О СХОДИМОСТИ И ЯВЛЕНИИ ГИББСА РЯДОВ ФРАНКЛИНА

О. Г. Саргсян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 1, 1996

В статье содержатся теоремы о сходимости и равномерной сходимости в точке для простого ряда Франклина, а также о λ-сходимости и равномерной λ-сходимости в точке для двойных рядов Франклина. Результаты применяются для изучения явления Гиббса системы Франклина.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – система Франклина (см. [1]) и

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(f)f_n(t) \tag{1}$$

– ряд Фурье–Франклина интегрируемой на $[0,1]$ функции $f(t)$.

В работе [2] Чисельским была доказана следующая теоерма.

Теорема А. *Пусть $f(t) \in L_1([0,1])$ и точка $t_0 \in [0,1]$ такая, что*

$$f(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(t)\, dt.$$

Тогда ряд (1) сходится к $f(t_0)$.

В настоящей работе обобщается теорема А на однократные и двойные ряды Франклина.

§2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $g(t)$ и $g(t,s)$ – функции, интегрируемые по Риману, соответственно, на отрезке $[0,1]$ и на квадрате $[0,1]^2$. Положим

$$\overline{D}g(t_0) = \overline{\lim_{t\to t_0}} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}, \quad \underline{D}g(t_0) = \underline{\lim_{t\to t_0}} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0},$$

$$\Delta_{h_1,h_2}g(t,s) = g(t+h_1, s+h_2) - g(t+h_1, s) - g(t, s+h_2) + g(t,s),$$

$$\overline{D}g(t,s) = \varlimsup_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\Delta_{h_1,h_2}g(t,s)}{h_1h_2}, \quad \underline{D}g(t,s) = \varliminf_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\Delta_{h_1,h_2}g(t,s)}{h_1h_2},$$

$$\delta g(t_0) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t_0) - \underline{D}g(t_0)\right], \quad Dg(t_0) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t_0) + \underline{D}g(t_0)\right],$$

$$\delta g(t,s) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t,s) - \underline{D}g(t,s)\right], \quad Dg(t,s) = \frac{1}{2}\left[\overline{D}g(t,s) + \underline{D}g(t,s)\right],$$

$$S_n(t) = \int_0^1 K_n(t,s)\,dg(s), \quad S_{n,m}(x,y) = \int_0^1\int_0^1 K_n(t,x)K_m(s,y)\,dg(t,s),$$

где $K_n(t,s)$ – ядра Дирихле для системы Франклина.

Определение 1. (см. [3], т. 1, стр. 100). Если существует предел

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to t_0}} S_n(t),$$

то скажем, что последовательность $S_n(t)$ *равномерно сходится* в точке t_0 к пределу S.

Определение 2. (см. [3], т. 2, стр. 465). Если для любого $\lambda \geq 1$ существует предел

$$S = \lim_{(n,m)\to\infty} S_{n,m}, \quad \frac{1}{\lambda} \leq \frac{n}{m} \leq \lambda,$$

то скажем, что последовательность $S_{n,m}$ *λ-сходится (или ограниченно сходится)* к S.

Определение 3. Если для любого $\lambda \geq 1$ существует предел

$$S = \lim_{\substack{(n,m)\to\infty\\ (x,y)\to(x_0,y_0)}} S_{n,m}(x,y), \quad \frac{1}{\lambda} \leq \frac{n}{m} \leq \lambda,$$

то скажем, что последовательность $S_{n,m}$ *λ-сходится* к S в точке (x_0, y_0).

Определение 4. (см. [4]). Пусть t_0 – точка разрыва первого рода функции $q(t) \in L(0,1)$, причем $|q(t_0+0) - q(t_0-0)| = 2d$, и пусть последовательность функций $\{q_n(t)\}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окрестности точки t_0. Функцию

$$G(t_0, q, \{q_n\}) = G(t_0) = \varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ n\to\infty}} \frac{1}{d}\left|q_n(t) - \frac{q(t_0+0)+q(t_0-0)}{2}\right|$$

назовем *функцией Гиббса* для последовательности $\{q_n\}$. Если $G(t_0) > 1$, то скажем, что для последовательности $\{q_n\}$ в точке t_0 имеет место *явление Гиббса*.

Хорошо известно (см. [5], стр. 123 – 126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса : функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна *постоянной Гиббса*

$$G(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.7.$$

Для частичных сумм ряда Фурье–Уолша наличие явления Гиббса установлено в работе [6]. Для частичных сумм ряда Фурье–Уолша функция $G(x_0)$ не является постоянной. В работе [4] найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции.

В этой работе исследуется явление Гиббса для рядов Фурье –Франклина.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть функция $g(t)$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$.*

1) Если имеют место неравенства $-\infty < \underline{D}g(t_0) \le \overline{D}g(t_0) < \infty$ в точке $t_0 \in [0,1]$, то

$$-M\delta g(t_0) + Dg(t_0) \le \varliminf_{n\to\infty} S_n(t_0) \le \varlimsup_{n\to\infty} S_n(t_0) \le M\delta g(t_0) + Dg(t_0),$$

где M – абсолютная постоянная.

2) Если в некоторой окрестности точки t_0 функция g представляется в виде

$$g(t) = g(t_0) + \int_{t_0}^{t} \chi(\tau)\,d\tau,$$

где $\chi(\tau)$ непрерывна в точке t_0, то последовательность $S_n(t)$ равномерно сходится к $g'(t_0)$ в точке t_0.

Замечание 1. Из одной теоремы, независимо доказанной Ф. Г. Арутюняном [7] и Н. Б. Погосяном [8], следует, что для любой измеримой и конечной п.в. на $[0,1]$ функции $g(t)$ существует ряд Франклина $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$, сходящийся к $g(t)$ п.в. на $(0,1)$.

Тот же результат следует из пункта 1) теоремы 1. Действительно, из теоремы Лузина [9] следует, что что для любой измеримой и конечной п.в. на $[0,1]$ функции $g(t)$ существует непрерывная функция $F(t)$ такая, что $F'(t) = g(t)$ для почти всех $t \in (0,1)$. Следовательно, из теоремы 1 вытекает, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t), \quad \text{где} \quad a_n = \int_0^1 f_n(t)\,dF(t),$$

сходится к $g(t)$ п.в. на $(0,1)$. Отметим, что Г. Г. Геворкян [10] доказал возможность представления п.в. конечных измеримых функций абсолютно сходящимися рядами Франклина.

Теорема 2. *Пусть $g(x,y)$, $g(x_0,y), g(x,y_0), g(0,y), g(1,y), g(x,1), g(x,0)$ – интегрируемые функции по Риману, соответственно, на отрезке $[0,1]^2$ и на отрезке $[0,1]$.*

1) Если имеют место неравенства $-\infty < \underline{D}g(x_0,y_0) \le \overline{D}g(x_0,y_0) < \infty$ в точке (x_0,y_0), то для любого $\lambda \ge 1$ имеем

$$-M^2\delta g(x_0,y_0) + Dg(x_0,y_0) \le \varliminf_{(n,m)\to\infty} S_{n,m}(x_0,y_0) \le \varlimsup_{(n,m)\to\infty} S_{n,m}(x_0,y_0) \le$$

$$\le M^2\delta g(x_0,y_0) + Dg(x_0,y_0), \quad \frac{1}{\lambda} \le \frac{n}{m} \le \lambda.$$

2) Если существует предел

$$Dg(x_0,y_0) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x_1,y_1)\to(x_0,y_0)}} \frac{g(x,y)-g(x_1,y)-g(x,y_1)+g(x_1,y_1)}{(x-x_1)(y-y_1)},$$

то последовательность $S_{n,m}(x,y)$ равномерно λ-сходится к $Dg(x_0,y_0)$ в точке (x_0,y_0).

Теорема 3. *Пусть t_0 является точкой разрыва первого рода функции $f(t)$ и $q_n(t) = S_n(f,t)$ (см. определение 4), где $S_n(f,t)$ – частичная сумма ряда Фурье–Франклина функции $f(t)$, и $G(t_0) = G(t_0, f, \{S_n(f)\})$ – функция Гиббса. Тогда в каждой точке $t_0 \in (0,1)$*

$$1 + \frac{\sqrt{3}-1}{3} \le G(t_0) \le 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})},$$

причем почти всюду

$$G(t_0) = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})}.$$

§4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu \ge 0$, $1 \le \nu \le 2^\mu$, и пусть π_n – разбиение отрезка $[0,1]$ на n отрезков точками

$$t_i = \begin{cases} \frac{i}{2^{\mu+1}} & \text{для } 0 \le i \le 2\nu, \\ \frac{i-\nu}{2^\mu} & \text{для } 2\nu < i \le n. \end{cases}$$

Положим $\Delta_i^{(n)} = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Замечание 2. Если функция $g(t)$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$, то для любой функции $f_n(t)$ системы Франклина интеграл Стилтьеса $\int_0^1 f_n(t)\,dg(t)$ существует.

Доказательство. Функция $f_n(t)$ линейна на отрезках $\Delta_j^{(n)}$, $j=1,\dots,n$, следовательно, на каждом отрезке $\Delta_j^{(n)}$ существует интеграл Стилтьеса функции $g(t)$ по функции $f_n(t)$. Из непрерывности функции $f_n(t)$ следует, что существует интеграл Стилтьеса функции $g(t)$ по функции $f_n(t)$ на отрезке $[0,1]$. Но, как известно, из существования интеграла $\int_0^1 g(t)\,df_n(t)$ следует существование интеграла $\int_0^1 f_n(t)\,dg(t)$.

Пусть $g(x,y)$ и $f(x,y)$ – две ограниченные функции на квадрате $[0,1]^2$, и пусть (T_1,T_2) – разбиение квадрата $[0,1]^2$ точками $0=x_0<x_1<\dots<x_m=1$, $0=y_0<y_1<\dots<y_n=1$. Величину

$$\sigma=\sigma(f,g)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta_{h_1^i,h_2^j}g(x_{i-1},y_{i-1}), \tag{2}$$

где $h_1^i=x_i-x_{i-1}$, $h_2^j=y_j-y_{j-1}$, назовем *интегральной суммой*. Пусть $\lambda(T_k)=\max_i h_k^i$, $k=1,2$.

Определение 5. Если существует предел

$$\lim_{\lambda(T_1)\to0,\ \lambda(T_2)\to0}\sigma=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dg(x,y)$$

интегральных сумм (2), то его назовем *интегралом функции f по функции g*. Несмотря на то, что мы используем стандартное интегрирование Стилтьеса, наше определение интеграла носит более общий характер, чем классическое определение инеграла Стилтьеса.

Замечание 3. Если функции $g(x,y)$, $g(0,y)$, $g(1,y)$, $g(x,1)$, $g(x,0)$ интегрируемы по Риману, соответственно, на квадрате $[0,1]^2$ и на отрезке $[0,1]$, то интеграл

$$\int_0^1\int_0^1 f_p(t)f_q(s)\,dg(t,s) \tag{3}$$

существует.

Доказательство. Для любых последовательностей $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$, $\{c_j\}$ имеет место тождество

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_jb_i(a_{ij}+a_{i-1,j-1}-a_{i,j-1}-a_{i-1,j})=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}a_{ij}(b_{i+1}-b_i)(c_{j+1}-c_j)+$$

$$+c_0\sum_{i=0}^{m-1}a_{i0}(b_{i+1}-b_i)+b_0\sum_{j=0}^{n-1}a_{0j}(c_{j+1}-c_j)-b_m\sum_{j=0}^{n-1}a_{mj}(c_{j+1}-c_j)-$$

$$-c_n\sum_{i=0}^{m-1}a_{in}(b_{i+1}-b_i)+c_0b_0a_{00}+c_nb_ma_{mn}-c_nb_0a_{0n}-c_0b_ma_{m0}. \qquad (4)$$

Так как функции системы Франклина непрерывны и имеют ограниченную вариацию, то без ограничения общности можем предполагать, что точки разбиений π_p и π_q, соответственно, являются точками разбиений T_1 и T_2. Применив преобразование (4) к интегральной сумме (2) с $a_{ij}=g(x_i,y_j)$, $b_i=f_p(x_i)$, $c_j=f_q(y_j)$, получим интегральные суммы интегралов

$$\int_{\Delta_{i_1}^{(p)}}\int_{\Delta_{i_2}^{(q)}}g(t,s)\,d(f_pf_q)(t,s),\quad \int_0^1 g(t,z)f_q(z)\,df_p(t),\quad \int_0^1 g(z,s)f_p(z)\,df_q(s),\ (5)$$

$z=0,1$, и сумму

$$-f_p(0)f_q(1)g(0,1)+f_p(0)f_q(0)g(0,0)-f_p(1)f_q(0)g(1,0)+f_p(1)f_q(1)g(1,1).$$

Из интегрируемости функции $g(t,s)$ по Риману и линейности функций $f_p(t)$ и $f_q(s)$ на отрезках $\Delta_{i_1}^{(p)}$ и $\Delta_{i_2}^{(q)}$, соответственно, а также из замечания 2 следует, что эти интегральные суммы имеют пределы при $\lambda(T_1),\lambda(T_2)\to 0$. Из существования интегралов (5) следует существование интеграла (3).

Следующие утверждения доказаны в работе [2].

Лемма 1. *([2], стр. 296) Пусть n и i такие, что $n=2^m+k$, $1\le k\le 2^m$, $0\le i\le n$. Тогда*

$$\begin{cases} 2a_{0i}+a_{1i}=\frac{6}{\delta}\delta_{0i}, \\ a_{j-1,i}+4a_{ji}+a_{j+1,i}=\frac{6}{\delta}\delta_{ji}, \quad j=1,...,2k-1, \\ \frac{1}{2}a_{2k-1,i}+3a_{2k,i}+a_{2k+1,i}=\frac{3}{\delta}\delta_{2k,i}, \\ a_{j-1,i}+4a_{ji}+a_{j+1,i}=\frac{3}{\delta}\delta_{ji}, \quad j=2k+1,...,n-1, \\ a_{n-1,i}+2a_{ni}=\frac{3}{\delta}\delta_{ni}, \end{cases}$$

где

$$a_{ij}=K_n(t_i,t_j),\quad \delta=2^{-m-1},\quad \delta_{ji}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\ne j.\end{cases}$$

Положим $\alpha=\log(2+\sqrt{3})$.

Теорема B. *([2], стр. 298) Если $n=2^m+k$, $1\le k\le 2^m$, $m\ge 0$, то*

$$a_{ij}=\sqrt{3}\,2^{m+1}\gamma_n(-1)^{i+j}\varepsilon_{ij},$$

где

$$\gamma_n^{-1} = \sinh \alpha n + \sinh \alpha(n-2k)\cosh \alpha 2k,$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 2\cosh\alpha\min(i,j)[\cosh\alpha\min(n-i,n-j)+ & \\ +\sinh\alpha(n-2k)\sinh\alpha\min(2k-i,2k-j)] & \text{для } i,j \le 2k-1, \\ \cosh\alpha\min(n-i,n-j)[\cosh\alpha\min(i,j)+ & \\ +\cosh\alpha 2k\cosh\alpha\min(i-2k,j-2k)] & \text{для } \quad i,j \ge 2k, \\ 2\cosh\alpha\min(i,j)\cosh\alpha\min(n-i,n-j) & \\ \text{для } i,j \text{ таких, что} \quad \min(i,j) \le 2k-1 < & \max(i,j). \end{cases}$$

Лемма 2. *([2], стр. 301) Пусть $n \ge 2$, $n = 2^m + k$, $1 \le k \le 2^m$. Тогда*

$$|K_n(t,s)| \le Cne^{-\alpha n|t-s|/2} \tag{6}$$

для любых $t, s \in [0,1]$.

Здесь и в дальнейшем через C мы обозначаем абсолютные постоянные (не обязательно одинаковые в различных случаях).

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. Из замечания 2 следует, что интеграл

$$I = \int_0^1 K_n(t,t_0)\, d\psi_{t_0}(t) \tag{7}$$

существует, где $\psi_{t_0}(t) = g(t) - g(t_0) - Dg(t_0)(t - t_0)$. Поэтому $I = S_n(t_0) - Dg(t_0)$. Оценим интеграл (7). Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\underline{D}g(t_0) - \varepsilon \le \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \le \overline{D}g(t_0) + \varepsilon \tag{8}$$

при $|t - t_0| < \delta$. Поскольку функции системы Франклина непрерывны, то интеграл (7) можно представить в виде

$$I = I_1(t_0) + I_2(t_0) + I_3(t_0) + I_4(t_0), \tag{9}$$

$$I_1(t) = \int_{t_0+\delta}^1 K_n(\tau,t)\, d\psi_{t_0}(\tau), \quad I_2(t) = \int_0^{t_0-\delta} K_n(\tau,t)\, d\psi_{t_0}(\tau),$$

$$I_3(t) = \int_{t_0}^{t_0+\delta} K_n(\tau,t)\, d\psi_{t_0}(\tau), \quad I_4(t) = \int_{t_0-\delta}^{t_0} K_n(\tau,t)\, d\psi_{t_0}(\tau).$$

Имеем

$$I_1(t_0) = \psi_{t_0}(1)K_n(1,t_0) - \psi_{t_0}(t_0+\delta)K_n(t_0+\delta,t_0) - \int_{t_0+\delta}^1 \psi_{t_0}(t)\, dK_n(t,t_0). \tag{10}$$

Так как для функции ψ_{t_0} имеем, что $\psi_{t_0}(t_0) = 0$ и $|\psi_{t_0}(t)| \le B(t_0, g)$ для $t \in [0,1]$, где $B(t_0, g)$ – постоянная, зависящая только от t_0 и g, то

$$\left|\int_{t_0+\delta}^{1} \psi_{t_0}(t)\, dK_n(t, t_0)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} K_n'(t, t_0)\Big|_{t=(t_i+t_{i-1})/2} \int_{[t_0+\delta,1]\cap\Delta_i^{(n)}} \psi_{t_0}(t)\, dt\right| \le$$

$$\le 2B(t_0, g)\left(\sum_{i:[t_0+\delta,1]\cap\Delta_i^{(n)}\neq\emptyset} |K_n(t_i, t_0)| + |K_n(t_0+\delta, t_0)|\right). \tag{11}$$

Используя (6), из (10) и (11) получим

$$|I_1(t_0)| \le C\, B(t_0, g) n^2 e^{-\alpha n\delta/2}. \tag{12}$$

Аналогично

$$|I_2(t_0)| \le C\, B(t_0, g) n^2 e^{-\alpha n\delta/2}. \tag{13}$$

Для I_3 имеем

$$I_3(t_0) = \psi_{t_0}(t_0+\delta) K_n(t_0+\delta, t_0) - \int_{t_0}^{t_0+\delta} \psi_{t_0}(t)\, dK_n(t, t_0) =$$

$$= \psi_{t_0}(t_0+\delta) K_n(t_0+\delta, t_0) - \lim_{\max\limits_i(\tau_i - \tau_{i-1}) \to 0} \sum_{i=0}^{m-1} \psi_{t_0}(\tau_i)[K_n(\tau_{i+1}, t_0) - K_n(\tau_i, t_0)]. \tag{14}$$

Из (8) имеем

$$|\psi_{t_0}(\tau_i)| \le (\delta g(t_0) + \varepsilon)(\tau_i - t_0), \quad i = 0, 1, \ldots, m.$$

Следовательно

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1} \psi_{t_0}(\tau_i)[K_n(\tau_{i+1}, t_0) - K_n(\tau_i, t_0)]\right| \le (\delta g(t_0) + \varepsilon) \sum_{i=0}^{m-1} (\tau_i - t_0)(S_i - S_{i+1}) =$$

$$= (\delta g(t_0) + \varepsilon)\left(\sum_{i=0}^{m-2} (\tau_{i+1} - \tau_i) S_{i+1}\right), \tag{15}$$

где

$$S_i = \sum_{k=i}^{m-1} |K_n(\tau_{k+1}, t_0) - K_n(\tau_k, t_0)|, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \quad S_m = 0.$$

Используя оценки (см. [2], стр. 301)

$$\int_t^1 \operatorname*{var}_{s \le u \le 1} K_n(t, u)\, ds \le M, \quad \int_0^t \operatorname*{var}_{0 \le u \le s} K_n(t, u)\, ds \le M,$$

для любого $n \geq 0$ и $t \in [0,1]$ получим

$$\left|\sum_{i=0}^{m-2}(\tau_{i+1}-\tau_i)S_{i+1}\right| \leq \int_{t_0}^{1} \underset{s \leq u \leq 1}{\mathrm{var}} K_n(u,t_0)\,ds \leq M. \tag{16}$$

Из (6) и (14) – (16) следует, что

$$|I_3(t_0)| \leq M(\delta g(t_0)+\varepsilon) + C\,B(t_0,g)n^2e^{-\alpha n\delta/2}. \tag{17}$$

Аналогично для I_4 получим оценку (17). Согласно (9), (12), (13)

$$|S_n(t_0) - Dg(t_0)| \leq M(\delta g(t_0)+\varepsilon) + o(1),$$

а так как ε – произвольное положительное число, то пункт 1) теоремы 1 доказан.

Перейдем к доказательству пункта 2). Так как функция $\chi(t)$ непрерывна в точке t_0, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\chi(t)-\chi(t_0)| < \varepsilon, \quad \text{при } |t-t_0| < \delta. \tag{18}$$

Аналогично при $|t-t_0| < \delta/2$ получим оценки

$$|I_1(t)| \leq C\,B(t_0,g)n^2e^{-\alpha n\delta/4}, \quad |I_2(t)| \leq C\,B(t_0,g)n^2e^{-\alpha n\delta/4}. \tag{19}$$

Оценим интеграл I_3. Из замечания 2 имеем

$$I_3(t) = \lim_{\max\limits_i(\tau_i-\tau_{i-1})\to 0} \sum_{i=0}^{m-1} K_n(\tau_i,t)[\psi_{t_0}(\tau_{i+1})-\psi_{t_0}(\tau_i)], \tag{20}$$

а из (18) следует, что

$$|\psi_{t_0}(\tau_{i+1})-\psi_{t_0}(\tau_i)| \leq \varepsilon(\tau_{i+1}-\tau_i).$$

Но ак как функции Лебега для системы Франклина равномерно ограничены (см. [1], стр. 229), т.е.

$$\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K_n(t,s)|\,ds \leq C, \quad n = 1,2,..., \tag{21}$$

то из (20) следует, что

$$|I_3(t)| \leq \varepsilon \lim_{\max\limits_i(\tau_i-\tau_{i-1})\to 0} \sum_{i=0}^{m-1} |K_n(\tau_i,t)|(\tau_{i+1}-\tau_i) \leq$$

$$\leq \varepsilon \sup_{\substack{x\in[0,1]\\ n\in N}} \int_0^1 |K_n(\tau, x)|\, d\tau \leq \varepsilon C. \tag{22}$$

Аналогично получим $|I_4(t)| \leq \varepsilon C$, при $|t - t_0| < \delta/2$. Таким образом, из оценок (19) и (22) получим

$$|S_n(t) - \chi(t_0)| \leq \varepsilon C + o(1) \quad \text{при } |t - t_0| < \delta/2,$$

где $o(1)$ сходится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $t \in (t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2)$. Этим завершается доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$\psi_{x_0y_0}(t,s) = g(t,s) - g(x_0,y_0) - Dg(x_0,y_0)(t-x_0)(s-y_0).$$

Поскольку функции системы Франклина непрерывны и имеют ограниченные вариации, то из замечний 2 и 3 следует

$$S_{n,m}(x_0,y_0) - Dg(x_0,y_0) = \int_0^1\int_0^1 K_{n,m}(x_0,y_0,t,s)\, d\psi_{x_0y_0}(t,s) =$$

$$= J_1(x_0,y_0) + J_2(x_0,y_0) + J_3(x_0,y_0) + J_4(x_0,y_0), \tag{23}$$

где

$$K_{n,m}(x,y,t,s) = K_n(t,x)K_m(s,y),$$

$$J_1(x,y) = \int_{x_0}^1\int_{y_0}^1 K_{n,m}(x,y,t,s)\, d\psi_{x_0y_0}(t,s),$$

$$J_2(x,y) = \int_0^{x_0}\int_{y_0}^1 K_{n,m}(x,y,t,s)\, d\psi_{x_0y_0}(t,s),$$

$$J_3(x,y) = \int_{x_0}^1\int_0^{y_0} K_{n,m}(x,y,t,s)\, d\psi_{x_0y_0}(t,s),$$

$$J_4(x,y) = \int_0^{x_0}\int_0^{y_0} K_{n,m}(x,y,t,s)\, d\psi_{x_0y_0}(t,s).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\max(|h_1|,|h_2|) < \delta$

$$\underline{D}g(x_0,y_0) - \varepsilon \leq \frac{\Delta_{h_1,h_2}g(x_0,y_0)}{h_1h_2} \leq \overline{D}g(x_0,y_0) + \varepsilon. \tag{24}$$

Из замечания 3 имеем

$$J_1(x_0,y_0) = \lim_{\substack{\lambda(T_1)\to 0\\ \lambda(T_2)\to 0}} \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k K_{n,m}(x_0,y_0,\tau_i,s_j)\times$$

$$\times\left[\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j)+\psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_{j-1})-\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_{j-1})-\psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_j)\right], \tag{25}$$

где (T_1,T_2) – разбиение квадрата $[0,1]^2$ точками $x_0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_k=1$, $y_0=s_0<s_1<\cdots<s_k=1$. Без ограничения общности можем предполагать, что $(x_0+\delta,y_0+\delta)$ – также точка разбиения, т.е. существуют i_0 и j_0 такие, что $x_0+\delta=\tau_{i_0}$, $y_0+\delta=s_{j_0}$. Интегральную сумму в (25) разобьем на интегральные суммы по прямоугольникам $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0+\delta,1]$, $[x_0+\delta,1]\times[y_0,y_0+\delta]$, $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0,y_0+\delta]$, $[x_0+\delta,1]\times[y_0+\delta,1]$. Положим $a_{ij}=\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j)$, $c_i=K_n(\tau_i,x_0)$, $b_j=K_m(s_j,y_0)$ и применим преобразование (4) к интегральной сумме по праямоугольнику $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0+\delta,1]$. Получим

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=j_0+1}^{k}C_{ij}=\sum_{i=0}^{i_0-1}\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{ij}(b_{j+1}-b_j)(c_{i+1}-c_i)+c_0\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{0j}(b_{j+1}-b_j)+$$

$$+b_{j_0}\sum_{i=0}^{i_0-1}a_{ij_0}(c_{i+1}-c_i)-b_k\sum_{i=0}^{i_0-1}a_{ik}(c_{i+1}-c_i)-c_{i_0}\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{i_0j}(b_{j+1}-b_j)+$$

$$+c_0b_{j_0}a_{0j_0}+c_{i_0}b_ka_{i_0k}-c_{i_0}b_{j_0}a_{i_0j_0}-c_0b_ka_{0k}, \tag{26}$$

$$C_{ij}=c_ib_j(a_{ij}+a_{i-1,j-1}-a_{i,j-1}-a_{i-1,j}).$$

Для $(t,s)\in[0,1]^2$ имеем $|\psi_{x_0y_0}(t,s)|\le B(g,x_0,y_0)$. Следовательно

$$A\equiv\left|\sum_{i=0}^{i_0-1}\sum_{j=j_0}^{k-1}a_{ij}(b_{j+1}-b_j)(c_{i+1}-c_i)\right|\le$$

$$\le C\,B(g,x_0,y_0)\underset{t\in[x_0,x_0+\delta]}{\operatorname{var}}K_n(t,x_0)\underset{s\in[y_0+\delta,1]}{\operatorname{var}}K_m(s,y_0).$$

Используя оценку (6) и линейность $K_n(t,x_0)$ и $K_m(s,y_0)$ на $\Delta_i^{(n)}$ и $\Delta_j^{(m)}$, получим

$$A\le C\,B(g,x_0,y_0)m^2ne^{-\alpha m\delta/2}.$$

Оценивая аналогично остальные суммы правой части равенства (26), получим

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=j_0+1}^{k}C_{ij}\right|\le C\,B(g,x_0,y_0)[m^2ne^{-\alpha m\delta/2}+n^2me^{-\alpha n\delta/2}]. \tag{27}$$

Аналогично получим оценку (27) для интегральных сумм по прямоугольникам $[x_0+\delta,1]\times[y_0,y_0+\delta]$ и $[x_0+\delta,1]\times[y_0+\delta,1]$. Теперь докажем оценку для интегральных сумм по прямоугольнику $[x_0,x_0+\delta]\times[y_0,y_0+\delta]$. Положим

$$A_{ij}=\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j)+\psi_{x_0y_0}(\tau_0,s_0)-\psi_{x_0y_0}(\tau_0,s_j)-\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_0),$$

$i = 0, 1, ..., i_0 + 1, \quad j = 0, 1, ..., j_0 + 1$. Так как

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} C_{ij} = \sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} c_i b_j (A_{ij} + A_{i-1,j-1} - A_{i,j-1} - A_{i-1,j}),$$

то применяя преобразование (4), полуим

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} C_{ij} = \sum_{i=0}^{i_0-1}\sum_{j=0}^{j_0-1} A_{ij}(b_{j+1} - b_j)(c_{i+1} - c_i) - c_{i_0}\sum_{j=0}^{j_0-1} A_{i_0 j}(b_{j+1} - b_j) -$$

$$-b_{j_0}\sum_{i=0}^{i_0-1} A_{ij_0}(c_{i+1} - c_i) - A_{i_0 j_0} b_{j_0} c_{i_0}. \tag{28}$$

Из (24) следует, что

$$|A_{ij}| \le (\delta g(x_0, y_0) + \varepsilon)(\tau_i - x_0)(s_j - y_0).$$

Используя оценку (6) и аналогично (15) и (16) оценивая правую часть равенства (28), получим

$$\left|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} C_{ij}\right| \le M^2(\delta g(x_0, y_0) + \varepsilon) + C\ B(g, x_0, y_0)[m^2 n e^{-\alpha m\delta/2} + n^2 m e^{-\alpha n\delta/2}].$$

Следовательно (см. (25) и (27))

$$|J_1(x_0, y_0)| \le M^2(\delta g(x_0, y_0) + \varepsilon) + C\ B(g, x_0, y_0)[m^2 n e^{-\alpha m\delta/2} + n^2 m e^{-\alpha n\delta/2}]. \tag{29}$$

Для J_i, $i = 2, 3, 4$, можем получить ту же оценку (29). Из (23) и (29) следует, что

$$|S_{n,m}(x_0, y_0) - Dg(x_0, y_0)| \le M^2(\delta g(x_0, y_0) + \varepsilon) + o(1),$$

где $o(1)$ сходится к нулю для каждого $\mu \ge 1$ при $n \to \infty$, $m \to \infty$ и $1/\mu \le n/m \le \mu$. Таким образом, пункт 1) теоремы 2 доказан.

Что касается пункта 2), то заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{g(x, y) - g(x_1, y) - g(x, y_1) + g(x_1, y_1)}{(x - x_1)(y - y_1)} - Dg(x_0, y_0)\right| < \varepsilon, \tag{30}$$

при $|x - x_0| < \delta$, $|x_1 - x_0| < \delta$, $|y_1 - y_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$. Принимая во внимание непрерывность и ограниченность вариаций функций ситемы Франклина, а также замечания 2 и 3, имеем

$$S_{n,m}(x, y) - Dg(x_0, y_0) = \int_0^1\int_0^1 K_{n,m}(x, y, t, s)\, d\psi_{x_0 y_0}(t, s) =$$

$$= J_1(x,y) + J_2(x,y) + J_3(x,y) + J_4(x,y). \tag{31}$$

Оценим интеграл J_1 при $|x - x_0| < \delta/2$ и $|y - y_0| < \delta/2$. Из замечния 3 имеем

$$J_1(x,y) = \lim_{\substack{\lambda(T_1)\to 0\\ \lambda(T_2)\to 0}} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} K_{n,m}(x,y,\tau_i,s_j)\times$$

$$\times\left[\psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_j) + \psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_{j-1}) - \psi_{x_0y_0}(\tau_i,s_{j-1}) - \psi_{x_0y_0}(\tau_{i-1},s_j)\right], \tag{32}$$

где (T_1,T_2) – разбиение квадрата $[0,1]^2$ точками $x_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k = 1$, $y_0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k = 1$. Без ограничения общности можем предполагать, что $(x_0+\delta, y_0+\delta)$ тоже является точкой разбиения, т.е сдуществуют i_0 и j_0 такие, что $x_0 + \delta = \tau_{i_0}$, $y_0 + \delta = s_{j_0}$. Интегральную сумму в (32) разобьем на интегральные суммы по прчямоугольникам $[x_0, x_0 + \delta] \times [y_0 + \delta, 1]$, $[x_0 + \delta, 1] \times [y_0, y_0 + \delta]$, $7[x_0, x_0+\delta]\times[y_0, y_0+\delta]$, $[x_0+\delta, 1]\times[y_0+\delta, 1]$. Положим $c_i = K_n(\tau_i, x)$, $b_j = K_m(s_j, y)$ и оценим интегральную сумму по квадрату $Q = [x_0, x_0 + \delta] \times [y_0, y_0 + \delta]$. Из (30)

$$|a_{ij} + a_{i-1,j-1} - a_{i,j-1} - a_{i-1,j}| \le \varepsilon(\tau_i - \tau_{i-1})(s_j - s_{j-1}),$$

$i = 1, ..., i_0+1, \quad j = 1, ..., j_0+1$. Поэтому, для интегральной суммы по Q получим

$$K \equiv \overline{\lim_{\substack{\lambda(T_1)\to 0\\ \lambda(T_2)\to 0}}} \left|\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} C_{ij}\right| \le \varepsilon C \int_0^1 |K_n(t,x)|\,dt \int_0^1 |K_m(t,y)|\,dt.$$

Используя (21), можем написать

$$K \le \varepsilon C. \tag{33}$$

Применяя доказательство пункта 1) для модулей интегральных сумм по квадратам $[x_0, x_0+\delta]\times[y_0+\delta, 1]$, $[x_0+\delta, 1]\times[y_0, y_0+\delta]$ и $[x_0+\delta, 1]\times[y_0+\delta, 1]$, получим верхнюю оценку (27). Но из этих оценок и (32), (33) следует, что

$$|J_1(x,y)| \le \varepsilon C + C\, B(g, x_0, y_0)[m^2 n e^{-\alpha m\delta/4} + n^2 m e^{-\alpha n\delta/4}]. \tag{34}$$

Аналогично можно получить оценку (34) для $J_i(x,y)$, $i = 2,3,4$, $|x - x_0| < \delta/2$, $|y - y_0| < \delta/2$. Из (31) и (34) следует, что

$$|S_{n,m}(x,y) - Dg(x_0,y_0)| \le \varepsilon C + o(1),$$

где $o(1)$ равномерно по $(x,y) \in (x_0-\delta/2, x_0+\delta/2)\times(y_0-\delta/2, y_0+\delta/2)$ сходится к нулю для любого $\mu \geq 1$, при $n\to\infty$, $m\to\infty$ и $1/\mu \leq n/m \leq \mu$. Теорема 2 доказана.

Для двоично-иррациональных точек $x_0\in[0,1]$ обозначим через E_{x_0} предельные точки последовательности $S_n = \langle 2^n x_0\rangle$, где $\langle t\rangle$ – дробная часть числа t, а для двоично-рациональных точек $x_0\in[0,1]$ Положим $E_{x_0}=\{0,1\}$. Обозначим

$$a_{ij} = K_n(t_i,t_j), \quad R_n(t) = \int_0^{x_0} K_n(t,s)\,ds,$$

$$\overline{a}(x_0) = \overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to x_0}}} R_n(t), \quad \underline{a}(x_0) = \underline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ t\to x_0}}} R_n(t).$$

Полуинтервалы $I_m^{(k)} \equiv \left[\frac{m}{2^k},\frac{m+1}{2^k}\right)$ будем называть *двоичными интервалами ранга* $k\geq 0$. При этом $I_0^{(0)}=[0,1]$.

Лемма 3. *Для любого* $y_0\in[0,1]$ *множество* $E=\{x\in[0,1]:\ y_0\in E_x\}$ *измеримо и* $\operatorname{mes} E = 1$.

Доказательство. Для фиксированного y_0 обозначим через $I^{(k)}(y_0)$ объединение тех двоичных интервалов ранга k, замыканию которых принадлежит y_0 (при фиксированном k таких интервалов не более чем два). Легко видеть, что

$$[0,1]\setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{\infty} B_k^n, \quad B_k^n = \{x\in[0,1]:\ \langle 2^l x\rangle \notin I^{(k)}(y_0) \text{ для } l\geq n\}.$$

Но так как $B_k^n = \bigcup_{i=0}^{2^n}(B_k^0\oplus b_i)$, где b_i – двоично-рациональные числа вида $i/2^n$, $0\leq i\leq 2^n$ (об определении $\oplus$ см. [1], стр. 158), то для доказательства леммы достаточно показать, что множество B_k^0 измеримо и $\operatorname{mes} B_k^0 = 0$.

Пусть $x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}}$ – двоичное разложение числа $x\in[0,1]$, причем для двоично-рациональных чисел будем рассматривать только те разложения,для которых начиная с некоторого номера n_0 все x_n равны нулю. Исключением будет число 1. Скажем, что двоичный вектор $P^m x = (x_0,\dots,x_{m-1})$ содержит двоичный вектор $P^i y = (y_0,\dots,y_{i-1})$, где $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{2^{n+1}}$, если существует n_0 такое, что $n_0+i\leq m$, $x_{n_0+j}=y_j$, $j=0,1,\dots,i-1$. Пусть $A_{m,k}^1$ – множество тех точек $x\in[0,1]$, для которых вектор $P^m x$ не содержит вектор $P^k y_0$. Если y_0 – двоично-рациональное число, то $A_{m,k}^2$ – множество тех точек $x\in[0,1]$, для которых вектор

$P^m x$ не содержит вектор $P_1^k y_0 = (y_0^1, ..., y_{k-1}^1)$, где $y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n^1}{2^{n+1}}$ и все y_n^1 равны 1, начиная с некоторого номера. Множества $A_{m,k}^i$, $i = 1, 2$ являются объединениями двоичных интервалов ранга m. Так как

$$R_m^k = \{x \in [0,1] : \ (2^l x) \notin I^{(k)}(y_0) \text{ при } 0 \le l \le m\} =$$

$$= \begin{cases} A_{m+k-1,k}^1 \text{ при двоично-иррациональных } y_0, \\ A_{m+k-1,k}^1 \cap A_{m+k-1,k}^2 \text{ при двоично-рациональных } y_0, \end{cases}$$

и $B_k^0 = \bigcap_{m=3k}^{\infty} R_m^k$, то R_m^k и B_k^0 измеримы.

Обозначим через $\widetilde{A}_{m,k}^1$ множество тех векторов $P^m x$, которые не содержат вектор $P^k y_0$, а через $|A|$ – мощность множества A. Нетрудно убедиться в справедливости следующих рекуррентных соотношений :

$$\left|\widetilde{A}_{m+1,k}^1\right| = 2\left|\widetilde{A}_{m,k}^1\right| - \left|\left(\widetilde{A}_{m-k+1,k}^1 \times \{P^{k-1}y_0\}\right) \cap \widetilde{A}_{m,k}^1\right|,$$

$$\left|\left(\widetilde{A}_{m-k+1,k}^1 \times \{P^{k-1}y_0\}\right) \cap \widetilde{A}_{m,k}^1\right| = \left|\widetilde{A}_{m-k+1,k}^1\right| -$$

$$-\sum_{i \in I}\left|\left(\widetilde{A}_{m-k-k_i+1,k}^1 \times \{y^i\}\right) \cap \widetilde{A}_{m-k+1,k}^1\right|,$$

где y^j – вектор размерности k_j, $k_j < k$ такой, что вектор $(y^j, P^{k-1}y_0)$ содержит вектор $P^k y_0$, I – множество тех индексов i, для которых вектор y^i не может быть представлен как (z, y^j), где z – вектор. Так как из определения y^i, $i \in I$ следует, что $k_i \ne k_j$, $i \ne j$, $i, j \in I$, то из рекуррентных соотношений и из mes $A_{m,k}^1 = \left|\widetilde{A}_{m,k}^1\right| 2^{-m}$, $A_{m+1,k}^1 \subset A_{m,k}^1$ следует, что

$$\lim_{m \to \infty} 2^{-k} \operatorname{mes} A_{m-k+1,k}^1 \le \sum_{i \in I} 2^{-k_i-k} \lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} A_{m-k-k_i+1,k}^1.$$

Следовательно $\lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} A_{m,k}^1 = 0$. А из

$$B_k^0 = \bigcap_{m=3k}^{\infty} R_m^k, \quad R_{m+1}^k \subset R_m^k \subset A_{m+k-1,k}^1$$

следует, что mes $B_k^0 = \lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} R_m^k = 0$.

Лемма 4. *В каждой точке $x_0 \in (0,1)$ имеют место оценки*

$$-\frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})} \le \underline{a}(x_0) \le \frac{-3\sqrt{3}+4}{12}, \quad 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{6} \le \overline{a}(x_0) \le 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})},$$

причем почти всюду

$$\underline{a}(x_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})}, \quad \overline{a}(x_0) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3(3+\sqrt{3})}.$$

Замечание 4. Из леммы 4 следует, что для почти всех x_0 верхние и нижние пределы $\overline{a}(x_0)$ и $\underline{a}(x_0)$ частичных сумм ряда Фурье–Франклина характеристической функции $\varphi(x)$ отрезка $[0, x_0]$ расположены ассиметрично относительно прямой $y = 1/2$. Для рядов Фурье и Фурье–Уолша функции $\varphi(x)$ имеет место симметрия (см. [5], стр. 123 и [4], [11]).

Доказательство леммы 4. Пусть точка x_0 фиксирована, тогда для любого n существуют $i_0 = i_0(n)$ и $\beta_n \in [0,1]$ такие, что $x_0 \in \Delta_{i_0}^{(n)} = [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$ и $x_0 = \beta_n t_{i_0-1} + (1-\beta_n)t_{i_0}$. Из линейности $K_n(t_j, s)$ на отрезках $\Delta_i^{(n)}$ при фиксированном j имеем

$$R_n(t_j) = \sum_{i=1}^{i_0-1} \int_{\Delta_i^{(n)}} K_n(t_j,t)\,dt + \int_{t_{i_0-1}}^{x_0} K_n(t_j,t)\,dt =$$

$$= (x_0 - t_{i_0-1})\frac{K_n(t_j,t_{i_0-1}) + K_n(t_j,x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{i_0-1} \Delta_i^{(n)} \frac{K_n(t_j,t_{i-1}) + K_n(t_j,t_i)}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{\Delta_i^{(n)}}{2}(a_{j,i-1} + a_{ji}) + (1-\beta_n)\frac{\Delta_{i_0}^{(n)}}{2}[(1+\beta_n)a_{j,i_0-1} + (1-\beta_n)a_{j,i_0}].$$

а) Если $i_0 \le 2k$, то из леммы 1 имеем

$$R_n(t_j) = \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{1}{2^{m+2}}(a_{j,i-1} + a_{ji}) + \frac{(1-\beta_n)}{2^{m+2}}[(a_{j,i_0-1} + a_{j,i_0}) + \beta_n(a_{j,i_0-1} - a_{j,i_0})] =$$

$$= \frac{1}{2^{m+2}}(a_{j0} + 2a_{j1} + \dots + 2a_{j,i_0-2} + a_{j,i_0-1}) + \frac{(1-\beta_n)}{2^{m+2}}\times$$

$$\times[(a_{j,i_0-1} + a_{j,i_0}) + \beta_n(a_{j,i_0-1} - a_{j,i_0})] = \sum_{i=0}^{i_0-1} \delta_{ij} + \frac{1}{2^{m+2}}[r_1(\beta_n)a_{j,i_0-1} + r_2(\beta_n)a_{j,i_0}], \tag{35}$$

где

$$r_1(\beta) = -\frac{2}{3} + (1-\beta^2), \quad r_2(\beta) = -\frac{1}{3} + (1-\beta)^2.$$

б) Если $i_0 \ge 2k+1$, то из леммы 1 имеем

$$R_n(t_j) = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{2^{m+2}}(a_{j,i-1} + a_{ji}) + \frac{(1-\beta_n)}{2^{m+1}}[(a_{j,i_0-1} + a_{j,i_0}) + \beta_n(a_{j,i_0-1} - a_{j,i_0})] +$$

$$+\sum_{i=2k+1}^{i_0-1}\frac{1}{2^{m+1}}(a_{j,i-1}+a_{j,i})=\sum_{i=0}^{i_0-1}\delta_{ij}+\frac{1}{2^{m+1}}\left[r_1(\beta_n)a_{j,i_0-1}+r_2(\beta_n)a_{j,i_0}\right]. \quad (36)$$

Из $\int_0^1 K_n(t,s)\,ds=1$ и оценки (6) следует, что $R_n(t)$ равномерно сходится вне любой окрестности точки x_0. Следовательно

$$\overline{a}(x_0)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\max_{t\in[0,1]}R_n(t),\quad \underline{a}(x_0)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\min_{t\in[0,1]}R_n(t).$$

Из теоремы B следует, что при $j\le i_0$, $|a_{i_0,j}|$ возрастает, когда j возрастает; при $j\ge i_0$, $|a_{i_0,j}|$ убывает, когда j возрастает; $a_{i_0-1,j}$ и $a_{i_0,j}$ имеют противоположные знаки; выражение $\frac{a_{j,i_0-1}}{a_{j,i_0}}$ зависит от i_0 и не зависит от j при $j\ge i_0$ и при $j\le i_0-1$. Так как $R_n(t)$ является ломаной из n звеньев и узлов в точках t_i, то из вышеизложенного и из (35), (36) следует, что для $R_n(t)$ точки максимума и минимума находятся в множестве $\{t_{i_0-2},t_{i_0-1},t_{i_0},t_{i_0+1}\}$.

Положим

$$P_1(\beta)=\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-2\alpha}[r_2(\beta)-e^{\alpha}r_1(\beta)],$$

$$P_2(\beta,b)=\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-2\alpha}[r_2(\beta)(3-e^{-2\alpha b})-e^{\alpha}r_1(\beta)(3-e^{-2\alpha b-2\alpha})],$$

$$Q_1(\beta,d)=\frac{\sqrt{3}}{6}e^{-2\alpha}[r_1(\beta)(3+e^{-2\alpha d+2\alpha})-e^{\alpha}r_2(\beta)(3+e^{-2\alpha d})],$$

$$\overline{P}(\beta)=\max_{0\le b\le\infty}(P_1(\beta),P_2(\beta,b),-e^{\alpha}P_1(\beta),-e^{\alpha}P_2(\beta,b)),$$

$$\underline{P}(\beta)=\min_{0\le b\le\infty}(P_1(\beta),P_2(\beta,b),-e^{\alpha}P_1(\beta),-e^{\alpha}P_2(\beta,b)),$$

$$\overline{Q}(\beta)=\max_{1\le d\le\infty}(Q_1(\beta,d),-e^{\alpha}Q_1(\beta,d)),\quad \underline{Q}(\beta)=\min_{1\le d\le\infty}(Q_1(\beta,d),-e^{\alpha}Q_1(\beta,d)).$$

Найдем предельные точки последовательностей $\{R_n(t_j)\}$, $j=i_0-2,i_0-1,i_0,i_0+1$. Если послеовательность $R_{n_\nu}(t_j)$ сходится, то без ограничения общности можем предполагать, что последовательность β_{n_ν} тоже сходится.

а) Если $i_0\le 2k_p-1$ и $\beta_{n_\nu}\to\beta$, $\beta\in E_{x_0}$, то из теоремы B и (35) имеем

a1)

$$a_{i_0,i_0-2}=\sqrt{3}\gamma_n 2^{m+2}\cosh\alpha(i_0-2)[\cosh\alpha(n-i_0)+\sinh\alpha(n-2k)\sinh\alpha(2k-i_0)],$$

$$a_{i_0-1,i_0-2}=-\sqrt{3}\gamma_n 2^{m+2}\cosh\alpha(i_0-2)\times$$

$$\times[\cosh\alpha(n-i_0+1)+\sinh\alpha(n-2k)\sinh\alpha(2k-i_0+1)],$$

$$R_{n_p}(t_{i_0-2}) = 1 + \sqrt{3}\gamma_{n_p}\cosh\alpha(i_0-2)\times$$

$$\times\left\{r_2(\beta_{n_p})[\cosh\alpha(n_p-i_0)+\sinh\alpha(n_p-2k_p)\sinh\alpha(2k_p-i_0)]-\right.$$

$$\left.-r_1(\beta_{n_p})[\cosh\alpha(n_p-i_0+1)+\sinh\alpha(n_p-2k_p)\sinh\alpha(2k_p-i_0+1)]\right\} = 1+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{\alpha(i_0-2)}e^{\alpha(n_p-i_0)}\left\{r_2(\beta_{n_p})[3-e^{\alpha(2i_0-4k_p)}-e^{\alpha(4k_p-2n_p)}]-\right.$$

$$\left.-r_1(\beta_{n_p})e^{\alpha}[3-e^{\alpha(2i_0-4k_p-2)}-e^{\alpha(4k_p-2n_p)}]\right\} = 1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_p}\times$$

$$\times\left\{r_2(\beta_{n_p})[3-e^{-2\alpha b_p}-e^{-2\alpha c_p}]-r_1(\beta_{n_p})e^{\alpha}[3-e^{-2\alpha c_p}-e^{-2\alpha b_p-2\alpha}]\right\}+o(1),$$

где

$$b_p = 2k_p - i_0, \quad c_p = n_p - 2k_p, \quad n_p = 2^{m_p} + k_p, \quad 1 \le k_p \le 2^{m_p}.$$

Так как $b_p + c_p = n_p - i_0 \to \infty$, при $n_p \to \infty$, то без ограничения общности можем предполагать, что $b_p \to \infty$ или $c_p \to \infty$, а b_p остается постоянной. Предельные точки последовательности $R_{n_p}(t_{i_0-2})$ имеют следующий вид :

$$\begin{cases} 1+\frac{3}{4}P_1(\beta), & \text{если } b_p \to \infty, \\ 1+P_2(\beta,b), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b = 1,2,\ldots \end{cases}$$

В остальных случаях получим

а2) Для последовательности

$$R_{n_p}(t_{i_0-1}) = 1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-\alpha}e^{\alpha n_p}\times$$

$$\times\left[-r_2(\beta_{n_p})(3-e^{-2\alpha b_p}-e^{-2\alpha c_p})+r_1(\beta_{n_p})e^{\alpha}(3-e^{-2\alpha c_p}-e^{-2\alpha b_p-2\alpha})\right]+o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} 1-\frac{3}{4}e^{\alpha}P_1(\beta), & \text{если } b_p \to \infty, \\ 1-e^{\alpha}P_2(\beta,b), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b. \end{cases}$$

а3) Для последовательности

$$R_{n_p}(t_{i_0}) = \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-\alpha}e^{\alpha n_p}(3-e^{-2\alpha b_p}-e^{-2\alpha c_p})[r_2(\beta_{n_p})e^{\alpha}-r_1(\beta_{n_p})]+o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} -e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{если } b_p \to \infty, \\ -\frac{1}{3}(3-e^{-2\alpha b})e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b. \end{cases}$$

а4) Для последовательности

$$R_{n_p}(t_{i_0+1}) = \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_p}(3 - e^{-2\alpha b_p+2\alpha} - e^{-2\alpha c_p})[r_1(\beta_{n_p}) - e^{\alpha}r_2(\beta_{n_p})] + o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} Q_1(\beta,\infty), & \text{если } b_p \to \infty, \\ \frac{1}{3}(3 - e^{-2\alpha b+2\alpha})Q_1(\beta,\infty), & \text{если } c_p \to \infty,\ b_p = b. \end{cases}$$

б) Если $i_0 \geq 2k_p + 2$ и $\beta_{n_p} \to \beta$, $\beta \in E_{x_0}$, то из теоремы B и (36) имеем

б1)

$$R_{n_p}(t_{i_0-2}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_p}(3 + e^{-2\alpha d_p+4\alpha} + e^{-2\alpha q_p})[r_2(\beta_{n_p}) - e^{\alpha}r_1(\beta_{n_p})] + o(1),$$

где

$$q_p = 2k_p, \quad d_p = i_0 - 2k_p, \quad n_p = 2^{m_p} + k_p, \quad 1 \leq k_p \leq 2^{m_p}.$$

Так как $d_p + q_p = i_0 \to \infty$, при $n_p \to \infty$, то без ограничения общности можем предполагать, что $d_p \to \infty$ или $q_p \to \infty$, а d_p остается постоянной. Предельные точки последовательности $R_{n_p}(t_{i_0-2})$ имеют вид

$$\begin{cases} 1 + \frac{3}{4}P_1(\beta), & \text{если } d_p \to \infty, \\ 1 + \frac{1}{4}(3 + e^{-2\alpha d+4\alpha})P_1(\beta), & \text{если } q_p \to \infty,\ d_p = d = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

б2) Для последовательности

$$R_{n_p}(t_{i_0-1}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-\alpha}e^{\alpha n_p}(3 + e^{-2\alpha d_p+2\alpha} + e^{-2\alpha q_p})[r_1(\beta_{n_p})e^{\alpha} - r_2(\beta_{n_p})] + o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} 1 - \frac{3}{4}P_1(\beta), & \text{если } d_p \to \infty, \\ 1 - \frac{1}{4}(3 + e^{-2\alpha d+2\alpha})P_1(\beta), & \text{если } q_p \to \infty,\ d_p = d. \end{cases}$$

б3) Для последовательности

$$R_{n_p}(t_{i_0}) = \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_p}e^{-\alpha}e^{\alpha n_p} \times$$

$$\times[-(3 + e^{-2\alpha d_p+2\alpha} + e^{-2\alpha q_p})r_1(\beta_{n_p}) + (3 + e^{-2\alpha d_p} + e^{-2\alpha q_p})e^{\alpha}r_2(\beta_{n_p})] + o(1)$$

предельными точками являются t

$$\begin{cases} -e^{\alpha}Q_1(\beta,\infty), & \text{если } d_p \to \infty, \\ -e^{\alpha}Q_1(\beta,d), & \text{если } q_p \to \infty,\ d_p = d. \end{cases}$$

б4) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0+1})=\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}\times$$

$$\times[(3+e^{-2\alpha d_\nu+2\alpha}+e^{-2\alpha q_\nu})r_1(\beta_{n_\nu})-(3+e^{-2\alpha d_\nu}+e^{-2\alpha q_\nu})e^{\alpha}r_2(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются

$$\begin{cases} Q_1(\beta,\infty), & \text{если } d_p\to\infty, \\ Q_1(\beta,d), & \text{если } q_p\to\infty,\ d_p=d. \end{cases}$$

в) Если $i_0=2k_p+1$, то из теоремы В и (36) следует, что

в1) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-2})=1+\frac{2\sqrt{3}}{4}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}[r_2(\beta_{n_\nu})-e^{\alpha}r_1(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $1+P_1(\beta)$.

в2) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-1})=1+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\alpha}[r_1(\beta_{n_\nu})e^{\alpha}-r_2(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $1-e^{\alpha}P_1(\beta)$.

в3) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0})=\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-\alpha}[(3+e^{-2\alpha})r_2(\beta_{n_\nu})e^{\alpha}-4r_1(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $-e^{\alpha}Q_1(\beta,1)$.

в4) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0+1})=\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}[-(3+e^{-2\alpha})r_2(\beta_{n_\nu})e^{\alpha}+4r_1(\beta_{n_\nu})]+o(1)$$

предельными точками являются $Q_1(\beta,1)$.

г) Если $i_0=2k_p$, то из теоремы В и (35) следует, что

г1) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-2})=1+\frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu}e^{-2\alpha}e^{\alpha n_\nu}[2r_2(\beta_{n_\nu})-e^{\alpha}r_1(\beta_{n_\nu})(3-e^{-2\alpha})]+o(1)$$

предельными точками являются $1+P_2(\beta,0)$.

г2) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0-1}) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{8}\gamma_{n_\nu} e^{-\alpha} e^{\alpha n_\nu}[-2r_2(\beta_{n_\nu}) + e^\alpha r_1(\beta_{n_\nu})(3 - e^{-2\alpha})] + o(1)$$

предельными точками являются $1 - e^\alpha P_2(\beta, 0)$.

г3) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{n_\nu} e^{-\alpha} e^{\alpha n_\nu}[r_2(\beta_{n_\nu})e^\alpha - r_1(\beta_{n_\nu})] + o(1)$$

предельными точками являются $-\frac{2}{3}e^\alpha Q_1(\beta, \infty)$.

г4) Для последовательности

$$R_{n_\nu}(t_{i_0+1}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\gamma_{n_\nu} e^{-2\alpha} e^{\alpha n_\nu}[-r_2(\beta_{n_\nu})e^\alpha + r_1(\beta_{n_\nu})] + o(1)$$

предельными точками являются $\frac{2}{3}Q_1(\beta, \infty)$.

Уравнения

$$P_1(\beta) - P_2(\beta, 0) = 0, \quad P_1(\beta) = 0, \quad e^\alpha P_1(\beta) + P_2(\beta, 0) = 0,$$

$$P_2(\beta, 0) = 0, \quad P_1(\beta) + e^\alpha P_2(\beta, 0) = 0,$$

$$Q_1(\beta, 1) = 0, \quad Q_1(\beta, 1) + e^\alpha Q_1(\beta, \infty) = 0, \quad Q_1(\beta, \infty) = 0,$$

$$Q_1(\beta, 1) - Q_1(\beta, \infty) = 0, e^\alpha Q_1(\beta, 1) + Q_1(\beta, \infty) = 0$$

имеют единственные решения в интервале $(0, 1)$, которые мы обозначим через $A_1, ..., A_5$, $B_1, ..., B_5$ соответственно. Обозначим через A_6, A_7, B_6, B_7 точки максимумов $-e^\alpha P_1(\beta)$, $-e^\alpha P_2(\beta, 0)$, $Q_1(\beta, 1)$, $Q_1(\beta, \infty)$. Ясно, что

$$A_7 < A_6 < \frac{1}{2} < A_4 < A_5 < A_2 < A_1, \quad A_4 < A_3 < A_2,$$

$$B_1 < B_2 < B_3 < \frac{1}{2} < B_4 < B_6 < B_7, \quad B_1 < B_5 < B_3.$$

Убедимся, что

$$\overline{P}(\beta) = \begin{cases} -e^\alpha P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [0, A_3], \\ P_2(\beta, 0), & \text{когда } \beta \in [A_3, A_1], \\ P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [A_1, 1], \end{cases}$$

$$\underline{P}(\beta) = \begin{cases} P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [0, A_5], \\ -e^\alpha P_2(\beta, 0), & \text{когда } \beta \in [A_5, A_1], \\ -e^\alpha P_1(\beta), & \text{когда } \beta \in [A_1, 1], \end{cases} \tag{37}$$

$$\overline{Q}(\beta) = \begin{cases} -e^{\alpha} Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [0, B_2], \\ Q_1(\beta, 1), & \text{когда } \beta \in [B_2, B_4], \\ Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [B_4, 1], \end{cases}$$

$$\underline{Q}(\beta) = \begin{cases} Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [0, B_5], \\ -e^{\alpha} Q_1(\beta, 1), & \text{когда } \beta \in [B_5, B_4], \\ -e^{\alpha} Q_1(\beta,\infty), & \text{когда } \beta \in [B_4, 1]. \end{cases} \tag{38}$$

Для этого покажем, что имеют место неравенства

$$P_2(\beta, b) \le P_2(\beta, 0), \quad \beta \in [A_4, 1], \quad b = 0, 1, \ldots, \tag{39}$$

$$P_2(\beta, 0) \le P_1(\beta), \quad \beta \in [A_1, 1], \tag{40}$$

$$P_1(\beta) \le P_2(\beta, 0), \quad \beta \in [0, A_1], \tag{41}$$

$$P_1(\beta) \le P_2(\beta, b), \quad \beta \in [0, A_2], \quad b = 0, 1, \ldots, \tag{42}$$

$$Q_1(\beta, 1) \le Q_1(\beta, d) \le Q_1(\beta, \infty), \quad \beta \in [B_4, 1], \quad d = 1, 2, \ldots, \tag{43}$$

$$Q_1(\beta, \infty) \le Q_1(\beta, d) \le Q_1(\beta, 1), \quad \beta \in [0, B_4], \quad d = 1, 2, \ldots . \tag{44}$$

Так как $P_2(A_4, 0) \ge P_2(A_4, b)$, $P_2(1, 0) \ge P_2(1, b)$ и коэффициент главного члена трехчлена $P_2(\beta, 0) - P_2(\beta, b)$ отрицателен, то выполняется (39). Уравнение $P_2(\beta, 0) - P_1(\beta) = 0$ имеет единственное решение в интервале $(0, 1)$. Поэтому, из $P_2(1, 0) < P_1(1)$ следуют неравенства (40) и (41). Неравенство (42) следует из неравенства $P_1(0) \le P_2(0, b)$, $P_1(A_2) \le P_2(A_2, b)$ и из неотрицательности коэффициента главного члена трехчлена $P_2(\beta, b) - P_1(\beta)$. Неравенства (43) и (44) следуют из

$$Q_1(1, 1) \le Q_1(1, d) \le Q_1(1, \infty), \quad Q_1(0, \infty) \le Q_1(0, d) \le Q_1(0, 1)$$

и из того, что уравнение $Q_1(\beta, d_1) - Q_1(\beta, d_2) = 0$, $d_1 \ne d_2$ имеет единственное решение B_4 в интервале $(0, 1)$.

Из (35), (36) и a1) – г4) следует, что

$$\overline{a}(x_0) = \max_{\beta \in B_{x_0}} \max[1 + \overline{P}(\beta), \overline{Q}(\beta)], \quad \underline{a}(x_0) = \min_{\beta \in B_{x_0}} \min[1 + \underline{P}(\beta), \underline{Q}(\beta)].$$

Так как

$$\max_{\beta \in [0,1]} \overline{Q}(\beta) = \overline{Q}(0) < 1, \quad \min_{\beta \in B_{x_0}} \underline{P}(\beta) = \underline{P}(1) \ge -1,$$

то имеем

$$\overline{a}(x_0) = 1 + \max_{\beta \in E_{x_0}} \overline{P}(\beta), \quad \underline{a}(x_0) = \min_{\beta \in E_{x_0}} \underline{Q}(\beta). \tag{45}$$

Из определения следует, что E_{x_0} содержит левые и правые точки от $1/2$. С учетом того, что $\overline{P}(1/2) \leq \overline{P}(\beta)$, при $\beta \in [0, 1/2]$, $\underline{Q}(1/2) \geq \underline{Q}(\beta)$, при $\beta \in [1/2, 1]$, и из (37), (38), (45) следует, что

$$1 + \overline{P}(1/2) \leq \overline{a}(x_0) \leq 1 + \overline{P}(A_6), \quad \underline{Q}(B_7) \leq \underline{a}(x_0) \leq \underline{Q}(1/2),$$

$$A_6 = \frac{1}{e^\alpha + 1}, \quad B_7 = \frac{e^\alpha}{1 + e^\alpha}, \tag{46}$$

причем

$$\overline{P}(1/2) = \frac{\sqrt{3} - 1}{6}, \quad \overline{P}(A_6) = \frac{2\sqrt{3}}{3(3 + \sqrt{3})},$$

$$\underline{Q}(1/2) = \frac{-3\sqrt{3} + 4}{12}, \quad \underline{Q}(B_7) = -\frac{\sqrt{3}}{2(3 + \sqrt{3})}.$$

Согласно лемме 3

$$\operatorname{mes}\{t \in [0,1] : \ B_7 \in E_t\} = 1, \qquad \operatorname{mes}\{t \in [0,1] : \ A_6 \in E_t\} = 1.$$

Следовательно, из (45) и (46), для почти всех x_0 имеем $\overline{a}(x_0) = 1 + \overline{P}(A_6)$ и $\underline{a}(x_0) = \underline{Q}(B_7)$.

Доказательство теоремы 4. Пусть функция $f(x)$ имеет неустранимый разрыв первого рода в точке x_0 и $f(x_0 + 0) = d_1$, $f(x_0 - 0) = d_2$, а $\varphi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0, x_0]$. Тогда функция $\widetilde{f}(x) = f(x) - \varphi(x)(d_2 - d_1)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0, и согласно пункту 2) теоремы 1 ряд Фурье–Франклина функции $\widetilde{f}(x)$ равномерно сходится к нулю в точке x_0. Следовательно

$$\varlimsup_{\substack{x \to x_0 \\ n \to \infty}} S_n(f, x) = \begin{cases} (d_2 - d_1)\overline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 > d_1, \\ (d_2 - d_1)\underline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 < d_1, \end{cases} \tag{47}$$

$$\varliminf_{\substack{x \to x_0 \\ n \to \infty}} S_n(f, x) = \begin{cases} (d_2 - d_1)\overline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 < d_1, \\ (d_2 - d_1)\underline{a}(x_0) + d_1, & \text{если } d_2 > d_1, \end{cases} \tag{48}$$

где $S_n(f, x)$ – n–ая частичная сумма ряда Фурье–Франклина функции $f(x)$. Из определения функции Гиббса (см. определение 4) и из (47), (48) следует, что

$$G(x_0) = \max\left(2\overline{a}(x_0) - 1, -2\underline{a}(x_0) + 1\right). \tag{49}$$

Из (49) и леммы 4 следует утверждение теоремы 3.

Автор выражает благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постоянное внимание к работе.

ABSTRACT. The paper contains theorems on convergence and uniform convergence at a point for simple Franklin series, as well as λ-convergence and uniform λ-convergence at a point for double Franklin series. The results are applied to the study of Gibbs phenomenon for Franklin system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Наука, Москва 1984.
2. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.
3. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Мир, Москва 1965.
4. Л. А. Балашов, В. А. Скворцов, "Явление Гиббса для системы Уолша", Докл. АН СССР, т. 268, № 5, стр. 1033 – 1034, 1983.
5. Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
6. А. М. Зубакин, "Явление Гиббса для мультипликативных систем типа Уолша и типа Виленкина–Джафарли", Сиб. мат. журн., т. 12, № 1, стр. 147 – 157, 1971.
7. Ф. Г. Арутюнян, "Представление функций кратными рядами", ДАН АрмССР, т. 64, № 2, стр. 72 – 76, 1977.
8. Н. Б. Погосян, "Представление измеримых функций ортогональными рядами", Мат. сборник, т. 98, стр. 102 – 112, 1975.
9. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Сочинения, т. 1, стр. 5 – 24.
10. Г. Г. Геворкян, "О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина", ДАН АрмССР, т. 83, № 1, стр. 15 – 18, 1986.
11. О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса двойных рядов Фурье–Уолша функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 5, стр. 30 – 46, 1995.

8 января 1996 Институт математики НАН Армении