывной в $\overline{\Delta}$ функции, удовлетворяющей условию (25′)

$$\mathcal{F}\left[\frac{\varphi(t) - \varphi(z)}{t-z}\right] = 0, \qquad z \in \Delta. \tag{33}$$

Пусть теперь $f(z) \in \mathbf{C}_w(E)$ – произвольная голоморфная в Δ и непрерывная в $\overline{\Delta}$ функция, удовлетворяющая условию (25). Функция $\varphi(z) = (z - i)f(z)$ удовлетворяет условию (25′), следовательно, она удовлетворяет условию (33). Полагая $z = i$ в (33), получаем $\mathcal{F}[f(t)] = 0$, т.е. $f \in P_w$. Мы доказали следующую теорему :

Теорема 4. *Пусть $P_w(E) \neq \mathbf{C}_w(E)$, и пусть условия (24) удовлетворяются. Тогда $P_w(E)$ совпадает с множеством голоморфных в Δ и непрерывных в $\overline{\Delta}$ функций $f \in \mathbf{C}_w(E)$, удовлетворяющих условию (25).*

Автор благодарен профессору Б. Я. Левину за полезные обсуждения и советы.

ABSTRACT. Let $w(t) \geq 1$ be a real measurable function defined on the union E of lines $\mathrm{Im}z = \pi/2$ and $\mathrm{Im}z = -\pi/2$ such that $t^n w^{-1}(t) \to 0$ for $|t| \to +\infty$, $t \in E$, $n = 0, 1, \ldots$. Let $\mathbf{C}_w(E)$ be the space of continuous functions $f(t)$ defined on E, satisfying the condition $f(t)\,w^{-1}(t) \to 0$ as $|t| \to +\infty$, $t \in E$, and let $P_w(E)$ denote the closure of a system of polynomials in metric of $\mathbf{C}_w(E)$. The paper gives an integral criterion for the completeness of polynomials in $\mathbf{C}_w(E)$ and describes the space $P_w(E)$, provided $P_w(E) \neq \mathbf{C}_w(E)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Bernstein, "Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe rèel et' l'une de ses applications", Bull. Soc. Math. de France, vol. 52, pp. 399 — 410, 1924.
2. М. М. Джрбашян, "Некоторые вопросы теории весовых многочленных приближений в комплексной плоскости", Мат. Сб., т. 36, № 3, стр. 353 — 440, 1955.
3. С. Н. Мергелян, "Весовое приближение многочленами", Успехи Мат. Наук, т. 11, № 5 (71), стр. 107 —152, 1956.

3 мая 1994 Ереванский государственный университет