

МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ ПУАССОНОВСКИХ ПЛОСКОСТЕЙ В ТУННЕЛЕСТРОЕНИИ

Р. В. Амбарцумян, А. Дер Кюрегян, В. К. Оганян, Г. С. Сужасян,
Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 2, 1996

В статье рассматривается пуассоновская модель для случайных наборов трещин в толще скалы. Основным параметром изучения является линейная интенсивность λ_K опасных блоков, образующихся в результате экскавации туннеля сквозь скалу. В случае трехнаправленной модели задача полностью решается с помощью представления λ_K через элементарные функции. Полиномиальная зависимость λ_K от неизвестных вероятностных параметров обсуждается для более общей модели. Обсуждается возможность безопасной экскавации (т. е. ситуация с $\lambda_K = 0$).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Прокладывается туннель сквозь толщу скалы, содержащей случайные трещины, которые разбивают скалу на компоненты, называемые блоками. Некоторые блоки, выходящие на поверхность туннеля, оказываются нестабильными. Такие блоки называются *опасными*. Падение опасного блока может привести к падению других блоков. Должным образом фиксируя опасные блоки, этого можно избежать. Для оценки стоимости крепёжных работ необходимо иметь математическое ожидание числа опасных блоков.

В рамках трансляционно-инвариантных моделей задача сводится к вычислению интенсивностей λ_K процесса опасных блоков. Настоящая работа дает полное решение этой задачи в случае *трехнаправленной* модели Пуассона, рассмотренной другими авторами (см. [2] и ссылки в ней). Кроме того, для обобщения этой модели, рассматривающей определенные случайные плоские углы, приводится многочленное выражение для λ_K , удобное для приближенных вычислений. Обсуждается существование безопасных туннельных экскаваций, т.е. ситуаций, где

Данное исследование стало возможным благодаря финансовой поддержке Университета Калифорния в Беркли и Инженерного Исследовательского Центра Американского Университета Армении.

$\lambda_K = 0$, и зависимость λ_K от наклона крыши туннеля.

§2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Трансляционно-инвариантный пуассоновский процесс плоскостей, управляемый общими мерами в пространстве \mathbb{E} плоскостей доставляют естественный класс моделей, описывающих трещины. Пуассоновский процесс, управляемый мерой m в \mathbb{E} определяется следующим образом (см. [1]). Рассмотрим s непересекающихся областей D_1, \dots, D_s в пространстве \mathbb{E} и неотрицательные целые числа k_1, \dots, k_s . Пусть A – множество реализаций (событий), для которых ровно k_i точек (плоскостей) лежат в D_i , $i = 1, \dots, s$. Согласно определению пуассоновского процесса \mathbb{P} в \mathbb{E} , управляемого мерой m , имеем

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^s \frac{(m(D_i))^{k_i}}{k_i!} e^{-m(D_i)}.$$

Эта формула дает полное описание пуассоновских процессов плоскостей. Пуассоновский процесс \mathbb{P} будет трансляционно-инвариантным, если управляющая мера m – трансляционно-инвариантна (см. [1]).

Согласно теореме интегральной геометрии [1] такая мера необходимо имеет факторизованный вид

$$m(de) = dp \mu(d\omega),$$

где dp – одномерная мера лебега на $(-\infty, \infty)$, а μ – мера на единичной полусфере, т.е. на пространстве пространственных направлений. Параметры p, ω – обычные координаты плоскости e : p – расстояние e от начала O , ω – нормальное пространственное направление к e . Мера m полностью определяется по "розе направлений" μ . Следовательно, любой трансляционно-инвариантный пуассоновский процесс в \mathbb{E} полностью определяется выбором меры μ .

Рассмотрим туннель T . Предположим, что T имеет бесконечную длину, горизонтальную крышу, ограниченную двумя параллельными прямыми и прямоугольным поперечным сечением. Плоскости пуассоновского процесса делят до-
полнение T в \mathbb{R}^3 на многогранники $\{B_i\}$. Многогранники B_i мы назовем *блоками*, если они соприкасаются с поверхностью T (т.е. если $B_i \cap \partial T \neq \emptyset$). Блоки могут быть нестабильными.

Определение 1. Рассмотрим блок B_i . Предположим, что все остальные блоки $B_j, j \neq i$ фиксированы в своих положениях (например, представим, что все трещины заполнены цементом, кроме границы B_i). Блок B_i называется *опасным блоком*, если он падает вниз (т.е. с нулевой горизонтальной компонентой движения) после такой фиксации остальных блоков. Стены туннеля предполагаются стабильными так, что падения могут произойти только с крыши.

Следующее замечание мотивирует наше применение этого частного определения опасных блоков :

Если поверхность каждого опасного блока цементирована в вышеуказанном смысле, то крыша как целое становится стабильной.

В настоящей работе мы рассматриваем *трехнаправленный случай*

$$\mu = \mu_0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \delta_{\omega_i}. \quad (1)$$

Здесь ω_i – три пространственных направления (т.е. точки на единичной полусфере), λ_i – три положительных числа, δ_ω – мера Дирака, сконцентрированная в ω , т.е. для любого подмножества A из полусферы имеем

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Пусть F – крыша туннеля. Через e_F обозначим плоскость, содержащую F . На e_F выберем декартову координатную систему, в которой уравнения ограничивающих крышу туннеля прямых имеют вид $x = 0$ и $x = W$, где W – ширина туннеля так, что

$$F = \{(x, y) : 0 < x < W\}.$$

Мы предпочитаем описывать пространственное направление ω следующим образом : Выбираем плоскость e с нормальным направлением ω , и прямую $e \cap e_F$ будем рассматривать как направленную с направлением в полуплоскость $y > 0$ (см. Рис. 1). Теперь каждая прямая $e \cap e_F$ разделяет e_F на правую и левую полуплоскости. Положим $\omega = (\phi, \nu)$, где $\phi \in (0, \pi)$ – направление прямой $e \cap e_F$ в плоскости e_F , $\nu \in (0, \pi)$ – плоский угол между правой полуплоскостью e_F и той частью e , которая лежит над e_F .

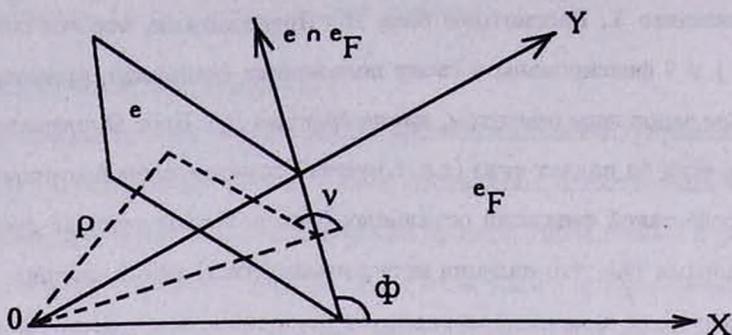


Рис. 1.

Запишем ω_i , от которой зависит мера μ в (1), в виде $\omega_i = (\phi_i, \nu_i)$. Мы предполагаем, что

$$0 < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \pi.$$

Предложение 1. Пуассоновский процесс случайных плоскостей, управляемый мерой $m_0 = d\rho \mu_0(dw)$, где μ_0 – роза направлений вида (1), может быть получен с помощью следующей стохастической конструкции:

1) Пусть L_i – прямая в плоскости e_F , ортогональная ϕ_i и проходящая через O . На каждой L_i построим пуассоновский точечный процесс $\{p_m^{(i)}\}$ постоянной интенсивности

$$\sigma_i = \lambda_i \sin \nu_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

2) Через каждую точку $p_m^{(i)}$ проведем прямую $g_m^{(i)} \subset e_F$, перпендикулярную прямой L_i , в результате чего получим три случайных семейства параллельных прямых $\{g_m^{(i)}\} \subset e_F$, $i = 1, 2, 3$.

3) Через каждую прямую $g_m^{(i)}$ проведем плоскость $e_m^{(i)}$, образующую плоский угол ν_i с e_F .

§3. ТИПЫ МНОГОУГОЛЬНЫХ СЛЕДОВ

Три семейства случайных прямых $\{g_m^{(i)}\}$ порождают случайное разбиение e_F на ограниченные выпуклые многоугольники, которые мы называем *многоугольными следами* и обозначаем через P_i . Случайный набор многоугольных следов мы обозначаем через $\{P_i\}$.

Пусть P – многоугольный след. Пусть s_1, \dots, s_n – стороны P , отсчитываемые по

направлению часовой стрелки, начиная от вершины V многоугольного следа P , имеющей наименьшее значение y -координаты. Эта вершина будет *единственной*, если мы предположим, что каждая ϕ_i принадлежит внутренности $(0, \pi)$. Через v обозначим (единственную) вершину P , имеющую наибольшее значение y -координаты. Мы также определяем

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{если многоугольник } P \text{ лежит в правой} \\ & \text{полуплоскости и ограничен продолжением } s_j \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

j_i — индекс семейства прямых, которому принадлежит сторона s_i .

Предложение 2. Максимальное число сторон многоугольного следа P_i — шесть. Поэтому число возможных последовательностей $((j_1, b_1), \dots, (j_n, b_n))$ конечно.

Это утверждение следует из замечания, что каждый многоугольник P_i есть пересечение (общая часть) не более чем трех полос (мы имеем ввиду полосы между последовательными параллелями в семействе). •

Вершины V и v разделяют периметр P на две ломаные, состоящие из сторон s_1, \dots, s_k и s_{k+1}, \dots, s_n . Другими словами, v — общая вершина для сторон s_k и s_{k+1} . Область изменения k от 1 до 4.

Лемма 1. Для любого многоугольного следа значения бинарных параметров b_1, \dots, b_k всегда равны 1, а значения b_{k+1}, \dots, b_n равны 0.

Определение 2. Последовательность

$$t = (j_1, \dots, j_n) \tag{3}$$

называется *типом* многоугольного следа P .

Лемма 2. Целые числа j_i всегда удовлетворяют неравенствам :

- 1) $j_1 > \dots > j_k$ для $k \neq 1$;
- 2) $j_{k+1} > \dots > j_n$ для $k \neq n - 1$;
- 3) $j_k < j_{k+1}$;
- 4) $j_1 > j_n$.

Условия 1) — 4) достаточны : для любых трех фиксированных направлений $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$, $\phi_i \in (0, \pi)$ и последовательности (j_1, \dots, j_n) , удовлетворяющей условиям 1) — 4), существует многоугольник соответствующего типа.

Доказательство. Необходимость непосредственно следует из выпуклости многоугольного следа.

Достаточность. Всевозможные последовательности, удовлетворяющие условиям 1) – 4), описаны в Таблице 1. Каждая последовательность, найденная в Таблице 1, допускает реализацию выпуклого многоугольника соответствующего типа. Рисунок 2 представляет многоугольные реализации всех типов, отмеченных в Таблице 1: два треугольных типа, три ромбоидальных, шесть трапециодальных, шесть пятиугольных и один шестиугольный тип. •

§4. ОТ МНОГУГОЛЬНИКОВ К БЛОКАМ

Пусть $P \subset e_F$ – многоугольный след. Будем говорить, что блок B соответствует P , если P – грань B . Через $I_K(P)$ мы обозначим индикатор

$$I_K(P) = \begin{cases} 1, & \text{если блок } B, \text{ соответствующий } P \text{ есть опасный блок,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а также положим $I_F(P) = 1$, если $P \subset F$ и 0 – в противном случае.

Для типа t определим следующую индикаторную функцию:

$$I(t) = \prod_{i=1}^n \left(I_1(b_i) \cdot I_{(\nu_{j_i} < \pi/2)} + I_0(b_i) I_{(\nu_{j_i} > \pi/2)} \right). \quad (4)$$

Предложение 3. Для многоугольного следа P типа t

$$I_K(P) = I(t) I_F(P). \quad (5)$$

Доказательство. Если $P \subset F$, то $I_K(P) = 1$ тогда и только тогда, когда все плоские углы ψ_1, \dots, ψ_n между соответствующими гранями B и внутренней частью P меньше $\pi/2$. Если последовательность $t = ((j_1, b_1), \dots, (j_n, b_n))$ соответствует многоугольному следу P , то имеем

$$I_{(\psi_j < \frac{\pi}{2})} = I_1(b_i) \cdot I_{(\nu_{j_i} < \pi/2)} + I_0(b_i) I_{(\nu_{j_i} > \pi/2)}, \quad (6)$$

где

$$I_s(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = b \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad s = 0, 1.$$

Уравнение (6) следует из определения углов ψ и ν : ψ_j определяются относительно внутренней части многоугольника P , а ν_j – в абсолютном смысле. •

Таблица 1

n, k	1)	2)	3)	4)	Дополн. условия	Решения ($t =$)
3, 1	—	$j_2 > j_3$	$j_1 < j_2$	$j_1 > j_3$	$j_1 = 1$ или 3 $j_1 = 2$	\emptyset (2, 3, 1)
3, 2	$j_1 > j_2$	—	$j_2 < j_3$	$j_1 > j_3$	$j_3 = 1$ или 3 $j_3 = 2$	\emptyset (3, 1, 2)
4, 1	—	$j_2 > j_3 > j_4$	$j_1 < j_2$	$j_1 > j_4$	—	(2, 3, 2, 1)
4, 2	$j_1 > j_2$	$j_3 > j_4$	$j_2 < j_3$	$j_1 > j_4$	$j_1 = 1$ $j_1 = 2$ $j_1 = 3,$ $j_4 = 2$ $j_1 = 3,$ $j_4 = 1$	\emptyset (2, 1, 2, 1) (2, 1, 3, 1) (3, 2, 3, 2) (3, 1, 3, 2) (3, 2, 3, 1) (3, 1, 2, 1) (3, 1, 3, 1)
4, 3	$j_1 > j_2 > j_3$	—	$j_3 < j_4$	$j_1 > j_4$	—	(3, 2, 1, 2)
5, 1	—	$j_2 > j_3 >$ $> j_4 > j_5$				\emptyset
5, 2	$j_1 > j_2$	$j_3 > j_4 > j_5$	$j_2 < j_3$	$j_1 > j_5$		(3, 1, 3, 2, 1) (3, 2, 3, 2, 1) (2, 1, 3, 2, 1)
5, 3	$j_1 > j_2 > j_3$	$j_4 > j_5$	$j_3 < j_4$	$j_1 > j_5$		(3, 2, 1, 3, 1) (3, 2, 1, 3, 2) (3, 2, 1, 2, 1)
5, 4	$j_1 > j_2 >$ $> j_3 > j_4$					\emptyset
6, $\neq 3$						\emptyset
6, 3	$j_1 > j_2 > j_3$	$j_4 > j_5 > j_6$	$j_3 < j_4$	$j_1 > j_6$	—	(3, 2, 1, 3, 2, 1)

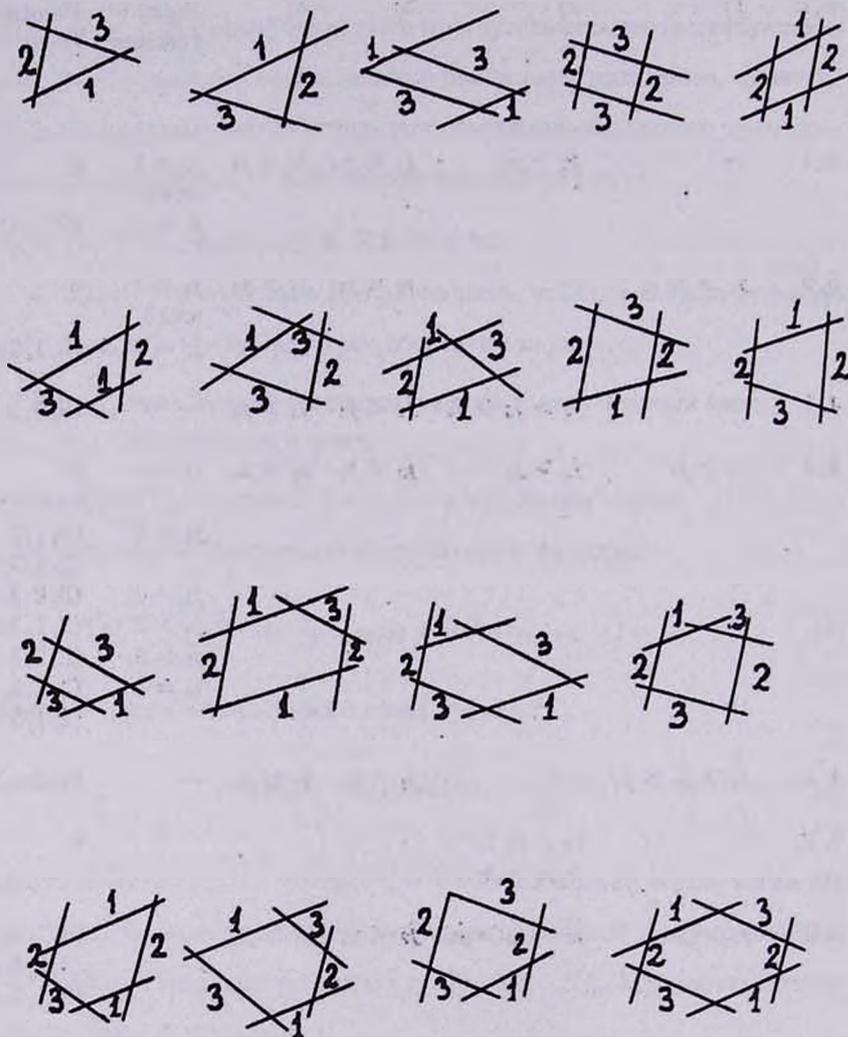


Рис. 2. Многоугольные реализации решений Таблицы 1

§5. МНОГОУГОЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Напомним определение плоских и линейных интенсивностей случайных наборов многоугольников. Мы основываемся на известном определении интенсивности стационарных точечных процессов в \mathbb{R}^1 или \mathbb{R}^2 (см. [1]).

Пусть $\{\pi_i\}$ — многоугольный процесс в плоскости \mathbb{R}^2 . Каждому многоугольнику π_i из процесса мы приписываем точечную марку $V_i: P_i \mapsto V_i$. По определению, V_i — вершина P_i , имеющая наименьшее значение y -координаты; V_i однозначно определена, если предположить, что с вероятностью 1 π_i не обладают сторонами, параллельными x -оси.

Определение 3. Предположим, что $\{\pi_i\}$ инвариантно относительно трансляций \mathbb{R}^2 . Тогда плоская интенсивность процессов многоугольников $\{\pi_i\}$ является интенсивностью точечного процесса $\{V_i\}$.

Предположим, $\{\pi_i\}$ инвариантно относительно сдвигов плоскости, параллельных y -оси, и что проекция множества $\{V_i\}$ на y -ось — стационарный одномерный точечный процесс $\{V_i^*\}$.

Определение 4. Линейная интенсивность процесса многоугольников $\{\pi_i\}$ является интенсивностью одномерного точечного процесса $\{V_i^*\}$.

Хорошо известно [1], что эти интенсивности не зависят от алгоритма построения марок V_i . Приведем список далее рассматриваемых случайных наборов многоугольников и их интенсивностей :

$\{P_i\}$ — многоугольные следы в e_F , плоская интенсивность λ^* ;

$\{P_i\}_K = \{P_i: I_K(P_i) = 1\}$, линейная интенсивность λ_K ;

$\{P_i\}_{t,F} = \{P_i: P_i \text{ — типа } t \text{ и } P_i \subset F\}$, линейная интенсивность λ_{tF} ;

$\{P_i: V_i \text{ — точка пересечения прямых из } m\text{-го } n\text{-го семейств}\}$, плоская интенсивность λ_{mn}^* .

Все многоугольные наборы в вышеприведенном списке содержатся в $\{P_i\}$.

Точнее $\sum \lambda_{mn}^* = \lambda^*$ и $\lambda_K = \sum_t \lambda_{tF} I(t)$.

§6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТЕЙ

Предложение 4. Плоская интенсивность λ_{mn}^* равна

$$\lambda_{mn}^* = \sigma_m \sigma_n |\sin(\phi_m - \phi_n)|. \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм, сторонами которого являются прямые m -го и n -го семейств.

Любые две прямые из m -го и n -го семейств, которые пересекают параллелограмм, пересекаются в его внутренности. Следовательно

$$\lambda_{mn}^* = \sigma_m \sigma_n \frac{h_m h_n}{A},$$

где h_m, h_n – высоты параллелограмма, A – его площадь. Путем элементарных вычислений получим

$$\frac{h_m h_n}{A} = |\sin(\phi_m - \phi_n)|. \quad \bullet$$

Следствие.

$$\lambda^* = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \sigma_i \sigma_j |\sin(\phi_i - \phi_j)|.$$

Обозначим через $\sigma_i(j)$ интенсивность точек пересечений прямых из семейства i с прямой семейства j . В качестве версии Предложения 4 имеем

$$\sigma_i(j) = \sigma_i |\sin(\phi_i - \phi_j)|. \quad (8)$$

Определение 5. Через $P_{(x,y)}$ обозначим вероятностное распределение *типичного* (см. [1]) многоугольного следа, марка V которого совпадает с точкой (x, y) , $(x, y) \in e_F$.

Заметим, что $P_{(x,y)}$ является “сдвинутой версией” $P_{(0,0)}$. Это означает следующее: предположим, что случайный многоугольник π имеет распределение $P_{(0,0)}$. Тогда $\overline{O(x,y)}\pi$ будет иметь распределение $P_{(x,y)}$, где $\overline{O(x,y)}\pi$ есть π , сдвинутый вектором $\overline{O(x,y)}$. Для события K имеем $P_{(x,y)}(K) = 0$, если $(x, y) \notin F$. Для $(x, y) \in F$ имеем $P_{(x,y)}(K) \equiv P_{(x,0)}(K)$. Если для события A имеет место $P_{(x,y)}(A) \equiv P_{(x,0)}(A)$, то мы будем использовать обозначение $P_{(x,y)}(A) = P_x(A)$.

Применяя стандартные рассуждения [1], мы можем доказать, что

$$\lambda_K = \lambda^* \int_0^W P_x(K) dx. \tag{9}$$

Используя предложение 3 и формулу полной вероятности, получим

$$P_x(K) = \sum_t P_x(\{t\} \cap \{F\}) I(t), \tag{10}$$

где событие $\{t\}$ означает, что случайный многоугольник типа t , а событие $\{F\}$ означает, что этот многоугольник лежит внутри F , $I(t)$ определено в (4), суммирование проводится по всем типам многоугольных следов.

Подставляя (10) в (9), получим

$$\lambda_K = \sum_t I(t) \lambda_{tF}, \quad \lambda_{tF} = \lambda^* \int_0^W P_x(\{t\} \cap \{F\}) dx. \tag{11}$$

Ниже мы опустим фигурные скобки в обозначениях $\{t\}$ и $\{F\}$.

Ясно, что для каждого типа t , где имеются повторяющиеся компоненты (параллельные стороны в соответствующем многоугольнике), получим

$$I(t) \equiv 0.$$

Следовательно, (11) приводится к следующему :

$$\lambda_K = I((2, 3, 1)) \lambda_{(2,3,1) \cap F} + I((3, 1, 2)) \lambda_{(3,1,2) \cap F}. \tag{12}$$

§7. СТОХАСТИЧЕСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ ДЛЯ $P_{(x,y)}$

В этом параграфе мы даем стохастическую конструкцию случайного многоугольника с вероятностным распределением P_x . Обозначим через $P_{(x,y)}(\cdot | j_1, j_n)$ условное распределение, полученное из $P_{(x,y)}$ при условии, что имеет место событие $\{j_1, j_n\} = \{ \text{две стороны, встречающиеся в } (x, y), \text{ имеют направления } \phi_{j_1} \text{ и } \phi_{j_n} \}$, $j_1, j_n \in \{1, 2, 3\}$. Обозначим через \mathcal{A} угловую область в полуплоскости $y > 0$, ограниченную двумя лучами, с вершиной в точке (x, y) и направлениями ϕ_{j_1} и ϕ_{j_n} . Возьмем три независимых пуассоновских процесса прямых, описанных в пункте 2) Предложения 1. Пусть D_1 – минимальная решетка, ограниченная прямыми из этих процессов, содержащая точку (x, y) .

Теорема 1. Распределение случайного многоугольника $A \cap D_1$ совпадает с распределением $P_{(x,y)}(\cdot | j_1, j_n)$.

Доказательство повторяет доказательство для аналогичных стохастических конструкций в [1], глава 9 и основано на пуассоновской природе случайного набора трещин.

Следствие.

$$P_{(x,y)}(\cdot) = \sum_{j_1, j_n} \frac{\lambda^{j_1 j_n}}{\lambda^*} P_{(x,y)}(\cdot | j_1, j_n).$$

§8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ $P_x(t \cap F | j_1, j_n)$

Определим *периметр Минковского* $M(D)$ выпуклого многоугольника D по формуле

$$M(D) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i pr_i(D) = \frac{1}{2} \sum a_i \sum_{j=1,2,3} |\cos(\alpha_i, L_j)| \sigma_j,$$

где $pr_i(D)$ – длина проекции D в направлении, перпендикулярном к ϕ_i , в последнем выражении первая сумма распространяется по всем сторонам a_i многоугольника D , (α_i, L_j) – угол между α_i и прямой L_j (см. Предложение 1).

Теперь мы опишем алгоритм вычисления $P_x(t \cap F | j_1, j_n)$ для данного n -гонального типа $t = (j_1, \dots, j_n)$ (Заметим, что если первый и последний элементы типа t отличаются от j_1 и j_n , то соответствующее условное распределение равно нулю).

Пусть p_i – одномерная координата на прямой L_i . Прямая, проходящая через точку p_i , ортогональная к L_i , имеет уравнение

$$x \sin \phi_i - y \cos \phi_i = p_i. \quad (13)$$

Шаг 1. Мы решаем относительно x, y систему из двух уравнений вида (13), записанную

для $i = j_1$ и $i = j_2$. Решение обозначим через x_1, y_1 ;

затем для $i = j_2$ и $i = j_3$. Решение обозначим через x_2, y_2 ;

.....

наконец для $i = j_{n-1}$ и $i = j_n$. Решение обозначим через x_{n-1}, y_{n-1} .

Точки $Q_1 = (x_1, y_1), Q_2 = (x_2, y_2), \dots, Q_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$ зависят от n параметров $p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_n}$.

Значения p_{j_1} и p_{j_n} мы берем как расстояния от начала координат O прямых, проходящих через $V = (x, 0)$ с направлениями j_1 и j_n , соответственно. Это оставляет $n - 2$ параметра $p_{j_2}, \dots, p_{j_{n-1}}$ свободными.

Шаг 2. Пусть x_i, y_i - координаты Q_i , определенные на первом шагу. Определим индикаторную функцию

$$I_1(Q_1, \dots, Q_{n-1}) = \prod I_F(Q_i),$$

где $I_F(Q) = 1$, если $Q \in F$ и 0 - в противном случае.

$$I_2(Q_1, \dots, Q_{n-1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } V, Q_1, \dots, Q_{n-1} \text{ - вершины выпуклого многоугольника пронумерованные по часовой стрелке} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

В случае $I_2 = 1$ величина M определена для многоугольника $D = V, Q_1, \dots, Q_{n-1}$. Остается вычислить интеграл

$$P_z(t \cap F | j_1, j_n) = \sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_{n-1}} \int e^{-M} I_1 I_2 dp_{j_2} \dots dp_{j_{n-1}}. \quad (14)$$

§9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТИПОВ

Из (11) и (12) следует, что достаточно вычислить

$$P_z((2, 3, 1) \cap F) = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda^n} P_z((2, 3, 1) \cap F | 1, 2).$$

Мы используем обозначения Рис. 3.

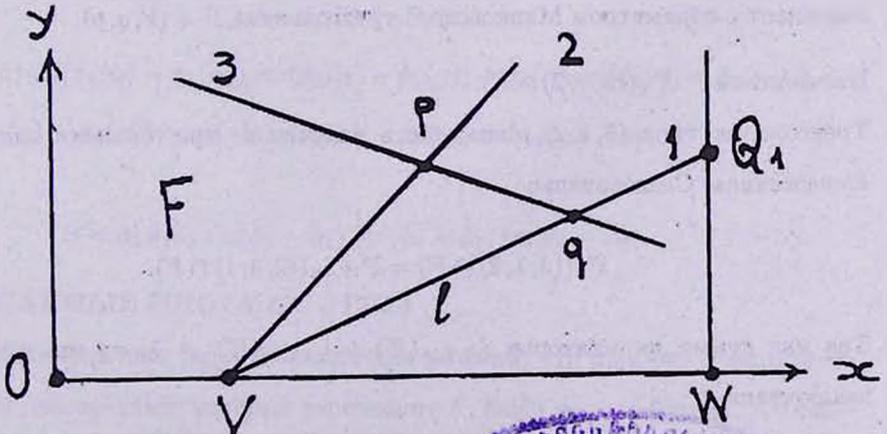
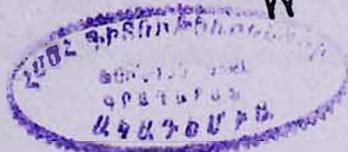


Рис. 3.



Событие, что марка V – точка пересечения прямых из 1-го и 2-го семейств имеет вероятность $\frac{\lambda_{12}^*}{\lambda^*}$. Пусть q – точка пересечения прямой VQ_1 с прямой из семейства 3, которая является ближайшей к V . Для любого $l > 0$ вероятность события $l \leq q \leq l + dl$ равна $\sigma_3(1) \exp(-\sigma_3(1)l)dl$ (напомним, что $\sigma_3(1)$ – интенсивность пуассоновского процесса пересечений прямых из семейства 3 на VQ_1 , см. (8)).

Вероятность $P_x((2, 3, 1) \cap F)$ может быть получена как интеграл от произведения $P(A(x, l)) \cdot P(B(x, l))$ с вышеприведенной плотностью, где $A(x, l)$ – событие, что ни одна прямая из семейства 2 не пересекает сегмент V, q ;

$B(x, l)$ – событие, что ни одна прямая из семейства 1 не пересекает сегмент V, p (см. Рис. 3).

Имеем $P(A) = \exp(-\sigma_2(1)l)$ и $P(B) = \exp(-\sigma_1(2)p)$, где

$$p = p(l) = \frac{l \sin(\phi_3 - \phi_1)}{\sin(\phi_3 - \phi_2)}.$$

Следовательно

$$P_x((2, 3, 1) \cap F) = \frac{\lambda_{12}^*}{\lambda^*} \int_0^{|VQ_1|} \sigma_3(1) \exp(-M(P)) I(l) dl, \quad (15)$$

где λ_{12}^* и $\sigma_i(j)$ определены в (7), (8), $I(l)$ – индикаторная функция множества $p \in F$:

$$I(l) = \begin{cases} 1, & \text{если } -x < p(l) \cos \phi_2 < W - x \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выражение

$$M(P) = \sigma_3(1)l + \sigma_2(1)l + \sigma_1(2)p$$

совпадает с периметром Минковского треугольника $P = (V, q, p)$.

Вычисление $P_x((3, 1, 2) \cap F)$.

Треугольник типа (3, 1, 2) может быть получен из треугольника типа (2, 3, 1) отражением. Следовательно

$$P_x((3, 1, 2) \cap F) = P_{W-x}((2, 3, 1) \cap F).$$

Так как сумма индикаторов $I_{(2,3,1)}(K) + I_{(3,1,2)}(K) = 1$, то мы приходим к заключению:

$$\lambda_K = \lambda_{(3,1,2) \cap F} = \lambda_{(2,3,1) \cap F}. \quad (16)$$

Отметим, что двукратное интегрирование (11), (15) можно провести и записать результат в терминах элементарных функций. Аналитические выражения, которые мы получаем, различны для следующих четырех областей угловых параметров ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 :

- 1) $0 < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \frac{\pi}{2}$;
- 2) $0 < \phi_1 < \phi_2 < \frac{\pi}{2} < \phi_3 < \pi$;
- 3) $0 < \phi_1 < \frac{\pi}{2} < \phi_2 < \phi_3 < \pi$;
- 4) $\frac{\pi}{2} < \phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \pi$.

Мы получаем следующий результат :

для случая 1)

$$\lambda_K = \frac{B}{A} \left[W + \frac{\cos \phi_2 \sin(\phi_3 - \phi_1)}{A} \left(\exp \left(-\frac{AW}{\cos \phi_2 \sin(\phi_3 - \phi_1)} \right) - 1 \right) \right],$$

для случая 2)

$$\lambda_K = \frac{B}{A} \left[W + \frac{\cos \phi_1 \sin(\phi_3 - \phi_2)}{A} \left(\exp \left(-\frac{AW}{\cos \phi_1 \sin(\phi_3 - \phi_2)} \right) - 1 \right) \right],$$

для случая 3)

$$\lambda_K = \frac{B}{A} \left[W - \frac{\cos \phi_3 \sin(\phi_2 - \phi_1)}{A} \left(\exp \left(\frac{AW}{\cos \phi_3 \sin(\phi_2 - \phi_1)} \right) - 1 \right) \right],$$

для случая 4)

$$\lambda_K = \frac{B}{A} \left[W - \frac{\cos \phi_2 \sin(\phi_3 - \phi_1)}{A} \left(\exp \left(\frac{AW}{\cos \phi_2 \sin(\phi_3 - \phi_1)} \right) - 1 \right) \right],$$

где

$$A = \sigma_3(\alpha) \sin(\phi_3(\alpha) - \phi_1(\alpha)) \sin(\phi_3(\alpha) - \phi_2(\alpha)) + \sigma_2(\alpha) \sin(\phi_2(\alpha) - \phi_1(\alpha)) \times \\ \times \sin(\phi_3(\alpha) - \phi_2(\alpha)) + \sigma_1(\alpha) \sin(\phi_2(\alpha) - \phi_1(\alpha)) \sin(\phi_3(\alpha) - \phi_1(\alpha)),$$

и

$$B = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin(\phi_3 - \phi_1) \sin(\phi_3 - \phi_2).$$

§10. СЛУЧАЙНЫЕ ПЛОСКИЕ УГЛЫ

Вышеуказанное решение было получено при условии, что плоские углы между крышей F и плоскостями, которые пересекают F , были неслучайными. Альтернативная модель, в которой указанные плоские углы становятся случайными,

может быть предпочтительней, тогда как неслучайный статус трех направлений ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , а также пуассоновский случайный характер прямых $\{g_m^{(i)}\}, i = 1, 2, 3$ сохраняется. Этому мы достигаем приписыванием случайного плоского угла $\psi_m^{(i)}$ каждой $g_m^{(i)}$. Мы предположим, что эти плоские углы независимы и для каждого i имеют одно и то же вероятностное распределение Ψ_i .

Пусть $e_m^{(i)}$ – плоскость, соответствующая паре $g_m^{(i)}, \psi_m^{(i)}$.

Эта модель имеет то важное аналитическое преимущество, что и принцип разложения по многоугольным типам и стохастическая конструкция, использованная в §8, остаются в силе. Отметим, что при вышеуказанных условиях относительно $\{g_m^{(i)}\}$ и $\{\psi_m^{(i)}\}$ пуассоновское случайное множество плоскостей $e_m^{(i)}$ управляема мерой, сконцентрированной на трех кривых полусферы направлений.

Тем не менее, основные формулы не будут содержать индикаторные коэффициенты. Они будут заменены определенными вероятностями. Значения p_i этих вероятностей останутся свободными параметрами модели. Мы рассмотрим дуги (см. §2 об определении угла ν)

$$a_i = \{\omega = (\phi_i, \nu) : \nu \in (0, \pi/2]\} \quad \text{и} \quad o_i = \{\omega = (\phi_i, \nu) : \nu \in (\pi/2, \pi)\},$$

которые соответствуют *острому* и *тупому* значениям ν при фиксированном ϕ_i , $i = 1, 2, 3$.

Вывод интенсивности λ_K опасных блоков в этой более общей модели в общих чертах напоминает вывод формулы (11). Поэтому мы просто записываем результат :

$$\lambda_K = \sum_t P_t(K) \lambda_{tF}, \quad \lambda_{tF} = \lambda^* \int_0^W P_x(t \cap F) dx, \quad (17)$$

где

$$P_t(K) = \prod_{i=1}^n (I_1(b_i) \cdot p_{j_i} + I_0(b_i) \cdot (1 - p_{j_i}))$$

и

$$p_i = \Psi_i(a_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Как и ожидалось, мелкие детали структуры Ψ_i неважны; решение зависит только от значений p_i . Интенсивности λ_t в разложении (17) определяются так

же как в (11) и их значения для треугольных типов приведены в §9. Так как теперь значения $P_t(K)$ для нетреугольных форм необязательно равны нулю, то перед нами встает задача вычисления значений λ_t для полного списка типов. Это будет предметом нашего рассмотрения в следующем параграфе.

§11. ЧАСТИЧНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ДЛЯ НЕТРЕУГОЛЬНЫХ ТИПОВ

В формуле (14) переменная интегрирования интерпретировалась как длина стороны треугольника. Аналогичный выбор переменной интегрирования может быть применен также к другим многоугольным типам.

Вычислим $P_z((3, 1, 2, 1) \cap F)$, см. Рис. 4.

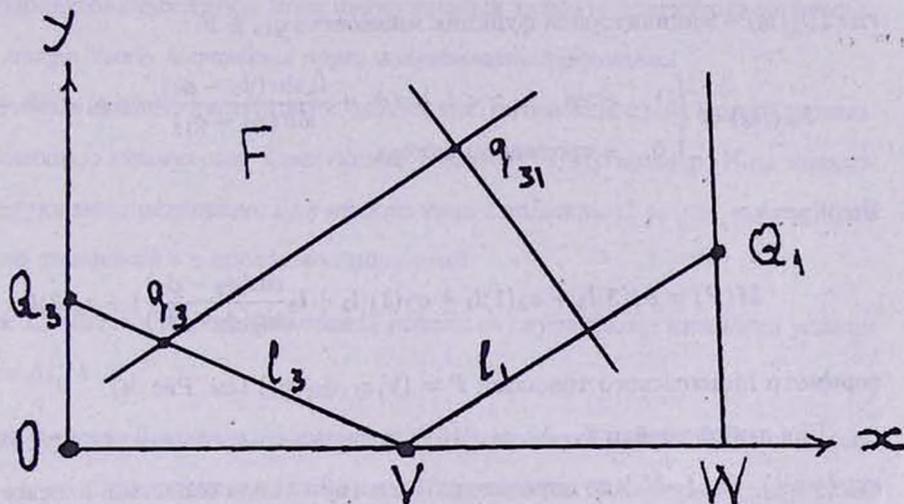


Рис. 4.

Событие, что V – точка пересечения прямых из 1-го и 3-го семейств, имеет вероятность $\frac{\lambda_{13}^*}{\lambda^*}$.

Пусть q_1 – точка пересечения прямой VQ_1 с прямой из семейства 2, ближайшей к V , и пусть q_3 – точка пересечения прямой VQ_3 с прямой из семейства 1, которая является ближайшей к V . Вероятности событий $l_1 \leq q_1 \leq l_1 + dl_1$ и $l_3 \leq q_3 \leq l_3 + dl_3$ равны $\sigma_2(1) \exp(-\sigma_2(1)l_1)dl_1$ и $\sigma_1(3) \exp(-\sigma_1(3)l_3)dl_3$, соответственно, см. (8). Вероятность $P_z((3, 1, 2, 1) \cap F)$ может быть получена как интеграл с вышеуказанной плотностью произведения $P(A) \cdot P(B)$, где

A – событие, что ни одна прямая из семейства 3 не пересекает отрезок q_3, q_{31}

(см. Рис 4.);

B – событие, что ни одна прямая из семейства 2 не пересекает отрезок V, q_3

(см. Рис. 4).

Имеем

$$P(A) = \exp \left[-\sigma_3(1) \left(l_1 + l_3 \frac{\sin(\phi_3 - \phi_2)}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \right) \right], \quad P(B) = \exp(-\sigma_2(3)l_3).$$

Следовательно

$$P_x((3, 1, 2, 1) \cap F) = \frac{\lambda_{13}^*}{\lambda^*} \int_0^{|V Q_1|} \int_0^{|V Q_3|} \sigma_1(3)\sigma_2(1) \exp(-M(P)) I(l_1, l_3) dl_1 dl_3, \quad (18)$$

где $I(l_1, l_3)$ – индикаторная функция множества $q_{13} \in F$:

$$I(l_1, l_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } -x < l_1 \cos \phi_1 + \frac{l_3 \sin(\phi_3 - \phi_1)}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \cos \phi_2 < W - x \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выражение

$$M(P) = \sigma_1(3)l_3 + \sigma_2(1)l_1 + \sigma_3(1) \left(l_1 + l_3 \frac{\sin(\phi_3 - \phi_2)}{\sin(\phi_2 - \phi_1)} \right) + \sigma_2(3)l_3$$

периметр Минковского трапеции $P = (V, q_1, q_{31}, q_3)$ (см. Рис. 4).

Для любой тройки ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , (16) – интеграл от произведения двух экспонент $\exp(-al_1) \cdot \exp(-bl_3)$ по определенной многоугольной области в плоскости l_1, l_3 .

Это означает, что (18) можно выразить через элементарные функции. Опять $P_x((3, 1, 2, 1) \cap F)$ будет иметь различные аналитические выражения в различных случаях. Приведем некоторые подробности вычисления.

Для вычисления кратного интеграла в правой части (17) сделаем замену переменных $(l_1, l_3) \rightarrow (r, \varphi)$, где (r, φ) – полярная координата противоположной к V вершины. Легко проверить, что якобиан равен

$$\frac{r}{\sin(\phi_3 - \phi_1)}.$$

Заметим, что в случае $\phi_3 < \pi/2$ имеем

$$I(l_1, l_3) = I(r, \varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \phi_1 < \varphi < \phi_2 \text{ и } 0 < r < (W - x)/\cos \varphi \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Интегрирование по переменной x к затруднениям не приводит. Конечный результат имеет вид

$$\Lambda_{(3,1,2,1)} = \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sin(\phi_2 - \phi_1) \sin^2(\phi_3 - \phi_1) \left[+ \frac{W \sin(\phi_2 - \phi_1)}{AA_1} + \frac{\cos^2 \phi_2 \sin^2(\phi_3 - \phi_1)}{A^2(A_1 \cos \phi_3 - \sigma_1 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos \phi_1)} \left(\exp \left(- \frac{WA}{\cos \phi_2 \sin(\phi_3 - \phi_1)} \right) - 1 \right) - \frac{\cos^2 \phi_1}{A_1^2(A_1 \cos \phi_3 - \sigma_1 \sin(\phi_3 - \phi_1) \cos \phi_1)} \left(\exp \left(- \frac{WA_1}{\cos \phi_1} \right) - 1 \right) \right],$$

где $A_1 = \sigma_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) - \sigma_3 \sin(\phi_3 - \phi_1)$. Здесь и далее мы используем упрощенное обозначение $\Lambda_t = \lambda_{t \cap F}$.

Аналогично можно вычислить частичные интенсивности для последних пяти четырехугольных типов, трех пятиугольных типов и шестиугольного типа. Все они могут быть выражены через элементарные функции.

Некоторые факты, касающиеся частичных интенсивностей, можно установить с помощью симметрии. Следующая теорема – тому пример. Нам понадобится следующее определение. Для любого типа t положим $t^* = (m_1, m_2, m_3)$, где m_i – число появлений i в последовательности t .

Теорема 2.. Если в трехнаправленной модели со случайными плоскими углами $t_1^* = t_2^*$, то $\Lambda_{t_1} = \Lambda_{t_2}$.

Доказательство. Для нашей модели в (17) присутствует полиномиальная зависимость λ_K от параметров p_i . Используя (16), выразим последнюю следующим образом :

$$\begin{aligned} \lambda_K = & \Lambda_{(2,3,1)}[(1 - p_1)p_2(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)p_3] + \Lambda_{(2,1,2,1)}p_1(1 - p_1)p_2(1 - p_2) + \\ & + \Lambda_{(3,1,3,1)}p_1(1 - p_1)p_3(1 - p_3) + \Lambda_{(3,2,3,2)}p_2(1 - p_2)p_3(1 - p_3) + \\ & + \Lambda_{(2,1,3,1)}p_1(1 - p_1)p_2(1 - p_3) + \Lambda_{(3,1,2,1)}p_1(1 - p_1)p_3(1 - p_2) + \\ & + \Lambda_{(3,2,1,2)}p_2(1 - p_2)p_3(1 - p_1) + \Lambda_{(2,3,2,1)}p_2(1 - p_2)p_1(1 - p_3) + \\ & + \Lambda_{(3,1,3,2)}p_3(1 - p_3)p_1(1 - p_2) + \Lambda_{(3,2,3,1)}p_3(1 - p_3)p_2(1 - p_1) + \\ & + \Lambda_{(3,2,1,2,1)}p_1(1 - p_1)p_2(1 - p_2)p_3 + \Lambda_{(2,1,3,2,1)}p_1(1 - p_1)p_2(1 - p_2)(1 - p_3) + \\ & + \Lambda_{(3,2,1,3,1)}p_1(1 - p_1)p_3(1 - p_3)p_2 + \Lambda_{(3,1,3,2,1)}p_1(1 - p_1)p_3(1 - p_3)(1 - p_2) + \\ & + \Lambda_{(3,2,1,3,2)}p_2(1 - p_2)p_3(1 - p_3)p_1 + \Lambda_{(3,2,3,2,1)}p_2(1 - p_2)p_3(1 - p_3)(1 - p_1) + \\ & + \Lambda_{(3,2,1,3,2,1)}p_1(1 - p_1)p_2(1 - p_2)p_3(1 - p_3). \end{aligned}$$

Заметим, что значение λ_K можно вычислить двумя различными способами, соответствующими подстановки $p_i \rightarrow 1 - p_i$, $i = 1, 2, 3$ в (19). Таким образом, разность между двумя выражениями λ_K равна нулю, т.е.

$$\begin{aligned}
 & (\Lambda_{(2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,2,1)})p_1(1-p_1)(p_2-p_3)+ \\
 & + (\Lambda_{(3,2,1,2)} - \Lambda_{(2,3,2,1)})p_2(1-p_2)(p_1+p_3-1)+ \\
 & + (\Lambda_{(3,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,1)})p_3(1-p_3)(p_1-p_2)+ \\
 & + (\Lambda_{(3,2,1,2,1)} - \Lambda_{(2,1,3,2,1)})p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)(2p_3-1)+ \\
 & + (\Lambda_{(3,2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,3,2,1)})p_1(1-p_1)p_3(1-p_3)(2p_2-1)+ \\
 & + (\Lambda_{(3,2,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,2,1)})p_2(1-p_2)p_3(1-p_3)(2p_1-1) = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку интенсивности Λ_i не зависят от p_i и (20) выполняется для всех значений p_i , мы заключаем, что

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{(2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,2,1)} &= \Lambda_{(3,2,1,2)} - \Lambda_{(2,3,2,1)} = \\
 &= \Lambda_{(3,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,1)} = \Lambda_{(3,2,1,2,1)} - \Lambda_{(2,1,3,2,1)} = \\
 &= \Lambda_{(3,2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,1,3,2,1)} = \Lambda_{(3,2,1,3,2)} - \Lambda_{(3,2,3,2,1)} = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, получаем $\Lambda_i = \Lambda_i$. •

§12. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ λ_K ОТ СВОБОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Согласно (19) и (21) для модели со случайными плоскими углами и тремя плоскостными направлениями ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , которые можно обнаружить на крыше туннеля, мы имеем следующее полиномиальное выражение :

$$\begin{aligned}
 \lambda_K &= \Lambda_{(2,3,1)}[(1-p_1)p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3] + \\
 &+ \Lambda_{(2,1,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2) + \Lambda_{(3,1,3,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_3) + \\
 &+ \Lambda_{(3,2,3,2)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_3) + \Lambda_{(2,1,3,1)}p_1(1-p_1)[p_2(1-p_3) + p_3(1-p_2)] + \\
 &+ \Lambda_{(3,2,1,2)}p_2(1-p_2)[p_1(1-p_3) + p_3(1-p_1)] + \\
 &+ \Lambda_{(3,1,3,2)}p_3(1-p_3)[p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)] + \\
 &+ \Lambda_{(3,2,1,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2) + \Lambda_{(3,2,1,3,1)}p_1(1-p_1)p_3(1-p_3) + \\
 &+ \Lambda_{(3,2,1,3,2)}p_2(1-p_2)p_3(1-p_3) + \Lambda_{(3,2,1,3,2,1)}p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)p_3(1-p_3).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Этот многочлен инвариантен относительно подстановок $p_i \mapsto 1 - p_i$.

Многочлен (22) может быть эффективно использован для проведения оценок на ЭВМ. Кроме того, его можно использовать для получения результатов. Например, отметим неравенство

$$\begin{aligned} \lambda_K < & \Lambda_{(2,3,1)}[(1-p_1)p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3] + \\ & + \Lambda_{(2,1,3,1)}p_1(1-p_1)[p_2(1-p_3) + p_3(1-p_2)] + \\ & + \Lambda_{(3,2,1,2)}p_2(1-p_2)[p_1(1-p_3) + p_3(1-p_1)] + \\ & + \Lambda_{(3,1,3,2)}p_3(1-p_3)[p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)] + \\ & + \frac{1}{16}[\Lambda - 2\Lambda_{(2,3,1)} - \Lambda_{(2,1,3,1)} - \Lambda_{(3,2,1,2)} - \Lambda_{(3,1,3,2)}]. \end{aligned}$$

которое получается из $p(1-p) \leq 1/4$. В пятой строке формулы $\Lambda = \sum_i \Lambda_i$.

§13. СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕЗОПАСНЫХ ЭКСКАВАЦИЙ

Вернемся к простой трехнаправленной модели и приведем некоторые замечания.

Подробное изучение обнаруживает существование безопасных туннельных экскаваций, т. е. ситуации, когда $\lambda_K = 0$.

Критерий. Проектируем точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ на экватор (лежащий в горизонтальной плоскости) большими окружностями через полюс, используя короткие пути к экватору. Получаем три точки $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на окружности $[0, 2\pi]$. Условие, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ может быть покрыто дугой длины меньше π , необходимо и достаточно для того, чтобы $\lambda_K = 0$ (безопасная экскавация).

В практическом туннелестроении мы не можем выбирать пространственные направления $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Однако, некоторые параметры направлений все еще могут зависеть (в некоторых пределах) от выбора строителя. Это могут быть

- 1) направление туннеля в горизонтальной плоскости,
- 2) наклон α крыши туннеля : (α определяет вращение крыши туннеля вокруг y -оси туннеля).

Возникает естественный вопрос : можно ли достичь безопасной экскавации удобным выбором параметров 1), 2). Относительно 1) : значение λ_K не зависит от выбора направления туннеля в горизонтальной плоскости.

Относительно 2) : для любых $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ существует критическое значение α_0 такое, что для наклонов $\alpha > \alpha_0$ получаем безопасную экскавацию. Для вычисления значения α_0 можно использовать полиномиальное представление

(22), остающееся справедливым для всех $\lambda_K(\alpha)$. Функциональный вид частичных интенсивностей остается таким же как в (13). В эти формулы мы должны подставить некоторые новые значения $\phi_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$.

ABSTRACT. The paper considers Poisson models for random collections of cracks in the body of a rock. The main parameter of interest is the linear intensity λ_K of key blocks forming as a result of excavating a tunnel through the rock. In the case of tridirectional model the problem is completely solved by an expression giving λ_K in terms of elementary functions. Polynomial dependence of λ_K on the unknown probabilistic parameters is discussed for a more general model. Possibility of safe excavation (i. e. situations with $\lambda_K = 0$) is discussed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штойян, Введение в стохастическую геометрию, Наука, М., 1989.
2. McCullagh and Lang, "Stochastic models for rock instability in tunnels," J. R. Statist. Soc., В. 46 : 2, pp. 344 - 352, 1984.

9 февраля 1996

Американский университет Армении