ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА–ХОПФА

Г. А. Григорян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 2, 1996

В статье исследуется интегральное уравнение Винера–Хопфа с неотрицательным ядром $K \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. На основе связи между моментами первого и второго порядка ядра K и свойствами символа уравнения получены некоторые результаты, относящиеся к указанному уравнению. В конце статьи выводится формула общего решения уравнения восстановления.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Винера–Хопфа

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^{+\infty} K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad t > 0 \tag{1}$$

с ядром $K(t)$, удовлетворяющим условиям

(а) $0 \le K(t) \in \mathbf{L}^1(-\infty, \infty)$;

(б) $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt \le 1$,

находят важные применения в различных областях естествознания, математики : в теории вероятностей [4], астрофизике, в теории переноса излучения (проблема Милна и др.). В работах [1], [2] особое место было уделено так называемому консервативному случаю (КС), в котором $\mu = 1$. Подход, развитый в указанных работах, основан на идее вольтерровской факторизации интегрального оператора Винера–Хопфа и применении нелинейных функциональных уравнений факторизации (уравнения Н. Б. Енгибаряна). Работы [1] и [2] содержат новые результаты по разрешимости однородных и неоднородных консервативных уравнений Винера–Хопфа. Условия разрешимости уравнения (1), (а) — (б) сформулированы в [1], [2] и в ряде других работ (см. [5], [6]) в терминах моментов ядра $K(t)$:

$$\nu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n K(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

С другой стороны, во многих работах уравнения (1) были изучены с точки зрения их символов. Несомненно, нахождение значения ν_n в ряде случаев гораздо проще, чем выявление свойств упомянутого символа (вычисление индекса символа и т.д.). Для изучения особых классов уравнений Винера–Хопфа применяется метод специальной факторизации (см. [3]), который по существу опирается на изучение символа уравнения. Ниже мы докажем некоторые факты, устанавливающие связь между значениями моментов ν_1 и ν_2 и свойствами символа уравнения (1), (а) — (б). Это позволит на основании результатов работы [3] (гл. 5) усилить некоторые известные результаты.

В связи с этим, вкратце изложим содержание метода специальной факторизации в той степени общности, в которой он будет нами использован. Рассмотим следуюпцуие банаховы пространства функций на вещественной оси :

$$\mathbf{L}^p (1 \le p < +\infty), \quad \mathbf{C}^0 \subset \mathbf{C} \subset \mathbf{M},$$

где $\mathbf{M}$ – пространство измеримых, почти всюду ограниченных функций. $\mathbf{C}$ – пространство непрерывных ограниченных, а $\mathbf{C}^0$ – пространство непрерывных исчезающих на $\pm\infty$ функций. Пусть $\mathbb{E}$ – одно из таких пространств.

Через $\mathbb{E}^+$ обозначим подпространство $\mathbb{E}$, элементы которого обращаются в нуль на отрицательной полуоси.

Пусть $\mathbf{F}$ – оператор Винера–Хопфа в $\mathbb{E}^+$:

$$(\mathbf{F}\varphi)(t) \equiv c\varphi(t) + \int_0^{+\infty} K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad t > 0,$$

где c – некоторая постоянная и $K \in \mathbf{L}^1$. Пусть

$$\mathcal{A}(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\,T(t)\,dt, \quad -\infty \le \lambda \le +\infty \tag{2}$$

– символ оператора $\mathbf{F}$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ алгебру функций вида (2), а через $\mathcal{F}_{\pm}$ – его подалгебры, для которых $T(\pm t) \in \mathrm{L}_{+}^{1}$, соответственно. Предположим, что $\mathcal{A}(\lambda)$ обращается в нуль только в точке $\lambda = 0$, причем

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + i}\right)^{j} \cdot B(\lambda), \tag{3}$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$, $B(\lambda) \neq 0$, $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$, а j – некоторое натуральное число. Введем функции $\rho_{\pm}(\lambda) = \dfrac{\lambda}{\lambda \pm i}$. Очевидно, что $\rho_{\pm}^{m}(\lambda) \in \mathcal{F}_{\pm}$, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть l и r – целые неотрицательные числа такие, что $l + r = j$. Тогда с учетом (3) для функции $\mathcal{A}(\lambda)$ можем записать следующее представление :

$$\mathcal{A}(\lambda) = \rho_{-}^{l}(\lambda) C(\lambda) \rho_{+}^{r}(\lambda), \tag{4}$$

где $C(\lambda) = \left(\dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{l} B(\lambda) \in \mathcal{F}$. Разложение (4) порождает разложение оператора $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = R_{-}^{l} C R_{+}^{r}, \tag{5}$$

где $R_{\pm}$ – операторы, соответствующие $\rho_{\pm}(\lambda)$. Они определяются так :

$$(R_{+}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - e^{-t} \int_{0}^{t} e^{s} \varphi(s)\, ds, \qquad t > 0, \tag{6}$$

$$(R_{-}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - e^{t} \int_{t}^{+\infty} e^{-s} \varphi(s)\, ds, \qquad t > 0. \tag{7}$$

Пусть

$$(G\varphi)(t) \equiv \varphi(t) + \int_{0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau, \qquad t > 0. \tag{8}$$

Отметим, что в формулах (6) и (7) $\varphi \in \mathbb{E}^{+}$, а в (8) $\varphi \in L_{1}^{\mathrm{loc}}$ (т.е. φ локально интегрируема).

Обозначим через $\widetilde{E}^{r} = \widetilde{E}(\rho_{+}^{r}(\lambda))$ множество функций вида $(G^{r}\varphi)(t)$, $\varphi \in \mathbb{E}^{+}$. В [3] было показано, что если ввести норму в $\widetilde{E}^{r}$, полагая $\|G^{r}\varphi\|_{\widetilde{E}^{r}} = \|\varphi\|_{\mathbb{E}^{+}}$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{E}_{+}}$ – норма в $\mathbb{E}^{+}$, то оператор R_{+}^{r} непрерывно продолжается на $\widetilde{E}^{r}$, превращаясь в изометрический изоморфизм из $\widetilde{E}^{r}$ в $\mathbb{E}^{+}$, причем $(R_{+}^{r})^{-1} = G^{r}$.

Пусть $\overrightarrow{E}^{l} = E(\rho_{-}^{l}(\lambda)) = \operatorname{Im} R_{-}^{l}$. В работе [3] показано также, что $\dim\ker R_{-}^{l} < < +\infty$. Введя факторпространство $\mathbb{E}^{+}/\ker R_{-}^{l}$, там показывается, что оператор $R_{-}^{l} \cdot C \colon \mathbb{E}^{+} \to \overrightarrow{E}^{l}$ можно представить в виде $\overline{R}_{-}^{l} \cdot \overline{C}$, где $\overline{R}_{-}^{l} : \mathbb{E}^{+}/\ker R_{-}^{l} \to \overrightarrow{E}^{l}$

– изометрический изоморфизм, а $\overline{C}$: $\mathbb{E}^+ / \ker R^l_-$ – Φ–оператор. Тогда оператор $\widetilde{\mathbf{F}} = \overline{R}^l_- \overline{C} R^r_+ : \widetilde{E}^r_+ \to \overline{\mathbb{E}}^l_+$ также будет Φ–оператором.

$\widetilde{\mathbf{F}}$ будем называть непрерывным продолжением оператора $\mathbf{F}$. Таким образом, для исследования разрешимости уравнения $\mathbf{F}\varphi = f$, где $\mathbf{F}$ допускает продолжение вида $\widetilde{\mathbf{F}}: \widetilde{E}^r \to \overline{E}^l$, остается вычислить $\operatorname{Ind}\widetilde{\mathbf{F}} \equiv \dim\ker\widetilde{\mathbf{F}} - \dim\operatorname{coKer}\widetilde{\mathbf{F}}$. Из теоремы 2.6, гл. 5, [3] следует, что

$$\operatorname{ind}\widetilde{\mathbf{F}} = \max\{\delta - \kappa, 0\} + \max\{\kappa - \delta, 0\}, \tag{9}$$

где

$$\kappa = \operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} C(\lambda) = \operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B(\lambda) + l,$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если либо } \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}^p_+ (1 \le p < +\infty), \quad \text{либо } \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}^0_+ \\ 1, & \text{если либо } \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+, \quad \text{либо } \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+. \end{cases}$$

§1. СИМВОЛ КОНСЕРВАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\mathcal{A}(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} K(t)\, dt$ – символ уравнения (1). Очевидно, $\mathcal{A}(\lambda) \in \mathcal{F}$. В дальнейшем будем рассматривать только случай $\mu = 1$. Тогда $\mathcal{A}(0) = 0$, и поскольку $\operatorname{Re}\mathcal{A}(\lambda) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)\sin^2(\lambda t/2)\, dt$, то $\mathcal{A}(\lambda) \ne 0$, $\lambda \ne 0$. Таким образом, $\mathcal{A}(\lambda)$ имеет единственный нуль в точке $\lambda = 0$. Отсюда и из теоремы 2.9 [3], ввиду условия (а), непосредственно получим следующий результат.

Теорема 1. A°. *Существование конечного момента ν_1 необходимо и достаточно для представления*

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + i} B(\lambda), \tag{10}$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$ и $B(\lambda) \ne 0$, $-\infty \le \lambda \le +\infty$.

B°. *Условие $\nu_2 < +\infty$, $\nu_1 = 0$ необходимо и достаточно для представления*

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + i}\right)^2 B(\lambda), \tag{11}$$

где $B(\lambda) \in \mathcal{F}$ и $B(\lambda) \ne 0$, $-\infty \le \lambda \le +\infty$.

Замечание. Из теоремы 1 B° и условия $B(0) = -1/2$, $\nu_2 > 0$ следует, что функция $\mathcal{A}(\lambda)$ не может иметь нуль выше второго порядка.

Пусть $\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\,K(t)\,dt<+\infty$ и $\nu_1\neq 0$. По теореме $1A^\circ$ справедливо представление (10). Пусть $\nu_1>0$. Покажем, что

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty}B(\lambda)=0. \tag{12}$$

Из неравенства $\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}\,K(t)\,dt\right|\le 1$ следует, что $-\pi/2<\arg\mathcal{A}(\lambda)<\pi/2$, $\lambda\neq 0$. Это неравенство выполняется также для функции $\arg\left(\dfrac{\lambda+i}{\lambda}\right)$, $\lambda\neq 0$. Из (10) имеем $-\pi<\arg B(\lambda)<\pi$, $\lambda\neq 0$. Последняя оценка верна и при $\lambda=0$. Действительно, поскольку

$$B(0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda+i}{\lambda}\mathcal{A}(\lambda)=i\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1-e^{i\lambda t}}{\lambda}\right)K(t)\,dt=\nu_1\,(>0),$$

то $\arg B(0)=0\in(-\pi,\pi)$. Таким образом, приращение $\arg B(\lambda)$ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ строго меньше чем 2π, что влечет за собой равенство (12).

Изучим теперь случай, когда $\nu_1<0$. Покажем, что в этом случае

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty}B(\lambda)=-1. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)=1-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}\,\widetilde{K}(t)\,dt,$$

где $\widetilde{K}(t)=K(-t)$.

Пусть $\widetilde{\nu}_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}t\,\widetilde{K}(t)\,dt$. Очевидно, $\widetilde{\nu}_1=-\nu_1>0$. Тогда по доказанному выше

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda+i}\,\widetilde{B}(\lambda), \tag{14}$$

$\widetilde{B}(\lambda)\in\mathcal{F}$, $\widetilde{B}(\lambda)\neq 0$, $-\infty\le\lambda\le+\infty$ и

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty}\widetilde{B}(\lambda)=0. \tag{15}$$

Из очевидного равенства $\widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)=\mathcal{A}(-\lambda)$, и из (10) получим

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda+i}\,B(-\lambda). \tag{16}$$

Сравнивая равенства (14) и (16), получаем $B(\lambda)=\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}\widetilde{B}(-\lambda)$. Отсюда ввиду (15) получаем (13).

Пусть $\nu_2 < +\infty$, $\nu_1 = 0$. Тогда по теореме 1 $B°$ имеем (11). Докажем (13). Из равенства $\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^2 = \left|\frac{\lambda}{\lambda+i}\right|^2 \frac{\lambda-i}{\lambda+i}$ следует, что $\arg\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}B(\lambda)\right) = \arg\mathcal{A}(\lambda)$. Следовательно, $-\frac{\pi}{2} \le \arg\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}B(\lambda)\right) \le \frac{\pi}{2}$, $-\infty \le \lambda \le +\infty$. Тогда получим $\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}B(\lambda)\right) = 0$, из которого следует (13). Резюмируем полученные выше факты в следующей теореме.

Теорема 2. $A°$. *В условиях теоремы 1 $A°$ имеем представление (10) и*

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \nu_1 > 0, \\ -1, & \text{если} \quad \nu_1 < 0. \end{cases} \tag{17}$$

$B°$. *В условиях теоремы 1 $B°$ имеем (11) и (13).*

§2. КОНСЕРВАТИВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА–ХОПФА

Пусть $(\mathcal{K}\varphi)(t) \equiv \varphi(t) - \int_0^{+\infty} K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ – оператор Винера–Хопфа действующий в $\mathbb{E}^+$. Из теоремы 2 следует, что $\mathcal{K}$ допускает непрерывные продолжения вида

$$\widetilde{\mathcal{K}}:\quad \widetilde{E}^r \to \overline{E}^l,$$

где r и l – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию : $r + l = j$, j – порядок нуля символа $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$.

Пусть существует ν_1 и $\nu_1 \ne 0$. Из теоремы 1 $A°$ следует, что $r + l = 1$. Возможны следующие случаи :

$$1°.\ r = 1, l = 0; \quad \text{и} \quad 2°.\ r = 0, l = 1.$$

Исследуем уравнение (1) для каждого из этих случаев в отдельности.

В случае 1° имеем $\widetilde{E}^r = \widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$, $\overline{E}^l = \mathbb{E}^+$. Из теоремы 2 $A°$, теоремы 2.6 гл. 5 [3] и (9) получим, что $\widetilde{K}$ является Φ–оператором из $\widetilde{E}^1$ в $\mathbb{E}^+$, при этом

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \nu_1 < 0 \\ 0, & \text{если} \quad \nu_1 > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Отсюда следует, что уравнение (1) для каждого $f \in \mathbb{E}^+$ имеет решение в $\widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$. Соответствующее однородное уравнение имеет с точностью до постоянного множителя одно решение при $\nu_1 < 0$ и только тривиальное решение при $\nu_1 > 0$.

В случае 2° имеем $\widetilde{E}^r = \mathbb{E}^+$ и $\overline{E}^l = \overline{E}(\rho_-(\lambda))$. С помощью формулы (9) нетрудно проверить, что

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \nu_1 < 0,\ \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}^+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+ \\ 0, & \text{если} \quad \nu_1 > 0,\ \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}^+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+ \\ 0, & \text{если} \quad \nu_1 < 0,\ \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_p^+(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0 \\ -1, & \text{если} \quad \nu_1 > 0,\ \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_p^+(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0. \end{cases} \tag{20}$$

Отсюда, в частности, следует, что если $\nu_1 < 0$, то при $f \in \overline{E}^+\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - i}\right)$ существует решение уравнения (1) в $\mathbb{E}^+$, а линейно независимое решение $\varphi^*(t)$ соответствующего однородного уравнения удовлетворяет условию $\varphi^* \in \mathbf{C}_+ \setminus \mathbf{C}_+^0$. Из (20) также следует, что если $f \in \overline{\mathbf{M}}_+(\rho_-(\lambda))$ ($f \in \overline{\mathbf{C}}_+(\rho_-(\lambda))$), то любое решение уравнения (1) принадлежит $\mathbf{M}_+(\mathbf{C}_+)$, а если $f \in \overline{\mathbb{E}}_+(\rho_-(\lambda))$, где $\mathbb{E}^+ = L_+^p(1 \le p < +\infty)$ и $\nu_1 < 0$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно решение, принадлежащее $\mathbb{E}^+$. Последнее также будет иметь место, если вместо $\nu_1 < 0$ потребовать, чтобы $\nu_1 > 0$ и $g(f) = 0$ для всех $g \in \operatorname{Ker}\mathcal{K}^*$, где $*$ – знак сопряжения.

Пусть $\nu_2 < +\infty$ и $\nu_1 = 0$. Тогда из теоремы 1 $B°$ следует, что $r + l = 2$. Возможны следующие случаи :

$$1^{\circ\circ}.\ r = 2,\ l = 0; \quad 2^{\circ\circ}.\ r = 1,\ l = 1; \quad 3^{\circ\circ}.\ r = 0,\ l = 2.$$

Для каждого из этих случаев рассуждениями, аналогичными 1° и 2°, нетрудно установить, что :

в случае $1^{\circ\circ}$

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = 1, \tag{21}$$

в случае $2^{\circ\circ}$

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+; \\ 0, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0, \end{cases} \tag{22}$$

в случае $3^{\circ\circ}$

$$\operatorname{Ind}\widetilde{\mathcal{K}} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+ \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+; \\ -1, & \text{если} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty) \quad \text{или} \quad \mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0. \end{cases} \tag{23}$$

Из формул (21) и (22) вытекает, что однородное уравнение $\mathcal{K}\varphi = 0$ имеет в $\widetilde{E}(\rho_+^2(\lambda))$ ровно одно линейно независимое решение $\varphi^* \in \widetilde{C}_+(\rho_+(\lambda)) \setminus \widetilde{C}_+^0(\rho_+(\lambda))$.

Из (21) также следует, что уравнение (1) имеет решение, принадлежащее $\widetilde{E}(\rho_+^2(\lambda))$. Если же $f \in \overline{E}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - i}\right)$, где $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty)$, или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0$, то из (22) вытекает, что любое решение уравнения (1) принадлежит $\widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$.

Если $f \in \overline{E}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda - i}\right)$, где $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty)$, или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно, принадлежащее $\widetilde{E}(\rho_+(\lambda))$.

Наконец, для $f \in \overline{E}(\rho_-^2(\lambda))$ имеет место следующее утверждение :

a°. Если $\mathbb{E}^+ = \mathbf{M}_+$ или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно из $\mathbb{E}^+$;

b°. Если $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}_+^p(1 \le p < +\infty)$ или $\mathbb{E}^+ = \mathbf{C}_+^0$, то для того, чтобы уравнение (1) имело решение $\varphi_0 \in \mathbb{E}^+$ необходимо и достаточно, чтобы $g(f) = 0$, где g – единственное, с точностью до постоянного множителя, решение уравнения $\mathcal{K}^*\Psi = 0$. Если это условие выполняется, то φ_0 единственное. С учетом аналитического описания пространств $\widetilde{E}^r$ и $\overline{E}^l$ (см. [3], стр. 202 – 208), полученные результаты подытожим в следующей теореме.

Теорема 3. A°. *Если первый момент $\nu_1 \neq 0$ конечен, то для любого $f \in \mathbb{E}^+$ уравнение (1) имеет решение $\varphi(t)$ такое, что $\varphi(t) = \Psi(t) + \int_0^t \Psi(s)\,ds$, где $\Psi \in \mathbb{E}^+$. Соответствующее однородное уравнение имеет в $\widetilde{E}^1$ только одно тривиальное решение, если $\nu_1 > 0$, а в случае $\nu_1 < 0$ – единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение.*

Кроме того

$A^\circ.1)$ Если $\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$, где либо $\mathbb{E} = \mathbf{L}^p(1 \le p \le +\infty)$ либо $\mathbb{E} = \mathbf{C}^0$ и $\nu_1 < 0$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно из $\mathbb{E}^+$;

$A^\circ.2)$ Утверждение $A^\circ.1)$ остается в силе, если условие $\nu_1 < 0$ заменить условием $\nu_1 > 0$ и дополнительно потребовать, чтобы $g(f) = 0$ для всех $g \in \operatorname{Ker}\widetilde{\mathcal{K}}^*$;

$A^\circ.3)$ Если $\int_0^t f(s)\,ds \in \mathbf{M}_+$, то все решения уравнения (1) принадлежат $\mathbf{M}_+$;

$A^\circ.4)$ В случае $f(t) = \Psi(t) - e^t \int_t^{+\infty} e^{-s}\Psi(s)\,ds < +\infty$ и $\nu_1 = 0$ решения уравнения (1) принадлежат $\mathbf{C}_+$.

B°. *Пусть $\nu_2 < +\infty$ и $\nu_1 = 0$. Тогда уравнение (1) при любом $f \in \mathbb{E}^+$*

имеет решение в $\widetilde{E}^2$. *Соответствующее однородное уравнение имеет в* $\widetilde{E}^2$ *одно, с точностью до постоянного множителя решение* $\varphi^*(t) = t + o(t)$.

Кроме того

$B^\circ.1)$ *Если выполнено условие* $\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$, *где* $\mathbb{E} = \mathbf{L}^p(1 \le p < +\infty)$ *или* $\mathbb{E} = \mathbf{C}^0$, *то среди решений уравнения (1) имеется только одно* $\varphi(t)$ *такое, что* $\varphi(t) - e^{-t}\int_0^t e^s\varphi(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$;

$B^\circ.2)$ *Если* $f \in \mathbf{M}_+$ *и* $\int_0^t f(s)\,ds \in \mathbf{M}_+$, *то любое решение уравнения (1) удовлетворяет условию*

$$\varphi(t) - e^{-t}\int_0^t e^s\varphi(s)\,ds \in \mathbf{M}_+;$$

$B^\circ.3)$ *Если* $\nu_1 < 0$ *и*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t (t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau \overset{def}{=\!=} (C_1)\int_0^{+\infty} f(s)\,ds, \quad f \in \mathbf{M}_+,$$

$$(C_1)\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbf{M}_+, \quad \int_0^t ds(C_1)\int_s^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \in \mathbf{M}_+,$$

то только одно из всех решений (1) принадлежит $\mathbf{M}_+$;

$B^\circ.4)$ *Утверждение* $B^\circ.3)$ *остается в силе и в случае, когда* $\nu_1 > 0$, $g(f) = 0$, $g \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{\mathcal{K}}^*$, $\int_t^{+\infty} f(s)\,ds \in \mathbb{E}^+$, $\int_t^{+\infty} ds \int_s^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \in \mathbb{E}^+$ *при* $\mathbb{E} = \mathbf{L}^p(1 \le p < +\infty)$ *или* $\mathbb{E} = \mathbf{C}^0$.

Поскольку имеют место следующие непрерывные вложения (см. [3], стр. 208) :

$$\widetilde{L}^p_+(\rho^m_+(\lambda)) \subset \mathbf{L}^{p,-m}_+, \quad 1 < p \le +\infty; \quad \widetilde{L}^1_+(\rho^m_+(\lambda)) \subset \mathbf{L}^{1,-(m+\varepsilon)}_+ \quad (\varepsilon > 0),$$

где $\mathbf{L}^{p,-m}_+ = \{f: \quad f(t)/(1+t)^m \in L^p_+\}$, $\quad 1 \le p \le +\infty$, то из теоремы 3 получаем

Следствие A°. Пусть выполняются условия теоремы 3 A°. Тогда любое решение $\varphi(t)$ уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\varphi(t)/(1+t)^{1+\varepsilon} \in \mathbb{E}^+, \quad \text{где} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{L}^p(1 < p \le +\infty) \text{ и } \varepsilon > 0 \quad \text{для } \mathbb{E} = \mathbf{L}^1.$$

При этом $A^\circ.1)$ Если $tf(t) \in \mathbb{E}^+$, где $\mathbb{E}^+ = \mathbf{L}^p(1 \le p < +\infty)$ и $\nu_1 < 0$, то среди решений (1) имеется только одно из $\mathbb{E}^+$;

$A^\circ.2)$ Если $f \in \bigcap_{1\le p\le+\infty} \mathbf{L}^p_+ \bigcap \mathbf{C}^0_+$, то для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (1) $\varphi(t) = O(1)$ при $t \to +\infty$.

B°. Пусть выполняются условия теоремы 3 B°. Тогда любое решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$\varphi(t)/(1+t)^{2+\varepsilon} \in \mathbb{E}^+, \quad \text{где} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{L}^p (1 < p \le +\infty) \text{ и } \varepsilon > 0 \quad \text{для } \mathbb{E} = \mathbf{L}^1.$$

При этом

$B^\circ.1)$ Если $tf(t) \in \mathbf{L}^p_+ (1 \le p < +\infty)$, то среди решений уравнения (1) имеется только одно со свойством $\varphi(t)/(1+t)^{1+\varepsilon} \in \mathbb{E}^+$;

$B^\circ.2)$ Если $f \in \bigcap_{1\le p\le+\infty} L^p_+ \bigcap \mathbf{C}^0_+$, то для любого решения $\varphi(t)$ уравнения (1) $\varphi(t) = O(t)$ при $t \to +\infty$.

§3. ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Применим полученный результат для вывода формулы вычисления общего решения уравнения

$$\varphi(t) = f(t) + \int_t^{+\infty} v(\tau - t)\, \varphi(\tau)\, d\tau, \qquad t > 0, \tag{24}$$

где $v(t) \ge 0$, если $t \ge 0$ и $v(t) = 0$, если $t < 0$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(\tau)\, d\tau = 1.$

Это уравнение применяется в теории вероятностей и носит название уравнения восстановления. В [1] уравнение (24) используется для нахождения решений уравнения (1) посредством факторизации интегрального оператора Винера-Хопфа. Там была получена формула для вычисления решения (24) при условии $f \in \mathbf{L}^1_+$. Однако, если $\mathbb{E}^+ \ne \mathbf{L}^1_+$, то указанная формула теряет силу. Выводимая нами формула пригодна при $f \in \mathbb{E}^+$ для всех $\mathbb{E}^+$.

Пусть $\alpha_1(v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, v(t)\, dt < +\infty$, и пусть $\mathcal{A}(\lambda) = 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{i\lambda t} v(-t)\, dt$ – символ уравнения (24). Тогда поскольку $\nu_1 = -\alpha_1(v) < 0$, то из (10) имеем

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - i} B_-(\lambda), \quad \text{где} \quad B_-(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i} B(\lambda).$$

Из (12) следует, что

$$\operatorname*{ind}_{-\infty\le\lambda\le+\infty} B_-(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad B_-^{\pm1} \in \mathcal{F}_-.$$

Таким образом, оператор $\overline{B}$, соответствующий символу $B_-(\lambda)$, обратим в $\mathbb{E}^+$. Применяя к обеим частям равенства $B_-(\lambda) = \dfrac{\lambda - i}{\lambda}\mathcal{A}(\lambda)$ обратное преобразование Фурье $F^{-1}\ B_-(\lambda) = \dfrac{\lambda - i}{\lambda}\mathcal{A}(\lambda)$, получим

$$b(t) = \delta(t) - v_1(-t), \qquad b(t) = (F^{-1}(B_-))(t),$$

где $\delta(t)$ – дельта–функция Дирака

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t) - \displaystyle\int_t^{+\infty} v(\tau)\,d\tau, & \text{если} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\overline{B}$ – оператор свертки с $b(t)$, то

$$\left(\overline{B}\varphi\right)(t) \equiv \varphi(t) - \int_t^{+\infty} v_1(\tau - t)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{25}$$

Будем искать $\overline{B}^{-1}$ в виде

$$\left(\overline{B}^{-1}\Psi\right)(t) \equiv \Psi(t) - \int_t^{+\infty} R(\tau - t)\,\Psi(\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Из (25) и (26) имеем

$$\left(\overline{B}\left(\overline{B}^{-1}\Psi\right)\right)(t) \equiv \Psi(t) +$$

$$+\int_t^{+\infty}\left\{R(\tau - t) - v_1(\tau - t) - \int_t^{\tau} v_1(s - t)\,R(\tau - s)\,ds\right\}\Psi(\tau)\,d\tau. \tag{27}$$

С другой стороны, $\left(\overline{B}\left(\overline{B}^{-1}\Psi\right)\right)(t) \equiv \Psi(t)$. Отсюда и из (27) для любого $\Psi \in \mathbb{E}^+$ получаем

$$\int_t^{+\infty}\left\{R(\tau - t) - v_1(\tau - t) - \int_t^{\tau} v_1(s - t)\,R(\tau - s)\,ds\right\}\Psi(\tau)\,d\tau = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $\Psi \in \mathbb{E}^+$, следует

$$R(t) = v_1(t) + \int_0^t v_1(t - \tau)\,R(\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

Таким образом, оператор $\overline{B}^{-1}$ определяется по формуле (26) и (28). Заметим, что $R(t) \in \mathrm{L}_+^1$, так как $B_-(\lambda)^{-1} \in \mathcal{F}_-$.

Пусть $(\overline{v}\varphi)(t) \equiv \displaystyle\int_t^{+\infty} v(\tau - t)\,\varphi(\tau)\,d\tau$, $\varphi \in \mathbb{E}^+$, а I – единичный оператор. Уравнение (24) в операторной форме запишется так :

$$(\mathrm{I} - \overline{v})\ \varphi = f. \tag{29}$$

Представим

$$\mathrm{I} - \overline{v} = H\,\overline{B}\,D, \tag{30}$$

где H и D – операторы Винера–Хопфа с символами $\dfrac{\lambda+i}{\lambda-i}$ и $\dfrac{\lambda}{\lambda+i}$, соответственно. С учетом (30) заменим (29) равносильной ему системой

$$\left\{\begin{array}{l} H\overline{B}\chi = f \\ D\varphi = \chi. \end{array}\right. \tag{31}$$

Первое из этих уравнений, как нетрудно видеть, нормального типа, то есть $H\overline{B}$ – Φ–оператор, причем $\mathrm{Ind}(H\overline{B}) = 1$. Следовательно, для любого $f \in \mathbb{E}^{+}$ это уравнение имеет решение в $\mathbb{E}^{+}$, а соответствующее однородное уравнение иметт ровно одно с точностью до постоянного множителя решение. Его общее решение имеет вид

$$\chi = \overline{B}^{-1} H^{-1} f + B^{-1}\eta, \tag{32}$$

где H^{-1} – правый обратный к H, а $\eta \in \mathrm{Ker} H$.

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{gathered} \chi(t) = f(t) - 2e^{-t}\int_0^t e^{\tau} f(\tau)\,d\tau + \int_0^{+\infty} R(\tau)\, f(t+\tau)\,d\tau - \\ - 2e^{-t}\int_0^{+\infty} R(t)\,d\tau \int_0^{t+\tau} e^{s-\tau} f(s)\,ds + c\overline{B}^{-1}\left(e^{-t}\right), \end{gathered} \tag{33}$$

где ce^{-t} – общее решение уравнения $H\varphi = 0$, c – произвольная постоянная. Для решения второго из уравнений (31) продолжим D на $\widetilde{E}(\rho_{+}(\lambda)) = \widetilde{E}^{1}$. Тогда в силу определения $\widetilde{E}^{1}$, оператор $\widetilde{D}\colon \widetilde{E}^{1} \to \mathbb{E}^{+}$ будет изометрическим изоморфизмом, причем

$$\left(D^{-1}\Psi\right)(t) \equiv \Psi(t) + \int_0^t \Psi(\tau)\,d\tau, \qquad \Psi \in \mathbb{E}^{+}.$$

Следовательно

$$\varphi(t) = \left(D^{-1}\chi\right)(t) = \chi(t) = \int_0^t \chi(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда и из (33), после некоторых элементарных преобразований, получим окончательно формулу для вычисления общего решения уравнения (24) :

$$\varphi(t) = \alpha + g(t) + \int_0^t g(\tau)\,d\tau + \int_0^{+\infty} R(\tau)\, g(t+\tau)\,d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} R(s)\, g(\tau+s)\,ds,$$

где α – произвольная постоянная, а

$$g(t) = f(t) - 2e^{-t} \int_0^t e^{\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Автор выражает свою благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за постановку задач, а также Л. Г. Арабаджяну за сделанные им полезные замечания.

ABSTRACT. The paper studies Wiener—Hopf integral equation with nonnegative kernel $K \in L^1(\mathbb{R})$. On the basis of the connection between the first and second order moments of the kernel K and properties of the equation symbol some results concerning the equation are obtained. At the end of the paper a formula for general solution of the renewal equation is derived.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения" Мат. анализ, Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР, стр. 175 — 244, М., 1984.
2. Л. Г. Арабаджян "О факторизации консервативных интегральных операторов Винера–Хопфа", Мат. заметки, т. 46, стр. 3 — 10, М. 1989.
3. З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, Мир, М., 1979.
4. F. Spizer, "The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density," Parts I and II, Duke Math. J., vol. 24, pp. 327 — 343, 1957 ; vol. 27, pp. 363 — 372, 1960.
5. М. И. Хайкин, "Об одном уравнении Винера–Хопфа с положительным ядром", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 17, № 1, стр. 56 — 63, 1982.
6. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 17, № 4, стр. 307 — 327 и т. 17, № 5, стр. 335 — 375, 1982.

7 декабря 1995

Бюраканская астрофизическая обсерватория,
НАН Армении