

ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОШИБОК АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Р. Оганесян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 1, 1996

В статье устанавливаются асимптотические представления для решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с параметром. Предполагается, что коэффициенты уравнений неограничены вблизи особой точки $t = 0$. Эти представления могут быть использованы к изучению некоторых уравнений математической физики таких, как уравнение Шредингера и уравнение Чаплыгина. Некоторые теоремы, доказанные в данной работе, оценивают разность между точными и асимптотическими решениями, другие же описывают построение асимптотических решений. Результаты применяются к изучению корректности весовых начальных задач вблизи особой точки.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям, которые не могут решаться точно, однако допускают асимптотические решения. Например, для уравнения

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (0.1)$$

с общим $q(t)$ кроме тривиального других решений не найдено. Несмотря на это, нетрудно получить асимптотические решения. Действительно, полагая $q = 0$ в (0.1), получаем вспомогательное уравнение $u''(t) = 0$, общим решением которого является

$$u = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2,$$

где

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = t \quad (0.2)$$

Исследование, проведенное в данной работе, частично осуществилось благодаря Joint-Stock Company "Prometheus".

– фундаментальные решения. Хорошо известно, что если

$$q \in L_1([0, T]), \quad (0.3)$$

то общее решение уравнения (0.1) может быть представлено в виде

$$u(t) = (C_1 + \varepsilon_1(t)) \varphi_1(t) + (C_2 + \varepsilon_2(t)) \varphi_2(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_j(t) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (0.4)$$

Другими словами, функции (0.2) являются асимптотическими решениями (0.1).

Функции ε_j называются функциями ошибок.

Если функция $q(t)$ имеет особенность в точке $t = 0$, то для уравнения (0.1) данные Коши $u(0)$, $u'(0)$ не имеют смысла. Например, если $q(t) = -2t^{-2}$, то $u = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$ с фундаментальными решениями $\psi_1 = t^{-1}$, $\psi_2 = t^2$. В более ранней работе [5] в таких случаях мы пользовались весовыми начальными данными в форме вронскианов. Проиллюстрируем это на примере (0.1).

Возьмем общее решение уравнения (0.1), написанное в терминах фундаментальных решений ψ_1 , ψ_2 и произвольных констант C_1 , C_2 :

$$u = C_2\psi_1 - C_1\psi_2, \quad u' = C_2\psi_1' - C_1\psi_2'.$$

Решая эту систему, получаем

$$C_j = W(u, \psi_j) / W(\psi_1, \psi_2), \quad j = 1, 2. \quad (0.5)$$

Здесь $W(\psi_1, \psi_2) = \psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1'$ – вронскиан. Если $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – асимптотические решения (0.1) такие, что

$$\partial_t^{k-1} \psi_j(t) = [1 + \varepsilon_j(t)] \partial_t^{k-1} \varphi_j(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_j(t) = 0, \quad k, j = 1, 2, \quad (0.6)$$

то с необходимостью

$$\frac{W(u, \psi_j)}{W(\psi_1, \psi_2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(u, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \quad j = 1, 2,$$

и из (0.5) получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(u, \varphi_j)}{W(\varphi_1, \varphi_2)} = C_j, \quad j = 1, 2. \quad (0.7)$$

Эти соотношения могут заменить начальные данные. Отношения в (0.7) назовем *вронскианными данными*. Так как всегда можно выбрать $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ так, чтобы $W(\psi_1, \psi_2) = W(\varphi_1, \varphi_2) = 1$, то из (0.7) получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} W(u, \varphi_j) = C_j, \quad j = 1, 2.$$

Если условие (0.3) выполнено, то вронскианные данные для уравнения (0.1) превращаются в данные Коши. Таким образом, при отсутствии особенностей вронскианные данные обобщают обычные данные Коши.

Построение асимптотических решений обычно состоит из следующих шагов :

- 1) выбор подходящих пробных функций,
- 2) доказательство того, что разность точного решения и пробной функции мала в некоторой норме,
- 3) доказательство дифференцируемости асимптотического представления (ср. с (0.6)).

В настоящей работе мы применяем этот анализ к уравнению

$$Lu(t, \xi) = \sum_{k=0}^m q_{m-k}(t, \xi) \partial_t^k u(t, \xi) = 0, \quad q_0 = 1, \quad t \in]0, T[. \quad (0.8)$$

Основным методом является обобщение асимптотической теоремы Левинсона (теорема 2), которая оценивает функции ошибок для линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с параметром. Мы применяем теорему 2 к сингулярным начальным задачам с вронскианными данными.

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы формулируем шесть теорем. Теорема 1 является теоремой единственности для (0.8) с вронскианными данными. Теорема 2 дает достаточный критерий для асимптотических решений. Теорема 3 является вариантом теоремы 2 для систем первого порядка. Теорема 4 является частным случаем теоремы 2 для дифференциальных уравнений второго порядка. Теорема 5 (Петровский) — хорошо известный необходимый и достаточный критерий корректности задачи Коши. Теорема 6 — асимптотический вариант теоремы 5.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Lu(t, \xi) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (1.1)$$

где L как в (0.8); относительно коэффициентов мы предполагаем, что

$$q_{m-k}(\cdot, \xi) \in C[0, T], \quad k = 0, \dots, m. \quad (1.2)$$

Для любого вещественного s обозначим через $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ обычное пространство Соболева с нормой

$$\|v\|_s = \{(2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi\}^{1/2} = \|\widehat{v(\xi)}\|_s, \quad (1.3)$$

где $\widehat{v}$ — x -преобразование Фурье функции $v(x)$:

$$\widehat{v}(\xi) = \int v(x^1, \dots, x^n) \exp(-ix\xi) dx^1 \dots dx^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

Обозначим через $C^k[0, T], H^p$ пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений из $]0, T[$ в H^p , $H^\infty = \cap H^s$.

При заданных функциях

$$\varphi_j(\cdot, \xi) \in C^m[0, T], \quad j = 1, \dots, m, \quad (1.5)$$

рассмотрим $m \times m$ матрицу

$$\Phi = (\partial_t^{k-1} \varphi_j)_{k,j=1}^m \quad (1.6)$$

и вронскиан

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = W(\varphi) = \det \Phi. \quad (1.7)$$

Через Φ^{mj} обозначим миноры, полученные вычеркиванием из Φ m -ной строки j -го столбца.

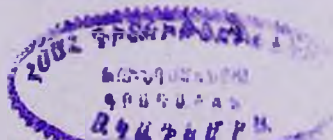
Предположим, что функции φ_j выбраны таким образом, что

$$\int_0^T |W^{-1}(\varphi) \Phi^{mj} L\varphi_k| dt \leq c_1 + c_2 \ln \langle \xi \rangle, \quad k, j = 1, \dots, m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.8)$$

где c_i ($j=1, 2$) являются некоторыми неотрицательными постоянными, а $\langle \xi \rangle = (9 + |\xi|^2)^{1/2}$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$. Мы выбрали $\langle \xi \rangle$ так, чтобы $\ln \langle \xi \rangle \geq 1$. Рассмотрим начальную задачу (1.1) с вронскианными данными

$$\lim_{t \rightarrow 0} W(\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}, u, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_m) / W(\varphi) = g_j(\xi), \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.9)$$

Справедлива следующая теорема.



Теорема 1. Если условия (1.5), (1.8) выполнены, то в $C^m([0, T])$ задача (1.1), (1.9) с $g_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, m$ имеет только тривиальное решение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.2), (1.5), (1.8). Тогда для любых $g_j \in L_2(\mathbb{R}^n)$ существует решение $u(t, \xi)$ уравнения (1.1), представимое в виде

$$\partial_t^{k-1} u(t, \xi) = \sum_{j=1}^m g_j(\xi) [1 + \varepsilon_j(t, \xi)] \partial_t^{k-1} \varphi_j(t, \xi), \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varepsilon_j(t, \cdot)\|_p = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{при некотором } p \in \mathbb{R}, \quad (1.10')$$

с оценками

$$|\varepsilon_j(t, \xi)| \leq \sum_{p=1}^m |g_p(\xi)| \{-1 + \exp \int_0^t \sum_{k,j=1}^m |W^{-1}(\varphi) \Phi^{m,k} L \varphi_k| dt\}, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.11)$$

или в ослабленном виде

$$\|\varepsilon_j(t, \xi)\|_p \leq c \sum_{j=1}^m \|g_j(\xi)\|_{p+c_2 m^2}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{при некотором } p \in \mathbb{R}. \quad (1.11')$$

Замечание 1. Если в (1.8) $c_2 = 0$, то соотношения (1.10) выполняются, но вместо (1.10') имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_j(t, \xi) = 0, \quad k, j = 1, \dots, m, \quad (1.10'')$$

равномерно по $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2 остается верной при замене полуинтервала $]0, T]$ в (1.1), (1.2), (1.5), (1.8) и (1.11) на $[T, \infty[$ и при замене $t \rightarrow 0$ в (1.10'), (1.10'') на $t \rightarrow \infty$.

Для $m \times m$ системы дифференциальных уравнений первого порядка с параметром ξ

$$v_t = A(t, \xi) v(t, \xi), \quad t \in]0, T[\quad (1.12)$$

имеется следующий вариант теоремы 2.

Теорема 3. Пусть существуют неотрицательные постоянные c_1, c_2 и матричная функция $\Psi(\cdot, \xi) \in C^1([0, T])$ такие, что

$$(c_1 + c_2 \ln \langle \xi \rangle)^{-1} \|\Psi^{-1}(A\Psi - \Psi_t)\|_M \in L_1([0, T]), \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

где $\|\cdot\|_M$ — норма матрицы. Если

$$A(\cdot, \xi) \in C([0, T]), \quad (1.14)$$

то для любого $C(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ существует решение $v(\cdot, \xi)$ системы (1.12), имеющее вид

$$v(t) = \Psi(t, \xi)(C(\xi) + \varepsilon(t, \xi)), \quad (1.15)$$

где $C(\xi)$ и ε — m -векторы, и для некоторого p

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\varepsilon(t, \xi)\|_p = 0. \quad (1.16)$$

Замечание 2. Если Ψ — матрица Коши системы $w_t = Bw$, где B не зависит от ξ , т. е. Ψ удовлетворяет уравнению

$$\Psi_t = B\Psi,$$

то условие (1.13) переходит в

$$\|\Psi^{-1}(A - B)\Psi\|_M \in L_1([0, T]). \quad (1.17)$$

Замечание 3. Если в качестве B выбрана диагональная часть A , т. е.

$$B = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}), \quad A = \|a_{ij}\|, \quad (1.18)$$

то из теоремы 3 (с $c_2 = 0$ в (1.13)) следует классическая теорема Н. Левинсона (см. теорему 3.1 в §3 или [2], [4]).

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$L_2 u = [\partial_t^2 + q_1(t, \xi) \partial_t + q_2(t, \xi)] u(t, \xi) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad q_i(\cdot, \xi) \in C^2([0, T]), \quad (1.19)$$

получаем такое следствие теоремы 2.

Теорема 4. Пусть существуют неотрицательные постоянные c_1, c_2 и функции

$$\varphi_1(\cdot, \xi), \varphi_2(\cdot, \xi) \in C^2([0, T]) \quad (1.20)$$

такие, что для $k, j = 1, 2, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\int_0^T \|W^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_{3-j} L_2 \varphi_k\| dt =$$

$$= \int_0^T |\varphi_j^{-1}(\varphi_{1t}\varphi_1^{-1} - \varphi_{2t}\varphi_2^{-1})^{-1} L_2 \varphi_k| dt \leq c_1 + c_2 \ln \langle \xi \rangle. \quad (1.21)$$

Тогда для любых $g_j(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2$, существует решение $u(t, \xi)$ уравнения (1.19), имеющее вид (1.10), (1.10'), с $m = 2$.

Замечание 4. Если положить

$$\varphi_j(t, \xi) = \exp \int_T^t \sigma_j(t, \xi) dt, \quad j = 1, 2, \quad (1.22)$$

то условие (1.21) перейдет в

$$\int_0^T |\varphi_j^{-1}(\sigma_1 - \sigma_2)^{-1} \varphi_k(\sigma_{jt} + \sigma_j^2 + q_1 \sigma_j + q_2)| dt \leq c_1 + c_2 \ln \langle \xi \rangle \quad (1.23)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k, j = 1, 2$.

Если вместо (1.22) взять

$$\varphi_1 = \exp \int_T^t \sigma(t, \xi) dt, \quad \varphi_2 = \varphi_1(t, \xi) \int_T^t \varphi_{2,1}(t, \xi) dt, \quad (1.24)$$

где $\varphi_{2,1}$ — решение начальной задачи

$$(\partial_t + 2\varphi_{1t}\varphi_1^{-1} + q_1)\varphi_{2,1}(t, \cdot) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad \varphi_{2,1}|_{t=T} = 1, \quad (1.25)$$

то

$$\varphi_1^{-1} L \varphi_1 = \varphi_2^{-1} L \varphi_2, \quad W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1^2 \varphi_{21}. \quad (1.25')$$

Замечание 5. Пусть существует функция

$$\sigma(\cdot, \xi) \in C^1([0, T]) \quad (1.26)$$

такая, что для некоторых неотрицательных констант c_1, c_2

$$\int_0^T |\varphi_1^2(t)| \left(\int_T^t (\varphi_{21}(\tau) d\tau)^s (\sigma_t + \sigma^2 + q_1 \sigma + q_2) \right) dt \leq c_1 + c_2 \ln \langle \xi \rangle, \quad (1.27)$$

$s = 0, 1, 2$, $x \in \mathbb{R}^n$. По теореме 4 существует решение $u(t, \xi)$ уравнения (1.19), имеющее вид (1.10), (1.10') с $m = 2$, где функции φ_1, φ_2 определены в (1.24).

Замечание 6. Если в уравнении (1.19) $q_1 = 0$, $q_2 = q > 0$ и в формуле (1.22)

$\sigma_1 = iq^{1/2} - q_t/(4q)$, $\sigma_2 = -iq^{1/2} - q_t/(4q)$, то с помощью замечания 5 получаем

хорошо известные (см. [4]) ВКБ-оценки (1.10), (1.10'') с $m = 2$. Действительно, для уравнения

$$u_{tt} + q(t, \xi)u(t, \xi) = 0, \quad (1.28)$$

где функции φ_1, φ_2 определены как

$$\varphi_1 = q^{-1/4} \exp \left\{ i \int_T^t q^{1/2} dt \right\}, \quad \varphi_2 = q^{-1/4} \exp \left\{ -i \int_T^t q^{1/2} dt \right\}, \quad (1.29)$$

условия (1.21) (с $c_2 = 0$) принимают форму

$$q^{-1/4}(q^{-1/4})_{tt} \in L_1([0, T]). \quad (1.30)$$

Замечание 7. Если в (1.24)

$$\sigma = i(q - q_t^2 q^{-2}/16)^{1/2} q_t q^{-1/4}, \quad S(t) = (-q^{-1/2}/2)_t = q_t/(4q^{3/2}), \quad (1.31)$$

то согласно замечанию 5 представления (1.10), (1.10'') имеют место, причем условия (1.27) принимают вид

$$\int_0^T |\varphi_1^2(t) \left(\int_T^t (\varphi_1^{-2}(y) dy) \right)^k ((S^2 - 1)^{1/2} - S)_t| dt \leq c_1 + c_2 \ln < \xi >, \quad k = 0, 1, 2. \quad (1.32)$$

Это следует из $\sigma_t + \sigma^2 + q(t) = q^{1/2}((S^2 - 1)^{1/2} - S)_t$.

Замечание 8. Если определить φ_1, φ_2 по (1.24), (1.31), то для уравнения (1.28) условия (1.27) принимают вид

$$\int_0^T |\varphi_j \varphi_k (\sigma_t + \sigma^2 + q)| dt \leq c_1 + c_2 \ln < \xi >, \quad j, k = 1, 2. \quad (1.33)$$

Если в (1.24)

$$\sigma(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \dots + \alpha_n(t), \quad (1.34)$$

где α_j — решения уравнений первого порядка

$$\alpha_1(t) + q(t) = 0, \quad \alpha_j'(t) + \alpha_{j-1}^2(t) + 2\alpha_j(t) [\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1}] = 0, \quad j = 2, \dots, n, \quad (1.35)$$

то получаем

$$\sigma_t + \sigma^2 + q(t) = \alpha_n^2. \quad (1.36)$$

Замечание 9. Пусть для некоторого $n \geq 1$

$$\varphi_j \varphi_k \alpha_n^2 \in L_1([0, T]), \quad k, j = 1, \dots, m, \quad (1.37)$$

где функции φ_j определены в (1.24), (1.34), (1.35). Тогда существует решение $u(., \xi) \in C^2([0, T])$ уравнения (1.28), которое может быть представлено в виде (1.10), (1.10'') с $m = 2$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных порядка m ($m \geq 2$):

$$Lu = \partial_t^m u + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k\alpha}(t) \partial_t^k \partial_x^\alpha u(t, x) = 0, \quad t \in]0, T[, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.38)$$

где α — мультииндекс и

$$\partial_t = \partial / \partial t, \quad \partial_x = (\partial / \partial x^1, \dots, \partial / \partial x^n). \quad (1.39)$$

Используя x -преобразование Фурье (1.4), из (1.38) получим обыкновенное дифференциальное уравнение (1.1) с

$$q_0 = 1, \quad q_{m-k}(t, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{k\alpha}(t) i^{|\alpha|} \xi^\alpha. \quad (1.40)$$

Задача Коши

$$\partial_t^k u(0, x) = g_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (1.41)$$

для уравнения (1.38) называется хорошо поставленной или корректной, если для любого $g_k(x) \in H^\infty$ существует единственное решение $u \in C^m([0, T], H^\infty)$ задачи (1.38), (1.41) и для любых $l, \varepsilon \geq 0$ существуют $p, \delta \geq 0$ такие, что из

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|g_k(x)\|_p \leq \delta \quad \text{следует} \quad \sum_{j=0}^{m-1} \max_{[0, T]} \|\partial_t^j u(t, x)\|_l \leq \varepsilon.$$

Пусть $\{\psi_j(t, \xi)\}_{j=1}^m$ — фундаментальная система решений (1.1), (1.40).

Хорошо известна следующая теорема Петровского.

Теорема 5. *Задача Коши (1.38), (1.41) хорошо поставлена в том и только в том случае, когда существуют $c > 0$, $p \in \mathbb{R}$ такие, что*

$$|\psi_j(t, \xi)| \leq c(1 + |\xi|^p), \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]. \quad (1.42)$$

Из теорем 2 и 5 следует

Теорема 6. Пусть существуют функции $\{\varphi_j(t, \xi)\}_{j=1}^m$, удовлетворяющие условиям (1.2), (1.5) и (1.8). Условия

$$|\varphi_j(t, \xi)| \leq c(1 + |\xi|^p), \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (1.43)$$

являются необходимыми и достаточными для корректности задачи Коши (1.38), (1.41).

§2. НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЭНЕРГИИ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть $\{\psi_j(t, \xi)\}_{j=1}^m$ – фундаментальная система решений уравнения (1.1). Тогда общее решение (1.1) имеет вид

$$u(t, \xi) = C_1(\xi)\psi_1(t, \xi) + \dots + C_m(\xi)\psi_m(t, \xi), \quad (2.1)$$

где $C_j(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ – произвольные функции.

Дифференцируя (2.1) k раз по t ($k = 0, 1, \dots, m-1$) и решая относительно $C_j(\xi)$, получим

$$C_j(\xi) = (1/W(\psi)) W(\psi_1, \dots, \psi_{j-1}, u, \psi_{j+1}, \dots, \psi_m). \quad (2.2)$$

Неотрицательное выражение

$$\bar{E}(t, \xi) = \sum_{j=1}^m |C_j(\xi)|^2 \quad (2.3)$$

назовем плотностью энергии.

Закон сохранения энергии $\partial_t \bar{E} = 0$ следует из независимости $C_j(\xi)$ от времени.

Для произвольных $\varphi_j(\cdot, \xi) \in C^m([0, T])$, $j = 1, \dots, m$, с $W(\varphi) \neq 0$ определим вспомогательные функции $w^j(t, \xi)$, $j = 1, \dots, m$, положив

$$\partial_t^k u = w^j(t, \xi) \partial_t^k \varphi_j(t, \xi), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2.4)$$

где суммирование по $j = 1, \dots, m$ выполнено. Ниже для φ_j мы выберем приближенные решения уравнения (1.1).

Из (2.4), используя (1.9), получим

$$w^j(t, \xi) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_{j-1}, u, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_m) / W(\varphi),$$

$$u^j(t, \xi) = g_j(\xi) + o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.5)$$

Далее из (2.4) и (1.1) имеем

$$u_i^j(t, \xi) \partial_i^k \varphi_j(t, \xi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-2, \\ u_i^j(t, \xi) \partial_i^{m-1} \varphi_j(t, \xi) = -u^j(t, \xi) L \varphi_j(t, \xi), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.6)$$

и

$$\partial_t u^j(t, \xi) = -u^k(t, \xi) \Phi^{mj} L \varphi_k / W(\varphi), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.7)$$

где Φ^{mj} — миноры матрицы Φ .

Умножая (2.7) на $\bar{u}^j$ и прибавляя комплексно сопряженное выражение, получим

$$\partial_t E(t, \xi) \leq c K(t, \xi) E(t, \xi), \quad (2.8)$$

где

$$K(t, \xi) = \sum_{k,j=1}^m |W^{-1}(\varphi) \Phi^{mj} L \varphi_k|, \quad E(t, \xi) = \sum_{j=1}^m |u^j(t, \xi)|^2. \quad (2.9)$$

Здесь E — плотность приближенной энергии, рассмотренная в работе [6]. Используя неравенство Гронуолла, из (2.8) получим основную энергетическую оценку

$$E(t, \xi) \leq E(0, \xi) \exp \left\{ c \int_0^t K(\tau, \xi) d\tau \right\}. \quad (2.10)$$

С учетом (1.8), (2.5) и $E(0, \xi) = \sum_{j=1}^m |g_j|^2$ отсюда следует теорема 1.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2 И 3

Напомним асимптотическую теорему Левинсона. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'(t) = [R(t) + B(t)]y(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

где $R(t) = \text{diag}\{r_1(t), \dots, r_m(t)\}$ — диагональная матрица. Пусть $R(t)$ и $B(t)$ — $m \times m$ матрицы и

$$R(t), \quad B(t) \in C([0, T]). \quad (3.2)$$

Если $B(t) = 0$, то (3.1) имеет систему решений

$$y_j(t) = \exp \int_T^t r_j(s) ds, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

Теорема 3.1 (Левинсон). Пусть выполнены следующие условия :

$$1) \int_0^T |||B(s)|| ds < \infty,$$

2) для любых фиксированных j и $k = 1, \dots, m$, $\operatorname{Re}\{r_j(s) - r_k(s)\}$ не меняют знака при $s \in]0, T]$. Тогда система (3.1) имеет решения $y_j(t)$, $j = 1, \dots, m$ такие, что

$$y_{jk}(t) = (\delta_{jk}(t) + \epsilon_{jk}(t)) \exp \int_T^t r_j(s) ds, \quad (3.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon_{kj}(t) = 0, \quad k, j = 1, \dots, m. \quad (3.4')$$

Доказательство теоремы 2. Преобразуем (1.1) к виду

$$v_t + Av = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (3.5)$$

где

$$v = \operatorname{colon}(u, u_t, \dots, \partial_t^{m-1}u), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_m & \dots & q_2 & \dots & q_1 \end{pmatrix}.$$

Полагая

$$v = \Phi w, \quad (3.6)$$

из (3.5) получим систему

$$w_t + Gw = 0, \quad t \in]0, T[, \quad (3.7)$$

где $G = \Phi^{-1}(A\Phi + \Phi_t)$. Прямыми вычислениями получим

$$G_{kj} = \Phi^{mj} L\varphi_k / (W(\varphi)), \quad k, j = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Применяя к системе (3.7) теорему 3.1 с $R = 0$, $B = -G$, с учетом (1.8) ($c_2 = 0$) получим

$$w_{kj} = \delta_{kj} + \epsilon_{kj}(t, \xi), \quad k, j = 1, \dots, m, \quad (3.9)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, а

$$\epsilon_{kj} \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Возвращаясь к предыдущим переменным (3.6), получаем (1.10), (1.10'').

Докажем оценки (1.11). Интегрируя (2.7) по $[0, t]$, получим

$$w^j(t, \xi) = g_j(\xi) - \int_0^t W^{-1}(\varphi) u^k(\tau, \xi) \phi^{mj} L \varphi_k(\tau, \xi) d\tau, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

или

$$|w^j(t, \xi)| \leq |g_j(\xi)| + \int_0^t |W^{-1}(\varphi) u^k(\tau, \xi) \phi^{mj} L \varphi_k(\tau, \xi)| d\tau, \quad j = 1, \dots, m.$$

Суммируя эти оценки, получим

$$U(t, \xi) \leq G(\xi) + \int_0^t K(\tau, \xi) U(\tau, \xi) d\tau, \quad (3.12)$$

где

$$U(t, \xi) = \sum_{j=1}^m |w^j(t, \xi)|, \quad G(\xi) = \sum_{j=1}^m |g_j(\xi)|,$$

$$K(\tau, \xi) = \sum_{k,j=1}^m |W^{-1}(\varphi) \phi^{mj} L \varphi_k(\tau, \xi)|.$$

Согласно лемме Гронуолла, из (3.12) имеем

$$U(t, \xi) \leq G(\xi) \exp \int_0^t K(\tau, \xi) d\tau. \quad (3.13)$$

Для $\varepsilon_j(t, \xi) = w^j(t, \xi) - g_j(\xi)$, $j = 1, \dots, m$, с учетом (3.11), (3.13), получим

$$|\varepsilon_j(t, \xi)| \leq \int_0^t |W^{-1}(\varphi) u^k(\tau, \xi) \phi^{mj} L \varphi_k(\tau, \xi)| d\tau \leq \int_0^t K(\tau, \xi) U(\tau, \xi) d\tau \leq$$

$$\leq G(\xi) \int_0^t K(\tau, \xi) \left\{ \exp \int_0^\tau K(y, \xi) dy \right\} d\tau \leq G(\xi) \left[-1 + \exp \int_0^t K(\tau, \xi) d\tau \right].$$

Оценки (1.11) доказаны. Выражения (1.10), (1.10') можно получить аналогичным образом, после того, как мы заметим, что используя теорему Лебега из (1.8) $c_2 = 0$, (1.11) можно получить (1.10').

Из (1.8) получаем $\exp \int_0^t K(\tau, \xi) d\tau \leq c < \xi >^{m^2 c_2}$, а из (1.11) следуют оценки (1.11').

Доказательство теоремы 3. Положив

$$v = \Psi w, \quad (3.14)$$

из (1.12) получаем систему уравнений

$$w_t = \Psi^{-1}(A\Psi - \Psi_t)w. \quad (3.15)$$

Применяя теорему 3.1 к (3.15), получаем теорему 3.

§4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение порядка m :

$$\partial_t^m y(t) + \sum_{j=1}^m q_j(t) \partial_t^{m-j} y(t) = 0. \quad (4.1)$$

Пусть p_j ($j = 1, \dots, m$) – корни характеристического уравнения

$$l(t, p) = p^m + \sum_{j=1}^m q_j(t) p^j = 0. \quad (4.2)$$

Определим функции φ_j следующим образом (см. [4]) :

$$\varphi_j = \exp \int_T^t \sigma_j(s) ds, \quad \sigma_j(s) = p_j(s) - \sum_{k=1}^m \frac{p'_k(s)}{p_j(s) - p_k(s)}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

В предположениях (1.8) теоремы 2 существуют решения уравнения (4.1), имеющие вид (1.10), (1.10'').

Пример 2. Пусть в уравнении (1.28)

$$q(t, \xi) = \beta t^{\varepsilon-2}. \quad (4.4)$$

Случай 1 : $\varepsilon < 0$, $\beta > 0$. В этом случае условие (1.30) выполнено и можно получить асимптотические решения с помощью ВКБ-оценок (см. замечание 6).

Случай 2 : $\varepsilon = 0$. (уравнение Эйлера). В этом случае точные решения имеют вид t^λ .

Случай 3 : $\varepsilon > 0$. Если в (1.24), (1.34) выбрать

$$\alpha_1(t) = \beta(1 - \varepsilon)^{-1} t^{\varepsilon-1}, \quad \varepsilon \neq 1,$$

$$\alpha_1(t) = -\beta \ln t, \quad \varepsilon = 1, \quad (4.5)$$

то из (1.35) получим выражения

$$\alpha_{k+1}(t) \sim t^{2^k \varepsilon - 1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Если $\varepsilon \geq 2^{-n}$, то условия (1.37) выполнены и можно применить замечание 9.

Пример 3. Рассмотрим уравнение (1.19) с $q = |\xi|^2 + \alpha(t)$, т.е.

$$[\partial_t^2 + |\xi|^2 + \alpha(t)]\hat{u}(t, \xi) = 0, \quad t \in]0, T[. \quad (4.7)$$

Полагая

$$\sigma_{1,2} = \pm i |\xi| + \beta(t), \quad (4.8)$$

из условия (1.23) ($c_2 = 0$) получим

$$\varphi_j^{-1} \varphi_k \left\{ \beta + \frac{1}{2i|\xi|} (\beta_t + \alpha + \beta^2) \right\} \in L_1([0, T]), \quad k, j = 1, 2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (4.9)$$

или

$$\beta, \quad \beta_t + \beta^2 + \alpha \in L_1([0, T]). \quad (4.10)$$

Пусть

$$\beta(t) = \alpha_1(t) + \dots + \alpha_n(t), \quad (4.11)$$

где α_n определены в (1.35).

В случае

$$\alpha = t^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 2, \quad (4.12)$$

из (1.35) получим

$$\alpha_1 = (\gamma - 1)^{-1} t^{1-\gamma}, \quad \alpha_r \sim t \alpha_{r-1}^2 \sim t^{2^r}, \quad w = 2^r - 1 - 2^{r-1} \gamma. \quad (4.13)$$

Из (4.13) следуют условия (1.37) замечания 9 :

$$\alpha_n^2 \in L_1([0, T]), \quad \text{при } 0 < \gamma < 2. \quad (4.14)$$

Из замечания 9 следует

Утверждение 1. Пусть выполнено условие (4.14). Тогда для решений u уравнения (4.7) справедливы представления (1.10), (1.10'') (с $m = 2$), где функции φ_j определены в (1.22), (4.8), (4.11), (1.35).

Пример 4. Рассмотрим радиальное уравнение Шредингера

$$L\psi = [\partial_r^2 + k^2 - V(r)]\psi = 0 \quad (4.15)$$

с обобщенным колумбовым потенциалом

$$V = \rho_0 r^{-2} + \rho_1 r^{-5/3} + \rho_2 r^{-4/3} + \rho_3 r^{-1} + \rho_4 r^{-2/3} + \rho_5 r^{-1/3},$$

$$\rho_0 = l(l+1), \quad l \geq 0.$$

Случай 1 : $r \rightarrow 0$. Будем искать приближенные решения уравнения (4.15) в виде

$$\varphi_1 = r^{\alpha_1} \mu_1(r) \exp(ikr), \quad \varphi_2 = r^{\alpha_2} \mu_2(r) \exp(-ikr), \quad (4.16)$$

$$\mu_1 = 1 + \beta_1 r^{1/3} + \beta_2 r^{2/3} + \beta_3 r + \dots + \beta_s r^{s/3},$$

$$\mu_2 = 1 + \gamma_1 r^{1/3} + \gamma_2 r^{2/3} + \gamma_3 r + \gamma_4 r^{4/3} + \dots + \gamma_s r^{s/3}.$$

Коэффициенты σ_j и m_j определим из выражений

$$\mu_1^{-1} \mu_1' = \sigma_0 r^{-2/3} + \sigma_1 r^{-1/3} + \sigma_2 + \sigma_3 r^{1/3} + \dots, \quad \sigma_0 = \beta_1/3,$$

$$\mu_1^{-1} \mu_1'' = m_0 r^{-5/3} + m_1 r^{-4/3} + m_2 r^{-1} + \dots, \quad m_0 = -2\beta_1/9. \quad (4.17)$$

Прямыми вычислениями получим

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1} L\varphi_1 &= (\alpha^2 - \alpha - \rho_0) r^{-2} + (2\alpha\sigma_0 + m_0 - \rho_1) r^{-5/3} + \\ &+ (2\alpha\sigma_1 + m_1 - \rho_2) r^{-4/3} + \dots + b r^{(s-6)/3} + O(r^{(s-5)/3}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Выберем $\alpha, \beta_j, j = 1, \dots, s$ так, чтобы коэффициенты степеней r уравнялись нулю. Тогда получим

$$\alpha_1 = l+1, \quad \alpha_2 = -l, \quad \beta_1 = \frac{9\rho_1}{2(3\alpha-1)}. \quad (4.19)$$

Имеем также

$$W(\varphi_2, \varphi_1) = \varphi_1 \varphi_2 [(\alpha_1 - \alpha_2)/r + 2ik + (\ln(\mu_1/\mu_2))'] = 1 + O(r^{1/3}), \quad r \rightarrow 0,$$

$$W^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_k L\varphi_j \leq c r^{-2l+(s-5)/3} \in L_1([0, 1]), \quad k, j = 1, 2, \quad (4.20)$$

если $s > 6l + 2$.

Случай 2 : $k > 0, r \rightarrow \infty$. Приближенные решения уравнения (4.15) выберем в виде

$$\varphi_{1,2} = \exp \left\{ \pm i \int \{k^2 - V_1\}^{1/2} dr \right\}, \quad V_1(r) = \rho_3/r + \rho_4/r^{2/3} + \rho_5/r^{1/3}. \quad (4.21)$$

Из условия $k > 0$ следует существование R такого, что $k^2 - V_1 > 0$ при $r > R$.

Имеем

$$W(\varphi_2, \varphi_1) = 2i\{k^2 - V_1\}^{1/2} = 0(1); \quad \varphi_1, \varphi_2 = O(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$W^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_k L \varphi_j = O(r^{-4/3}) \in L_1[1, \infty), \quad k, j = 1, 2.$$

Случай 3 : $k = 0$, $\rho_5 < 0$, $r \rightarrow \infty$. Приближенные решения уравнения (4.15) выберем в виде

$$\varphi_{1,2} = V_2^{-1/4} \exp \pm i \left\{ \int V_2^{1/2}(r) dr \right\}, \quad V_2 = -\rho_3/r - \rho_4/r^{2/3} - \rho_5/r^{1/3}, \quad (4.22)$$

$$W^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) \varphi_k L \varphi_j = O(r^{-7/6}) \in L_1[1, \infty), \quad k, j = 1, 2.$$

Для общего решения ψ уравнения (4.15) будем иметь

$$\partial_t^k \psi = [C_1 + o(1)] \partial_r^k \varphi_1 + [C_2 + o(1)] \partial_r^k \varphi_2, \quad r \rightarrow 0 \quad \text{или} \quad r \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, \quad (4.23)$$

где φ_1, φ_2 определены в (4.16), (4.21), (4.22).

Отметим, что в случае $k = 0$, $\rho_5 > 0$, $r \rightarrow \infty$ условия теоремы 2 выполнены и представления (4.23) с асимптотическими решениями (4.22) могут быть доказаны только для $k = 0$ ([3]).

Пример 5. Рассмотрим уравнение Чаплыгина ([1])

$$F_{\theta\theta} - \frac{1 - \epsilon v^2 c^{-2}}{c^{-2} - v^{-2}} F_{vv} + v F_v = 0, \quad \epsilon = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (4.24)$$

или

$$F_{vv} - \lambda^2 F_{\theta\theta} - v \lambda^2 F_v = 0,$$

где

$$\lambda = \sigma(v - c)^{1/2} c^{-3/2}, \quad \sigma = v^{-1} c^{3/2} (c + v)^{1/2} (c^2 - \epsilon v^2)^{-1/2}.$$

Мы хотим найти асимптотические решения уравнения (4.24) вблизи сингулярной гиперплоскости $v = c$. Подставляя

$$F = a(v) u(v, \theta), \quad (4.25)$$

получим уравнение

$$u_{vv} - \lambda^2 u_{\theta\theta} + \left(\frac{2a_v}{a} - v \lambda^2 \right) u_v + \left(\frac{a_{vv}}{a} - v \lambda^2 \frac{a_v}{a} \right) u = 0.$$

Выбирая

$$a = \exp \left[\frac{1}{2} \int_c^v v \lambda^2(v) dv \right] \quad (4.26)$$

и применяя преобразование Фурье

$$\hat{u}(v, \xi) = \int \exp(-i\theta\xi) u(v, \theta) d\theta,$$

получим уравнение

$$\hat{u}_{vv} + (\xi^2 \lambda^2 + 2^{-1}(v \lambda^2)_v - 2^{-2} v^2 \lambda^4) \hat{u} = 0. \quad (4.27)$$

Преобразование

$$\hat{u} = z(\tau) \{ |\xi| \lambda(v) \}^{1/2}, \quad \tau = |\xi| \int_c^v \lambda(v) dv \quad (4.28)$$

дает

$$P_1 z = z_{\tau\tau} + (1 + \beta \tau^{-2}) z(\tau) = 0, \quad (4.29)$$

где

$$\beta = [1/2 + v \lambda_v / \lambda - v^2 \lambda^2 / 4 + 4^{-1} \lambda^{-4} (3 \lambda_v^2 - 2 \lambda \lambda_{vv})] \left[\int_c^v \lambda(v) dv \right]^2. \quad (4.30)$$

Будем искать асимптотические решения уравнения (4.29) вблизи особых точек $\tau = 0$, $\tau = \infty$. Обозначая $x = \frac{v}{c} - 1$, получаем

$$\lambda = x^{1/2} \sigma c^{-1}, \quad \sigma = (x+1)^{-1} (x+2)^{1/2} [1 - c(x+1)^2]^{-1/2}.$$

Вблизи $x = 0$ имеем

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \sigma_3 x^3 + \dots,$$

где

$$\sigma_0 = 2^{1/2} (1 - c)^{-1/2} = (\gamma + 1)^{1/2}, \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{c}{1 - c} - \frac{3}{4} = \frac{\gamma - 1}{2} - \frac{3}{4},$$

и т.д. Определим $\rho_0, \rho_1, \dots$ из соотношений

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{1}{2x} + \frac{\sigma_x}{\sigma} = \frac{1}{2x} + \rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + O(x^3),$$

где

$$\rho_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma} = (\gamma - 1)/2 - 3/4, \quad \rho_1 = \frac{2\sigma_2}{\sigma_0} - (\sigma_1/\sigma_0)^2 = \frac{5}{4}(\gamma - 1)^2 + \frac{\gamma - 1}{4} + \frac{37}{16}$$

и т.д. Из (4.28) получим

$$\tau = 2x^{3/2}|\xi|\{\sigma_0/3 + x\sigma_1/5 + \dots\} = 2|\xi|\left(\frac{v}{c} - 1\right)^{3/2}[(\gamma+1)/3]^{1/2}$$

и

$$x = \frac{v}{c} - 1 = [3\tau|\xi|^{-1}(\gamma+1)^{-1/2}]^{2/3} 2^{-2/3}.$$

Определим $k_0, k_1, \dots$ из соотношений

$$\left[\int_c^v \lambda(v) dv\right]^2 \lambda^{-2} = 4c^2 x^2 (k_0 + k_1 x + O(x^2)).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} k_0 = 1/9, \quad k_1 = \frac{1}{15} - \frac{\sigma_2}{9\sigma_0} &= -\frac{(\gamma-1)^3}{12} + \frac{11}{72}(\gamma-1)^2 - \frac{97}{720}(\gamma-1) + \frac{67}{480}, \\ \frac{3\lambda_v^2}{4\lambda^2} - \frac{\lambda_{vv}}{2\lambda} \left(\int_c^v \lambda(s) ds\right)^2 \lambda^{-2} &= \\ = \frac{5}{36} + \frac{5}{48} \left[\frac{7}{8} - \frac{13}{12}(\gamma-1) + \frac{11}{6}(\gamma-1)^2 - (\gamma-1)^3\right] x + O(x^2). \end{aligned}$$

Представляя (4.30) в виде

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 \tau^{1/3} + \beta_2 \tau^{2/3} + O(\tau),$$

находим

$$\begin{aligned} \beta_0 = 5/36, \quad \beta_1 = 0, \\ \beta_2 = \frac{5}{48} \left[\frac{7}{8} - \frac{13}{12}(\gamma-1) + \frac{11}{6}(\gamma-1)^2 - (\gamma-1)^3\right] [3|\xi|^{-1}(\gamma+1)^{-1/2} 2^{-1}]^{2/3}. \end{aligned}$$

Решение z уравнения (4.29) будем искать в виде

$$z_1 = \tau^{\gamma_1} + m_1 \tau^{\alpha_1} + m_2 \tau^{\alpha_2} + O(\tau^{\alpha_3}), \quad z_2 = \tau^{\gamma_2}. \quad (4.31)$$

Для малых τ подстановка (4.31) в (4.29) и выбор

$$\gamma(\gamma-1) + \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 = \gamma_1 + 1/3, \quad \alpha_2 = \gamma_1 + 2/3, \quad m_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j(1-\alpha_j)}, \quad j = 1, 2$$

или

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 1/6, \quad \gamma_2 = 5/6, \quad \alpha_1 = 1/2, \quad \alpha_2 = 5/6, \\ m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2(1-\alpha_2)} = \frac{36}{5} \beta_2 \end{aligned}$$

даст

$$P_1 z_1 = [\gamma_1(\gamma_1 - 1 + \beta_0)\tau^{\gamma_1-2} + \tau^{\alpha_1-2}[m_1\alpha_1(\alpha_1 - 1) + \beta_1] + \\ + \tau^{\alpha_2-2}[m_2\alpha_2(\alpha_2 - 1) + \beta_2] + \beta_3\tau^{\gamma_1-1} + \dots = O(\tau^{\gamma_1-1})$$

или

$$z_1 P_1 z_1 = O(\tau^{2\gamma_1-1}), \quad z_2 P_1 z_2 = O(\tau^{2\gamma_1-1}).$$

С учетом того, что $\gamma_1 > 0$, $2\gamma_2 > 1$, получаем оценки для функций ошибок :

$$\int_0^1 |z_j P_1 z_k| d\tau < \infty, \quad k, j = 1, 2.$$

Применяя теорему 2, получаем

$$z = \begin{cases} [C_1 \exp(i\tau) + C_2 \exp(-i\tau)](1 + o(1)), & \tau \rightarrow \infty, \quad \tau - \text{вещественно}, \\ [C_3(\tau^{1/6} + m_2\tau^{\alpha_2}) + C_4\tau^{5/6}](1 + o(1)), & \tau \rightarrow 0, \quad \tau - \text{вещественно}, \\ C_5(1 + o(1)) \exp(-i\tau), & |\tau| \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re}(i\tau) > 0 \end{cases}$$

или в предыдущих переменных

$$\hat{u} = \begin{cases} (C_1\psi_1 + C_2\psi_2)(1 + o(1)), & \tau \geq N \rightarrow \infty, \quad v > c, \\ (C_3\psi_3 + C_4\psi_4)(1 + o(1)), & \tau \leq N \rightarrow 0, \quad v > c, \\ C_5(1 + o(1))\psi_5, & \tau \geq N \rightarrow \infty, \quad c > v, \end{cases}$$

где

$$\psi_{1,2} = \{|\xi|\lambda(v)\}^{-1/2} \exp \left\{ \pm i|\xi| \int_c^v \lambda(s) ds \right\}, \quad \psi_4 = |\xi|^{1/3} \lambda^{-1/2} \left(\int_c^v \lambda(s) ds \right)^{5/6},$$

$$\psi_3 = \{|\xi|\lambda(v)\}^{-1/2} \left(|\xi| \int_c^v \lambda(s) ds \right)^{1/6} \left[1 + \nu \left(\int_c^v \lambda(s) ds \right)^{2/3} \right],$$

$$\nu = (\gamma + 1)^{-1/3} 3^{5/3} 2^{-8/3} \left[\frac{7}{8} - \frac{13}{12}(\gamma - 1) + \frac{11}{6}(\gamma - 1)^2 - (\gamma - 1)^3 \right].$$

Если $\gamma = 1$, то $\nu = 3^{5/3} 2^{-6/3}$ и

$$\psi_5 = (|\xi|\mu)^{-1/2} \exp \left\{ -|\xi| \int_c^v \mu(s) ds \right\}, \quad \mu = \frac{1}{v} (c^2 - v^2)^{1/2} (c^2 - cv^2)^{-1/2}.$$

Отметим, что если $\operatorname{Re} \mu > 0$, то $\mu = i\lambda$.

Используя асимптотическое поведение λ , имеем

$$\lambda = (\gamma + 1)^{1/2} c^{-3/2} (v - c)^{1/2}, \quad \int_c^v \lambda(s) ds = 23^{-1} (\gamma + 1)^{1/2} c^{-3/2} (v - c)^{3/2},$$

и получаем асимптотическое представление для решений уравнения Чаплыгина :

$$\hat{u} = \begin{cases} [1 + o(1)]|\xi|^{-1/2}(v - c)^{-1/4} \{C_1 \exp[\frac{2i|\xi|}{3}(\gamma + 1)^{1/2}(v - c)^{3/2}c^{-3/2}] + C_2 \times \\ \times \exp[-\frac{2i|\xi|}{3}(\gamma + 1)^{1/2}(v - c)^{3/2}c^{-3/2}]\}, & \text{если } v > c, \quad |\xi|(v - c)^{3/2} \rightarrow \infty, \\ (1 + o(1))\{C_3|\xi|^{-1/3}[1 + \nu_1(v - c)^{3/2}] + C_4(v - c)|\xi|^{1/3}\}, & \\ \text{если } v > c, \quad |\xi|(v - c)^{3/2} \rightarrow 0, & \\ (1 + o(1))C_5|\xi|^{-1/2}(c - v)^{-1/4} \exp[-\frac{2i|\xi|}{3}(\gamma + 1)^{1/2}(c - v)^{3/2}c^{-3/2}], & \\ \text{если } c > v \quad |\xi|(c - v)^{3/2} \rightarrow \infty & \end{cases}$$

$$\nu_1 = (\gamma + 1)^{1/6} 3^{2/3} 2^{-5/3} c^{-3/2} \left[\frac{7}{8} - \frac{13}{2}(\gamma - 1) + \frac{11}{6}(\gamma - 1)^2 - (\gamma - 1)^3 \right].$$

ABSTRACT. The paper establishes asymptotic representations for solutions of ordinary linear differential equations depending on a parameter. It is assumed that the coefficients of the equations are unbounded near a singular point $t = 0$. The representations can be used in the study of some equations of mathematical physics, like Schrödinger equation and Chaplygin equation. Some of the theorems proved in this paper estimate the difference between exact and asymptotic solutions while others describe the construction of asymptotic solutions. Applications to the study of correctness of weighted initial value problems near a singular point are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, В. М. Лифшиц, Гидродинамика, М., Наука, 1988.
2. N. Levinson, "The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations," Duke Math. J., vol. 15, pp. 111 — 126, 1948.
3. Ph. Hartman, Ordinary Differential Equations, John Wiley, New-York, 1964.
4. М. В. Федорюк, Асимптотические Методы для Линейных Дифференциальных Уравнений, М., Наука, 1983.
5. Г. Р. Оганесян, "ВКБ-оценки дифференциальных уравнений в частных производных и задача Коши для гиперболических уравнений второго порядка", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 25, № 2, стр. 123 — 134, 1990.
6. Г. Р. Оганесян, "Единственность решения весовой задачи Коши и новая формула для энергии", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 26, № 5, стр. 376 — 386, 1991.
7. И. Г. Петровский, Избранные Статьи. Системы Дифференциальных Уравнений в Частных Производных. Алгебраическая Геометрия, М., Наука, 1986.

20 октября 1995

Институт математики
НАН Армении