О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ДИССИПАТИВНОГО КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

П. Э. Мелик–Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 2, 1996

Для канонического оператора $\mathcal{C}_{00}$ на полуоси в статье рассматриваются S–матрицы, соответствующие самосопряженным расширениям оператора $\mathcal{C}_{00}$ с выходом на всю ось. Эти S–матрицы описываются сжимающими операторными функциями класса $W^+([\aleph])$. Мы доказываем, что они являются характеристическими функциями "жесткого" диссипативного расширения $\mathcal{C}_{01}$ канонического оператора $\mathcal{C}_{00}$.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $[\mathcal{H}]$ является кольцом линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{J}$ – оператор со свойствами $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = -I$, $\dim \mathcal{H}^+ = \dim \mathcal{H}^-$. Здесь $\mathcal{H}^\pm = P^\pm \mathcal{H}$, $P^\pm = \frac{1}{2}(I \mp i\mathcal{J})$ так, что $I = P^+ + P^-$ $(\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-)$ и $\mathcal{J} = iP^+ - iP^-$. Обозначим через R, R_+ и R_- всю числовую ось, неотрицательную, неположительную оси, соответственно, а через Λ_+ и Λ_- – верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости Λ.

Пусть функции $V(r) \in L_1(R, [\mathcal{H}])$, $V_+(r) \in L_1(R_+, [\mathcal{H}])$ принимают самосопряженные и $\mathcal{J}$–самосопряженные значения. Операторы, задаваемые дифференциальными выражениями

$$d[f] = \mathcal{J} f'(r) - V(r)\, f(r), \quad r \in R; \qquad d_+[f] = \mathcal{J} f'(r) - V_+(r)\, f(r), \quad r \in R_+$$

называются каноническими. Обозначим через D область определения канонического оператора.

Пусть $\mathcal{C}_{00}$ – действующий в гильбертовом пространстве $L_2(R_+, \mathcal{H})$ минимальный симметрический оператор :

$$\mathcal{C}_{00} f = d_+[f], \qquad D(\mathcal{C}_{00}) = \{f \in L_2(R_+, \mathcal{H}) | \quad d_+[f] \in L_2(R_+, \mathcal{H}),\ f(0) = 0\}.$$

Для самосопряженных расширений оператора $\mathcal{C}_{00}$ без выхода из $L_2(R_+,\mathcal{H})$ с помощью волновых операторов, по схеме Лакса–Филипса, анализом решений соответствующих уравнений, в [1] — [3] определяются одни и те же функции на R, называемые S–матрицей, которые параметризуются множеством частично изометрических операторов, определяющих такие расширения. Свойства S–матриц исследованы достаточно полно, вплоть до решения в [2] обратной задачи теории рассеяния для некоторого класса канонических уравнений в случае $\dim \mathcal{H}^{\pm} = n$.

Если $V_+(r) = V(r)|R_+$, то операторы

$$\mathcal{C}f = d[f], \quad D(\mathcal{C}) = \{f \in L_2(R,\mathcal{H})|\, d[f] \in L_2(R,\mathcal{H})\}$$

являются самосопряженными расширениями оператора $\mathcal{C}_{00}$ с выходом.

По теории унитарных сцеплений Адамяна–Арова, обобщающей теорию рассеяния Лакса–Филлипса, таким расширениям отвечают сжимающие на R S–матрицы, которые параметризуются множеством сжимающих же операторных функций $\Theta(\mu)$, представимых в виде

$$\Theta(\mu) = \int_0^\infty e^{i\mu t}\,\Gamma(t)\,dt, \quad \Gamma(t) \in L_1(R,[\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+]), \quad \mu \in R. \tag{0.1}$$

Функция $\Theta(\mu)$ определяется только частью $V_-(r) = V(r)|R_-$ потенциала $V(r)$.

Настоящая работа посвящена исследованию функции $\Theta(\mu)$.

В §1 строится функциональная модель (ф. м.) полугруппы сжатий, образованной с помощью группы унитарных операторов $U(t) = \exp(i\mathcal{C}t)$, $t \in R$, где $\mathcal{C}$ – оператор с потенциалом $V(r)|R_- = 0$ (см. [4]). Полученная ф. м. идентична ф. м. Надя–Фояша общей полугруппы сжатий (см. [5]), а функция $\Theta(\mu)$ выступает в роли характеристической функции (х. ф.) диссипативного генератора группы.

В §2 рассматривается "жесткое" диссипативное расширение $\mathcal{C}_{01}$ оператора $\mathcal{C}_{00}$. Точечный спектр этого оператора совпадает со следующим множеством : $\{\lambda \in \Lambda_+|\, \dim \mathrm{Ker}\Theta(\lambda) > 0\}$. Часть ядра резольвенты сопряженного оператора $\mathcal{C}_{01}^* = \mathcal{C}_{10}$, названная в [6] х. ф., определяется функцией $\Theta(\lambda)$ и только ею. Здесь функция $\Theta(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_+$ приобретает смысл углового оператора равномерно отрицательного подпространства (см. [7]). Оказывается, что в случае $\dim \mathcal{H}^{\pm} = n$ оператор $\mathcal{C}_{01}$ с потенциалом $V_+(r) \in L_1(R_+,[\mathcal{H}]) \bigcap L_2(R_+,[\mathcal{H}])$ может служить в качестве модели для диссипативных операторов, х. ф. которых являются сжимающими в Λ_+ матрицами-функциями, представимыми формулой (0.1) с $\Gamma(t) \in L_1(R, [\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+]) \bigcap L_2(R, [\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+])$.

Приведем некоторые необходимые определения и предложения, имеющиеся в работах [1] — [3].

Пусть $\mathcal{E}(r, \lambda)$ – оператор Коши канонического уравнения на R_+, т.е операторное решение задачи

$$\mathcal{J}\mathcal{E}'(r, \lambda) - V_+(r)\mathcal{E}(r, \lambda) = \lambda\mathcal{E}(r, \lambda), \qquad \mathcal{E}(0, \lambda) = I, \quad \lambda = \mu + i\nu \in \Lambda. \tag{0.2}$$

$\mathcal{E}(r, \lambda)$ является целой операторной функцией, удовлетворяющей соотношению

$$\mathcal{E}^*(r, \overline{\lambda})\, \mathcal{J}\mathcal{E}(r, \lambda) = \mathcal{E}(r, \lambda)\, \mathcal{J}\mathcal{E}^*(r, \overline{\lambda}) = \mathcal{J}.$$

Функция $e^{-\mathcal{J}\lambda r} = e^{-i\lambda r}P^+ + e^{i\lambda r}P^-$ является оператором Коши невозмущенного ($V_+(r) \equiv 0$) уравнения (0.2). Каноническое уравнение имеет также решение $\mathcal{E}_\infty(r, \mu)$ (через μ в дальнейшем обозначается вещественный спектральный параметр), удовлетворяющее условию $\mathcal{E}_\infty(r, \mu) \sim e^{-\mathcal{J}\mu r}$, $r \to \infty$ и представимое в виде

$$\mathcal{E}_\infty(r, \mu) = e^{-\mathcal{J}\mu r} + \int_r^\infty K(r, t)\, e^{-\mathcal{J}\mu t}\, dt. \tag{0.3}$$

Функция $\mathcal{E}_\infty(r, \mu)$ $\mathcal{J}$-унитарна, $\mathcal{E}^*_\infty(r, \mu)\mathcal{J}\mathcal{E}_\infty(r, \mu) = \mathcal{E}_\infty(r, \mu)\mathcal{J}\mathcal{E}^*_\infty(r, \mu) = \mathcal{J}$, следовательно, для функции $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{E}^{-1}_\infty(0, \mu) = -\mathcal{J}\mathcal{E}^*_\infty(0, \mu)\mathcal{J}$ из формулы (0.3) имеем

$$\mathcal{A}(\mu) = I + \int_0^\infty e^{\mathcal{J}\mu t}\, K(t)\, dt, \qquad K(t) = -\mathcal{J}K^*(0, t)\, \mathcal{J} \in L_1(R_+, [\mathcal{H}]). \tag{0.4}$$

Функция $\mathcal{A}(\mu)$ называется A–оператором. Из (0.3) и (0.4) следует, что функции $\mathcal{E}_\infty(r, \mu)\, P^\mp$ и $P^\pm\mathcal{A}(\mu)$ аналитически продолжаются в $\Lambda_\pm$ формулами

$$\mathcal{E}_\infty(r, \lambda)\, P^\mp = e^{\pm i\lambda r}P^\mp + \int_r^\infty e^{\pm i\lambda t}\, K_\mp(r, t)\, dt, \quad K_\mp(r, t) = K(r, t)P^\mp, \quad \lambda \in \Lambda_\pm, \tag{0.5}$$

$$\begin{cases} P^\pm\mathcal{A}(\lambda) = P^\pm + \displaystyle\int_0^\infty e^{\pm i\lambda t}\, K_\pm(t)\, dt, \qquad K_\pm(t) = P^\pm K(t), \qquad \lambda \in \Lambda_\pm, \\ \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\, P^\mp = P^\mp + \displaystyle\int_0^\infty e^{\pm i\lambda t}\, K^*_\mp(t)\, dt, \qquad \lambda \in \Lambda_\pm. \end{cases} \tag{0.6}$$

С другой стороны, если $\mathcal{A}(r,\lambda) = e^{\mathcal{J}\lambda r}\mathcal{E}(r,\lambda)$, то функции $P^{\pm}\mathcal{A}(r,\lambda)$ аналитичны в $\Lambda_{\pm}$ и $\lim\limits_{r\to\infty} P^{\pm}\mathcal{A}(r,\lambda) = P^{\pm}\mathcal{A}(\lambda)$ по операторорной норме равномерно по $\lambda \in \Lambda_{\pm}$, в частности, равномерно по $\mu \in R$ имеем $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{A}(r,\mu) = \mathcal{A}(\mu)$. Поскольку на вещественной оси $\mathcal{E}_{\infty}(r,\mu) = \mathcal{E}(r,\mu)\,\mathcal{A}(\mu)$, то по теореме единственности аналитических функций имеем

$$\mathcal{E}_{\infty}(r,\lambda)\,P^{\mp} = \mathcal{E}(r,\lambda)\,(\pm i\mathcal{J})\mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{\mp}, \qquad \lambda \in \Lambda_{\pm}. \tag{0.7}$$

Отсюда следует, что при $\lambda \in \Lambda_{\pm}$ функции $\mathcal{E}_{\infty}(r,\lambda)\,P^{\mp}$ являются решениями канонического уравнения, принадлежащими $L_2(R_+,\mathcal{H})$.

Обозначим

$$W_0^{\pm}([\aleph]) = \{F^{\pm}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t}\,F(t)\,dt, \qquad F(t) \in L_1(R_+,[\aleph]), \quad \lambda \in \Lambda_{\pm}\}$$

$$W^{\pm}([\aleph]) = F + W_0^{\pm}([\aleph]), \qquad F \in [\aleph].$$

Операторные функции $\mathcal{A}_{kk}(r,\lambda) = P^{\pm}\mathcal{A}(r,\lambda)\,P^{\pm}$ ($\lambda \in \Lambda_{\pm}$, $k = 1,2$) ограниченно обратимы для каждого $\lambda \in \Lambda_{\pm}$, причем $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{A}_{kk}^{-1}(r,\lambda) = \mathcal{A}_{kk}^{-1}(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in \Lambda_{\pm}$ так, что имеем $\mathcal{A}_{kk}^{\pm 1}(\lambda) \in W^{\pm}([\mathcal{H}^{\pm}])$.

Разложению $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{+} \oplus \mathcal{H}^{-}$ отвечает представление действующих в $\mathcal{H}$ операторов матрицами с операторными элементами :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} iI_+ & 0 \\ 0 & -iI_- \end{bmatrix}, \quad e^{\mathcal{J}\lambda r} = \begin{bmatrix} e^{i\lambda r}I_+ & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda r}I_- \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & \mathcal{A}_{12}(\mu) \\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Из $\mathcal{J}$-унитарности $\mathcal{A}(\mu)$ следует, что

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{11}(\mu)\mathcal{A}_{11}^{*}(\mu) - \mathcal{A}_{12}(\mu)\mathcal{A}_{12}^{*}(\mu) = I_+, \quad \mathcal{A}_{11}(\mu)\mathcal{A}_{21}^{*}(\mu) = \mathcal{A}_{12}(\mu)\mathcal{A}_{22}^{*}(\mu), \\ \mathcal{A}_{22}(\mu)\mathcal{A}_{22}^{*}(\mu) - \mathcal{A}_{21}(\mu)\mathcal{A}_{21}^{*}(\mu) = I_-. \end{gathered} \tag{0.8}$$

Обозначая $\Theta(\mu) = \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\mathcal{A}_{12}(\mu)$, получаем

$$\Theta(\mu)\Theta^{*}(\mu) = I_+ - \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\mathcal{A}_{11}^{-1*}(\mu) < I_+, \qquad \|\Theta(\mu)\| < 1. \tag{0.9}$$

Из формул (0.8) имеем $\Theta(\mu) = \mathcal{A}_{21}^{*}(\mu)\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)$. Поскольку $\mathcal{A}_{kk}(\mu) \in W^{\pm}([\mathcal{H}^{\pm}])$, то из формул (0.6) следует, что функции $\mathcal{A}_{11}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{12}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}^{*}(\overline{\lambda})\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\overline{\lambda})$ аналитичны в Λ_+, следовательно, они совпадают и из принципа максимума модуля для $\Theta(\lambda) = \mathcal{A}_{11}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{12}(\lambda)$ имеем $\|\Theta(\lambda)\| < 1$, $\lambda \in \Lambda_+$.

§1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОЛУГРУППЫ $Z(t)$

В $L_2(R,\mathcal{H})$ рассмотрим оператор $\mathcal{C}$ с потенциалом $V(r)|R_- = 0$. Образуем гильбертово пространство $\mathbf{H} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)}$ – ортогональную сумму двух экземпляров пространства $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}_{(-)} = \mathcal{H}_{(+)} = \mathcal{H}$). Отождествим пространства $L_2(R,\mathcal{H})$ и $L_2(R_+,\mathbf{H})$ формулой

$$L_2(R,\mathcal{H}) \ni f \longleftrightarrow \mathbf{f} = f_{(-)} + f_{(+)} \in L_2(R_+,\mathbf{H}), \quad f(\mp r) = f_{(\mp)}(r), \quad r \in R_+.$$

Тогда оператор $\mathcal{C}$ отождествится с оператором $\mathbf{C}$ в $L_2(R_+,\mathbf{H})$ таким, что

$$\mathbf{C}\mathbf{f} = \mathrm{d}_+[\mathbf{f}], \quad D(\mathbf{C}) = \{\mathbf{f} \in L_2(R_+,\mathbf{H}) \,|\, \mathrm{d}_+[\mathbf{f}] \in L_2(R_+,\mathbf{H}), f_{(-)}(0) = f_{(+)}(0)\},$$

где дифференциальное выражение $\mathrm{d}_+[\mathbf{f}]$ в разложении $\mathbf{H} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)}$ имеет вид

$$\mathrm{d}_+[\mathbf{f}] = \mathbf{J}\mathbf{f}'(r) - \mathbf{V}_+(r)\mathbf{f} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\mathcal{J} & 0 \\ 0 & \mathcal{J} \end{bmatrix} \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} f_{(-)}(r) \\ f_{(+)}(r) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_+(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{(-)}(r) \\ f_{(+)}(r) \end{bmatrix}, \qquad r \in R_+.$$

Граничное условие $f_{(-)}(0) = f_{(+)}(0)$ принимает вид

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{P}\mathbf{f}(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{(-)}(0) \\ f_{(+)}(0) \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{C}$ самосопряжен, поэтому таков же и оператор $\mathcal{C}$ и, следовательно $\mathcal{C}$ является самосопряженным расширением оператора $\mathcal{C}_{00}$ с выходом в пространство $L_2(R,\mathcal{H})$. Для оператора Коши и A–оператора имеем

$$\mathbf{E}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} e^{\mathcal{J}\lambda r} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}(r,\lambda) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{A}(\mu) \end{bmatrix}.$$

Если $\mathbf{J} = i\mathbf{P}^+ - i\mathbf{P}^-$, то переход от разложения $\mathbf{H} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)}$ к разложению $\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ \oplus \mathbf{H}^-$ осуществляется унитарным оператором

$$U = U^* = \begin{bmatrix} P^- & P^+ \\ P^+ & P^- \end{bmatrix}$$

и в новом представлении имеем

$$\mathbf{E}(r,\lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{11}(r,\lambda) & 0 & 0 & \mathcal{E}_{12}(r,\lambda) \\ 0 & e^{-i\lambda r} I_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\lambda r} I_+ & 0 \\ \mathcal{E}_{21}(r,\lambda) & 0 & 0 & \mathcal{E}_{22}(r,\lambda) \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & 0 & 0 & \mathcal{A}_{12}(\mu) \\ 0 & I_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_+ & 0 \\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & 0 & 0 & \mathcal{A}_{22}(\mu) \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

В первом разложении имеем $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_{(-)} \oplus \mathcal{H}_{(+)} = \left(\mathcal{H}^+_{(-)} \oplus \mathcal{H}^-_{(-)}\right) \oplus \left(\mathcal{H}^+_{(+)} \oplus \mathcal{H}^-_{(+)}\right)$. Поскольку $\mathcal{H}_{(-)} = \mathcal{H}_{(+)} = \mathcal{H}$, то $\mathcal{H}^+_{(-)} = \mathcal{H}^+_{(+)} = \mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-_{(-)} = \mathcal{H}^-_{(+)} = \mathcal{H}^-$. В другом разложении $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^+ \oplus \boldsymbol{\mathcal{H}}^- = \left(\mathcal{H}^+_{(+)} \oplus \mathcal{H}^-_{(-)}\right) \oplus \left(\mathcal{H}^+_{(-)} \oplus \mathcal{H}^-_{(+)}\right)$ так, что учитывая предыдущие отождествления, можно считать $\boldsymbol{\mathcal{H}}^+ = \boldsymbol{\mathcal{H}}^- = \mathcal{H}$, и для проекторов в этих пространствах использовались принятые обозначения $P^{\pm}$.

В работе [3] показано, что если

$$\Phi(r,\mu) = \sqrt{2}\mathbf{E}(r,\mu)\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^+\,S^{-1}_{\pm}(\mu), \qquad S_{\pm}(\mu) = 2\mathbf{P}^{\pm}\mathbf{A}(\mu)\,\mathbf{P}\,\mathbf{P}^+, \tag{1.2}$$

то отображения $\mathcal{F}_{\pm}\colon L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm}) \to L_2(R_+,\boldsymbol{\mathcal{H}})$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}(r) = \mathcal{F}_{\pm}\mathbf{f}^{\pm}(\mu) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \Phi_{\pm}(r,\mu)\,\mathbf{f}^{\pm}(\mu)\,d\mu, \qquad \mathbf{f}^{\pm}(\mu) \in L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm}),\\ &\mathbf{f}^{\pm}(\mu) = \mathcal{F}^*_{\pm}\mathbf{f}(r) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{0}^{N} \Phi^*_{\pm}(r,\mu)\,\mathbf{f}(r)\,dr, \qquad \mathbf{f}(r) \in L_2(R_+,\boldsymbol{\mathcal{H}}) \end{aligned} \tag{1.3$_\pm$}$$

задают спектральные представления (называемые $(\pm)$–спектральные представления) оператора $\mathbf{C}$, т.е. $\mathcal{F}^{-1}_{\pm} = \mathcal{F}^*_{\pm}$ и операторы $\mathcal{F}^*_{\pm}\mathbf{C}\mathcal{F}_{\pm}$ являются операторами умножения на μ в $L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm})$.

Образами группы унитарных операторов $U(t) = \exp(i\mathbf{C}t)$, $t \in R$ являются группы операторов умножения на $e^{i\mu t}$ в $L_2(R,\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm})$. Если

$$H^{\pm}_2(\aleph) = \left\{ F^{\pm}(\mu) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_0^N e^{\pm i\mu t}\,F(t)\,dt \;\middle|\; F(t) \in L_2(R_+,\aleph), \quad \mu \in R \right\},$$

то подпространства $\mathcal{D}^{\pm} = \mathcal{F}_{\pm}H^{\pm}_2(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm})$ являются, соответственно, уходящим и приходящим подпространствами для группы $U(t)$, а $(\pm)$–спектральные представления – ее уходящим и приходящим представлениями, соответственно (см. [4]).

Рассмотрим подпространства $\mathcal{D}^{\pm}_{(-)} = \mathcal{F}^{\pm}(P^{\mp}H^{\pm}_2(\boldsymbol{\mathcal{H}}^{\pm}))$. Такой выбор обусловлен последующим "стиранием" подпространств в $L_2(R,\mathcal{H})$. Пусть $\mathcal{K} = L_2(R_+,\boldsymbol{\mathcal{H}}) \ominus (\mathcal{D}^+_{(-)} \oplus \mathcal{D}^-_{(-)})$, $P_{\mathcal{K}}$ – ортогональный проектор на $\mathcal{K}$ и согласно [4] $Z(t) = P_{\mathcal{K}}U(t)|\mathcal{K}$, $t \geq 0$ – полугруппа сжимающих операторов.

Теорема 1.1. *Образом подпространства $\mathcal{K}$ в $(-)$–спектральном представлении является пространство*

$$\mathcal{K}_{(-)} = H^-_2(\mathcal{H}^-) \oplus \left(H^+_2(\mathcal{H}^+) \ominus \Theta(\mu)H^+_2(\mathcal{H}^-)\right), \tag{1.4}$$

где $\Theta(\mu) = \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\,\mathcal{A}_{12}(\mu)$, а образом полугруппы $Z(t)$ – полугруппа

$$Z_-(t)(h_- \oplus h_+) = P_{\mathcal{K}_{(-)}}\left[e^{i\mu t}h_-(\mu) \oplus e^{i\mu t}h_+(\mu)\right], \qquad h_- \oplus h_+ \in \mathcal{K}_{(-)}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{D}^-_{(-)} = \mathcal{F}_-(P^+ H_2^-(\mathcal{H}^-)) = \mathcal{F}_-\left\{\begin{bmatrix} f^-(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \qquad f^-(\mu) \in H_2^-(\mathcal{H}^+),$$

$$\mathcal{D}^+_{(-)} = \mathcal{F}_+(P^- H_2^+(\mathcal{H}^+)) = \mathcal{F}_+\left\{\begin{bmatrix} f^+(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \qquad f^+(\mu) \in H_2^+(\mathcal{H}^-)$$

и доказательство формулы (1.4) сводится к нахождению $(-)$–образа подпространства $\mathcal{D}^+_{(-)}$, т. е. к вычислению $\mathcal{F}_-^*\mathcal{F}_+(P_- F^+(\mu))$, $F^+(\mu) \in H_2^+(\mathbf{H}^-)$.

Оператор $\mathcal{F}_-^*\,\mathcal{F}_+$ переводит $(+)$–образ $\mathbf{f}^+(\mu)$ функции из $L_2(R_+,\mathbf{H})$ в его $(-)$–образ $\mathbf{f}^-(\mu)$ (в теории Лакса–Филлипса такой оператор называется S–матрицей). Из формул (1.3) имеем

$$\mathbf{f}^\pm(\mu) = S_\pm^{-1*}(\mu)\,\mathbf{f}_0(\mu), \quad \mathbf{f}_0(\mu) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^N \mathbf{P}^+\,\mathbf{P}\,\mathbf{E}^*(r,\mu)\,\mathbf{f}(r)\,dr.$$

Следовательно, $\mathbf{f}^-(\mu) = S_-^{-1*}(\mu)\,S_+^*(\mu)\,\mathbf{f}^+(\mu)$. Из формул (1.2) и $\mathcal{J}$–унитарности $\mathbf{A}(\mu)$ следует унитарность функции $S(\mu) = S_-(\mu)\,S_+^{-1}(\mu)$ так, что имеем $\mathcal{F}_-^*\,\mathcal{F}_+(P^- F^+(\mu)) = S(\mu)\,P^-\,F^+(\mu)$. Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$S_-(\mu) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \mathcal{A}_{21}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu) \end{bmatrix}, \qquad S_+(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}(\mu) & \mathcal{A}_{12}(\mu) \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$S(\mu) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu) & -\mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\,\mathcal{A}_{12}(\mu) \\ \mathcal{A}_{21}(\mu)\,\mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu) & \mathcal{A}_{22}(\mu) - \mathcal{A}_{21}(\mu)\,\mathcal{A}_{11}^{-1}(\mu)\,\mathcal{A}_{12}(\mu) \end{bmatrix}$$

и, учитывая соотношения (0.8), получим

$$S(\mu)P^- F^+(\mu) = S(\mu)\begin{bmatrix} 0 \\ f^+(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Theta(\mu)\,f^+(\mu) \\ \mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)\,f^+(\mu) \end{bmatrix}, \qquad f^+(\mu) \in H_2^+(\mathcal{H}^-).$$

В $(-)$–спектральном представлении имеем $\mathcal{F}_-^* L_2(R_+,\mathbf{H}) = H_2^-(\mathcal{H}^-) \oplus H_2^-(\mathcal{H}^+) \oplus$ $\oplus H_2^+(\mathcal{H}^-) \oplus H_2^+(\mathcal{H}^+)$, $\mathcal{F}_-^*\mathcal{D}^-_{(-)} = H_2^-(\mathcal{H}^+)$, а из последнего соотношения следует, что $\mathcal{F}_-^*\mathcal{D}^+_{(-)} = \mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)\,H_2^+(\mathcal{H}^-) \oplus \Theta(\mu)\,H_2^+(\mathcal{H}^-)$. Поскольку $\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu) \in W^+([\mathcal{H}^-])$, то имеем $\mathcal{A}_{22}^{-1*}(\mu)\,H_2^+(\mathcal{H}^-) = H_2^+(\mathcal{H}^-)$, $\Theta(\mu)H_2^+(\mathcal{H}^-) \subset H_2^+(\mathcal{H}^+)$, следовательно, $\mathcal{F}_-^*\mathcal{K} = H_2^-(\mathcal{H}^-) \oplus \left(H_2^+(\mathcal{H}^+) \ominus \Theta(\mu)\ \ H_2^+(\mathcal{H}^-)\right)$.

Замечание. Из соотношений (0.8) следует, что функция $I_- - \Theta^*(\mu)\,\Theta(\mu)$ ограниченно обратима, поэтому формулы (1.4), (1.5) идентичны формулам, которыми в [5] определяется ф. м. полугруппы сжатий с помощью $\Theta(\mu)$.

§2. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР, РЕЗОЛЬВЕНТА И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

В работе [8] дано описание множества всех максимальных диссипативных (симметрических) расширений оператора типа $\mathcal{C}_{00}$ в терминах максимальных $(-i\mathcal{J})$-неположительных ($(-i\mathcal{J})$-нейтральных) подпространств и их угловых операторов. Расширения подобного рода задаются граничными условиями вида $f(0) \in \mathcal{L}_K = \{K^*h_- + h_- \mid h_- \in \mathcal{H}^-, \|K\| \le 1\}$, где $K: \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^-$, $K^*: \mathcal{H}^- \to \mathcal{H}^+$. Если $\dim \mathcal{H}^+ = \dim \mathcal{H}^-$, то во множестве операторов K максимальными элементами являются частично изометрические операторы ($K^*K = P^+$, $KK^* = P^-$), которыми определяются все самосопряженные расширения оператора $\mathcal{C}_{00}$, а минимальным элементом является оператор $K = 0$, задающий "жесткое" (по аналогии с расширениями полуограниченных симметрических операторов) диссипативное расширение оператора $\mathcal{C}_{00}$. Такое расширение $\mathcal{C}_{01}$ определится граничным условием $f(0) = P^- f(0)$. Очевидно, оператор $\mathcal{C}_{01}^* = \mathcal{C}_{10}$ является максимальным аккумулятивным, определяемым граничным условием $f(0) = P^+ f(0)$.

Теорема 2.1. *Точечный спектр σ_p оператора $\mathcal{C}_{01}$ совпадает с множеством* $\{\lambda \in \in \Lambda_+ \mid Ker\,\Theta(\lambda) > 0\}$.

Доказательство. Очевидно, что $\sigma_p \subset \Lambda_+$, причем оператор $\mathcal{C}_{01}$ не имеет вещественных собственных значений, так как если $\mu_0 \in \sigma_p$, то найдется самосопряженное расширение оператора $\mathcal{C}_{00}$, для которого число μ_0 является собственным значением, что противоречит абсолютной непрерывности спектра любого такого расширения оператора $\mathcal{C}_{00}$ (см. [1]).

Общий вид векторных решений $f(r,\lambda) \in L_2(R_+, \mathcal{H})$ уравнения (0.2) задается формулой

$$f(r,\lambda) = \mathcal{E}_\infty(r,\lambda)P^-h = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_\infty^{12}(r,\lambda)h_- \\ \mathcal{E}_\infty^{22}(r,\lambda)h_- \end{bmatrix}, \qquad h_- \in \mathcal{H}^-, \quad \mathrm{Im}\lambda > 0.$$

Выбор вектора $h_- \neq 0$ такого, что $f(0,\lambda) = P^- f(0,\lambda)$, приводит к условию $\mathcal{E}^{12}_\infty(0,\lambda)h_- = 0$. Из формулы (0.7) имеем $\mathcal{E}^{12}_\infty(0,\lambda) = -\mathcal{A}^*_{21}(\overline{\lambda})$, а из (0.8) получим $\mathcal{A}^*_{21}(\overline{\lambda}) = \mathcal{A}^{-1}_{11}(\lambda)\,\mathcal{A}_{12}(\lambda)\,\mathcal{A}^{-1*}_{22}(\overline{\lambda})$, $\lambda \in \Lambda_+$. Поскольку операторные функции $\mathcal{A}_{11}(\lambda)$ и $\mathcal{A}^*_{22}(\overline{\lambda})$ ограниченно обратимы в Λ_+, то отсюда следует, что уравнение $\mathcal{E}^{12}_\infty(0,\lambda)h_- = 0$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\mathcal{A}_{12}(\lambda) \neq \{0\}$, последнее условие равносильно условию $\dim \mathrm{Ker}\Theta(\lambda) > 0$. Теорема 2.1 доказана.

Для того, чтобы вычислить резольвенту оператора $\mathcal{C}_{10} = \mathcal{C}^*_{01}$ положим $V^N_+(r) = V_+(r)|[0,N]$ и в пространстве $L_2(0,N;\mathcal{H})$ рассмотрим канонический оператор C^N_+ с потенциалом $V^N_+(r)$, который определяется граничными условиями $f(0) = P^+x$, $f(N) = P_-x$, $x \in \mathcal{H}$. Если $g(r) \in L_2(0,N;\mathcal{H})$, то решение уравнения $(C^N_+ - \lambda I)\,f = g$, $\mathrm{Im}\lambda > 0$ будем искать методом вариации постоянных в виде $f(r,\lambda) = \mathcal{E}(r,\lambda)\,x(r,\lambda)$.

Следуя работе [6], получим

$$x(r,\lambda) = P^+x - \mathcal{J}\int_0^r \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds,$$

где

$$x = i\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\int_0^N \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds.$$

Следовательно

$$f(r,\lambda) = \mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}P^+\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\times$$

$$\times\int_0^N \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds - \mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}\int_0^r \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds.$$

Таким образом, для ядра $K^N(r,s,\lambda)$ резольвенты оператора C^N_+ имеем

$$K^N(r,s,\lambda) = \begin{cases} K^N_-(r,s,\lambda) \\ K^N_+(r,s,\lambda) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\left\{P^+\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} - I\right\}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s < r \\ \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}P^+\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s > r, \end{cases} \quad \mathrm{Im}\lambda > 0.$$

Поскольку функция $K^N(r,s,\lambda)$ на прямой $s = r$ имеет скачок, то положив $K^N(r,r,\lambda) = \frac{1}{2}\left(K^N_-(r,r,\lambda) + K^N_+(r,r,\lambda)\right)$, имеем

$$K^N(r,r,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\left[P^+ - \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}).$$

В работе [6] характеристической функцией оператора $\mathcal{C}_+^N$ называется операторная функция

$$\chi_N(\lambda) = K^N(0,0,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{J}\left[P^+ - \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}.$$

Докажем существование $\chi(\lambda) = \lim\limits_{N\to\infty}\chi_N(\lambda)$. Из $\mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^- = e^{-i\lambda N}\mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-$. Имеем

$$\begin{aligned}&\left[P^+ - \mathcal{E}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[P^+ + \epsilon^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} = \\ &= \left[e^{-i\lambda N}P^+ - \mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]\left[e^{i\lambda N}P^+ + \mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Поскольку

$$\left[e^{i\lambda N}P^+ + \mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda N}I_+ & -e^{-i\lambda N}\mathcal{A}_{21}^*(N,\overline{\lambda})\mathcal{A}_{22}^{-1*}(N,\overline{\lambda}) \\ 0 & \mathcal{A}_{22}^{-1*}(N,\overline{\lambda}) \end{bmatrix},$$

то правую часть (2.1) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} I_+ & -2\mathcal{A}_{21}^*(N,\overline{\lambda})\mathcal{A}_{22}^{-1*}(N,\overline{\lambda}) \\ 0 & -I_- \end{bmatrix}.$$

При $N \to \infty$ имеем $\mathcal{A}^*(N,\overline{\lambda})\,P^- \to \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-$, $\lambda \in \Lambda_+$ равномерно по операторной норме, следовательно

$$-2\mathcal{J}\,\chi(\lambda) = \begin{bmatrix} I_+ & -2\Theta(\lambda) \\ 0 & -I_- \end{bmatrix}, \qquad \chi(\lambda) = i\frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & -I_- \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 0 & \Theta(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. *Ядром резольвенты оператора $\mathcal{C}_{10}$ является функция*

$$K(r,s,\lambda) = \begin{cases} K_-(r,s,\lambda) \\ K_+(r,s,\lambda) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\left\{P^+\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1} - I\right\}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s < r \\ \mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}P^+\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda}), & s > r, \end{cases} \quad Im\lambda > 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть плотный в $L_2(R_+,\mathcal{H})$ линеал функций, финитных на бесконечности. Пусть $g(r)$ финитна и

$$f(r) = \int_0^\infty K(r,s,\lambda)\,g(s)\,ds = \int_0^r K_-(r,s,\lambda)\,g(s)\,ds + \int_r^\infty K_+(r,s,\lambda)\,g(s)\,ds. \tag{2.4}$$

Тогда

$$f(0) = P^+\mathcal{J}\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\overline{\lambda})\,P^-\right]^{-1}\int_0^\infty \mathcal{E}^*(s,\overline{\lambda})\,g(s)\,ds$$

так, что выполняется граничное условие $f(0) = P^{*} f(0)$. Поскольку

$$K_{-}(r,r,\lambda) - K_{+}(r,r,\lambda) = -\mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}\,\mathcal{E}^{*}(r,\overline{\lambda}) = -\mathcal{J},$$

то дифференцируя функцию (2.4), получим $\mathcal{C}_{10}f - \lambda f = g$. Учитывая финитность функции $g(r)$, из (2.4) для достаточно больших r имеем

$$f(r) = \int_0^N K_{-}(r,s,\lambda)\, g(s)\, ds =$$

$$= \mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{J}\left\{P^{+}\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]^{-1} - I\right\}\int_0^N \mathcal{E}^{*}(s,\overline{\lambda})\, g(s)\, ds.$$

Но

$$P^{+}\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]^{-1} - I = -\mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})P^{-}\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]^{-1}, \qquad (2.5)$$

следовательно, с учетом формулы (0.7), получим

$$f(r) = -\mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\,\mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})P^{-}\int_0^N \mathcal{E}^{*}(s,\overline{\lambda})\, g(s)\, ds =$$

$$= i\mathcal{E}_{\infty}(r,\lambda)\,P^{-}[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})P^{-}]^{-1}\int_0^N \mathcal{E}^{*}(s,\overline{\lambda})\, g(s)\, ds,$$

откуда и следует, что $f(r) \in L_2(R_{+}, \mathcal{H})$. Теорема 2.2 доказана.

Из формул (2.3) и (2.5) имеем

$$K(r,r,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(r,\lambda)\,\mathcal{J}\,\left[P^{+} - \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]^{-1}\mathcal{E}^{*}(r,\overline{\lambda}),$$

и для характеристической функции оператора $\mathcal{C}_{10}$ получим

$$K(0,0,\lambda) = \frac{1}{2}\mathcal{J}\,\left[P^{+} - \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]^{-1} = \chi(\lambda),$$

где $\chi(\lambda)$ – функция, фигурирующая в (2.2). Очевидно, $\Theta(\lambda) = i\,P^{+}\,\chi(\lambda)\,P_{-}$.

Операторные функции $\chi_{\pm}(\lambda) = K_{\pm}(0,0,\lambda)$ имеют наглядный геометрический смысл. Действительно, обозначая $P^{\pm}(\lambda) = \mp\mathcal{J}\,\chi_{\pm}(\lambda)$, имеем

$$P^{+}(\lambda) = P^{+}\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]^{-1}, \qquad P_{-}(\lambda) = I - P^{+}(\lambda)$$

и, так как

$$\left[P^{+} + \mathcal{A}^{*}(\overline{\lambda})\,P^{-}\right]^{-1}P^{+} = \begin{bmatrix} I_{+} & -\Theta(\lambda) \\ 0 & \mathcal{A}_{22}^{-1*}(\overline{\lambda}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{+}, \qquad (2.6)$$

то $[P^{\pm}(\lambda)]^2 = P^{\pm}(\lambda)$ и, следовательно, операторы $P^{\pm}(\lambda)$ являются взаимно дополнительными проекторами в $\mathcal{H}$. Пользуясь формулой (2.6), получим

$$P^{+}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_+ & -\Theta(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \Theta(\lambda) \\ 0 & I_- \end{bmatrix}.$$

Так как $\|\Theta(\lambda)\| < 1$, то для любого $\lambda \in \Lambda_+$ оператор $P^{-}(\lambda)$ – проектор на равномерно отрицательное подпространство $\mathcal{L}_{\Theta(\lambda)} = \{\Theta(\lambda)h_- + h_- \mid \ h_- \in \mathcal{H}^-\}$, а оператор $\Theta(\lambda) = P^+P^-(\lambda)P^-$ является его угловым оператором.

Рассматривая операторные функции $P^{\pm}(\mu)$ на вещественной оси, во-первых замечаем, что $P^{+}(\mu) = P^{+}S_{-}^{-1*}(\mu)$, где $S_-(\mu)$ – факторизующий множитель S-матрицы оператора $\mathcal{C}$, рассмотренной в первом параграфе.

Для каждого $\mu \in R$ операторные функции $\widetilde{P}^{\pm}(\mu) = \mathcal{A}^*(\mu)\,P^{\pm}\mathcal{A}^{-1*}(\mu)$ являются проекторами на равномерно дефинитные подпространства $\mathcal{H}^{\pm}(\mu)$, которыми определяется каноническое разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{+}(\mu)[\dot{+}]\,\mathcal{H}^{-}(\mu)$ пространства $\mathcal{H}$, где $[\dot{+}]$ означает $(-i\mathcal{J})$-ортогональную прямую сумму (см. [7]).

Используя $\mathcal{J}$-унитарность функции $\mathcal{A}(\mu)$, непосредственно проверяется, что $\mathcal{H}^{-}(\mu) = \mathcal{L}_{\Theta(\mu)}$ $(\widetilde{P}^{-}(\mu)\mathcal{H} = P^{-}(\mu)\mathcal{H})$. Связь между проекторами $P^{\pm}(\mu)$ и каноническими проекторами $\widetilde{P}^{\pm}(\mu)$ устанавливается формулой

$$P^{\pm}(\mu) = \widetilde{P}^{\pm}(\mu) \mp Q(\mu), \tag{2.7}$$

где $Q(\mu) = \mathcal{A}^*(\mu)P^-\left[\mathcal{A}(\mu)P^+ - P_-\right]^{-1}P^+\mathcal{A}^{-1*}(\mu)$ такова, что $Q^2(\mu) = 0$. Действительно, из $\mathcal{J}$-унитарности функции $\mathcal{A}(\mu)$ имеем

$$P^{-}(\mu) = \mathcal{A}^*(\mu)\,P^-\left[P^+ + \mathcal{A}^*(\mu)\,P^-\right]^{-1} = \mathcal{A}^*(\mu)\,P^-\left[(-\mathcal{J}\,\mathcal{A}(\mu)\,\mathcal{J})P^+ + P^-\right]^{-1} \times$$
$$\times\,\mathcal{A}^{-1*}(\mu) = \mathcal{A}^*(\mu)P^-\left[\mathcal{A}(\mu)\,P^+ - P^-\right]^{-1}(P^+ - P^-)\,\mathcal{A}^{-1*}(\mu).$$

Аналогично формуле (2.6) получим $\left[\mathcal{A}(\mu)P^+ - P^-\right]^{-1}P^- = -P^-$, откуда и следует (2.7).

В заключение затметим, что если $\dim\mathcal{H}^{\pm} = n$ и матрица-функция $V_+(r) \in L_{1,2}(R_+,[\mathcal{H}]) = L_1((R_+,[\mathcal{H}]) \cap L_2(R_+,[\mathcal{H}])$, то в представлениях (0.4) и (0.1) имеем $K(t) \in L_{1,2}(R_+,[\mathcal{H}])$, $\Gamma(t) \in L_{1,2}(R_+,[\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+])$, соответственно. Обратно, сжимающую на вещественной оси матрицу-функцию $\Theta(\mu)$ $(\|\Theta(\mu)\| < 1)$, представимую формулой (0.1) с $\Gamma(t) \in L_{1,2}(R_+,[\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+])$, с помощью единственных решений $G_{\pm}(\mu)$ факторизационных задач (см. [9])

$$\left\{\begin{array}{ll} [I_+ - \Theta(\mu)\Theta^*(\mu)]^{-1} = G_+^*(\mu)\,G_+(\mu), & G_+^{\pm 1}(\mu) \in W^+([\mathcal{H}^+]) \\ [I_- - \Theta^*(\mu)\,\Theta(\mu)]^{-1} = G_-^*(\mu)\,G_-(\mu), & G_-^{\pm 1}(\mu) \in W^-([\mathcal{H}^-]) \end{array}\right. \tag{2.8}$$

можно образовать матрицу–функцию

$$\mathcal{A}(\mu) = \begin{bmatrix} G_+(\mu) & G_+(\mu)\,\Theta(\mu) \\ G_-(\mu)\,\Theta^*(\mu) & G_-(\mu) \end{bmatrix},$$

которая, в силу соотношений (2.8), $\mathcal{J}$–унитарна и представима формулой (0.4) с $K(t) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}])$. Решая обратную задачу восстановления потенциала канонического оператора с помощью функции $K(t)$, получим $V_+(r) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}])$ (ср. с [2]) так, что верна

Теорема 2.3. *Если* $\dim \mathcal{H}^{\pm} = n$, *то диссипативный оператор* $\mathcal{C}_{01}$ *с потенциалом* $V_+(r) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}])$ *является модельным для диссипативных операторов, характеристические функции которых являются сжимающими в* Λ_+ *матрицами функциями* $\Theta(\lambda)$, *представимыми формулой*

$$\Theta(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t}\Gamma(t)\,dt, \qquad \Gamma(t) \in L_{1,2}(R_+, [\mathcal{H}^- : \mathcal{H}^+]), \quad \lambda \in \Lambda_+.$$

ABSTRACT. For a canonical operator $\mathcal{C}_{00}$ on semiaxis the paper considers S–matrices which correspond to the selfadjoint extensions of $\mathcal{C}_{00}$ with exit on the whole axis. These S–matrices are described by contractive operator functions of the class $W^+([\aleph])$. We prove that they are characteristic functions of "rigid" dissipative extension $\mathcal{C}_{01}$ of canonical operator $\mathcal{C}_{00}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Адамян, "К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве", ДАН СССР, т. 178, № 1, стр. 9 — 12, 1968.
2. Ф. Э. Мелик–Адамян, "Об одном классе канонических дифференциальных операторов", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 24, № 6, стр. 570 – 592, 1989.
3. П. Э. Мелик–Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов", Изв. АН Арм ССР, Математика , т. 11, № 4, стр. 291 — 313, 1976.
4. П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния, Мир, М., 1970.
5. Б. Секефальви–Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Мир, М., 1970.
6. Ф. Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, Мир, М., 1968.
7. Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, Наука, М., 1986.
8. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, "О граничных задачах для дифференциального уравнения первого порядка с операторными коэффициентами и разложения по собственным функциям этого уравнения, ДАН СССР, т. 208, № 6, стр. 1268 — 1271, 1973.
9. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов" Успехи Мат. Наук, т. 13, № 2, стр. 3 — 72, 1958.

13 июня 1995

Ереванский государственный университет