ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПОЛИДИСКЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{C}^n$

А. И. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 1, 1996

В статье получена формула типа Коши–Грина для класса функций $f(z)$, определенных в единичном полидиске D^n. Эта формула выделяет из функции f ее "аналитическую часть", которая получает операторную интерпретацию. Аналогичные результаты получены для функций, определенных в пространстве $\mathbf{C}^n$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости, $f(z)$ – комплексозначная функция, непрерывная на $\overline{D}$ вместе со своей производной $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}$. Известная формула Коши–Грина

$$f(z) = P(f)(z) + T(\overline{\partial} f)(z), \tag{1}$$

где

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

$$T(\overline{\partial} f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}\frac{d\bar\zeta \wedge d\zeta}{\zeta - z},$$

является эффективным техническим средством теории функций одного комплексного переменного. Ее удачное применение привело ко многим глубоким результатам, среди которых отметим, к примеру, решение проблемы "короны" для круга в работе Л. Карлесона [1] и решение проблемы равномерной аппроксимации на компактных подмножествах плоскости в работе А. Витушкина [2]. Еще одно применение формулы (1), связанное с $\overline{\partial}$-уравнением, основано на том, что эта формула выделяет "аналитическую часть" функции f. Это позволяет выписать в явном виде решение неоднородного уравнения Коши–Римана $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} = g$, где

g – функция, непрерывная на $\overline{D}$. А именно, одним из решений этого уравнения является функция $T(g\, d\bar{z})$.

Интегральные представления для функций многих комплексных переменных, которые являются аналогами (1), были получены сравнительно недавно. За историей этого вопроса мы отсылаем к обзорной статье Хенкина [3], где можно найти также много примеров использования метода интегральных представлений в многомерном комплексном анализе.

Выбирая соответствующим образом весовые сомножители к функции f из (1), можно получить различные весовые формулы. Например, применяя (1) к функции

$$f_z(\zeta) = \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{\alpha+1} f(\zeta), \quad \alpha > -1, \quad z \in D$$

и учитывая, что $f_z(z) = f(z)$ и $f_z(\zeta) = 0$, при $|\zeta| = 1$, получим

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{2\pi i}\int_D f(\zeta)\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+2}}\, d\overline{\zeta}\wedge d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}\right)^{\alpha+1}\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2)$$

Одно из преимуществ весовых формул типа (2) по сравнению с (1) заключается в том, что они позволяют выписывать формулы решения $\overline{\partial}$-уравнения и в том случае, когда правая часть неограничена у границы области. Формула (2) обладает еще одним замечательным свойством : выделяемая ею "аналитическая часть" является проекцией в соответсвующем весовом L^2-пространстве на подпространство голоморфных функций, поэтому выписываемые с ее помощью формулы решения $\overline{\partial}$-уравнения имеют минимальную норму в этом пространстве.

Если функция f голоморфна, т.е. $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, то второе слагаемое в (2) исчезает. Для этого случая формула впервые получена (другим способом) в [4]. В дальнейшем, в работе М. Джрбашяна [5] были введены ядра более общего типа и получены соответствующие интегральные представления (см. ниже теорему А). В той же работе [5] дано интегральное представление гладких функций, заданных на всей плоскости (Теорема В).

В настоящей работе получены многомерные интегральные представления функций, заданных в полидиске (§1) и в пространстве $\mathbf{C}^n$ (§2).

§1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПОЛИДИСКЕ

1.1. Предполагая, что $\rho > 0$, $\alpha > -1$, $\gamma > -2$ и $\mu = \dfrac{2+\gamma}{\rho}$, рассмотрим функцию типа Миттаг–Лефлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)},$$

а также функции

$$\Phi(z,\zeta) \equiv \Phi(z,\zeta;\rho,\alpha,\gamma) = \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} z\bar{\zeta};\mu)\, dt, \tag{3}$$

$$\Psi(z,\zeta) \equiv \Psi(z,\zeta;\rho,\alpha,\gamma) =$$

$$= 1 - \frac{\rho(\zeta - z)}{\Gamma(1+\alpha)\zeta} \int_0^{|\zeta|} (1-r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z/\zeta;\mu)\, dt\, dr. \tag{4}$$

Теорема А. *(см. [5]) Пусть f является гладкой функцией на $\overline{D}$. Тогда для любого $z \in D$*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_D (1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma f(\zeta) \Phi(z,\zeta)\, dV_2(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \Psi(z,\zeta) \frac{dV_2(\zeta)}{\zeta - z}. \tag{5}$$

Отметим, что формула (2) является частным случаем (5), когда $\rho = 2$, $\gamma = 0$. Соответственно

$$\Phi(z,\zeta;2,\alpha,0) = \frac{\alpha+1}{(1-z\bar{\zeta})^{\alpha+2}}, \quad \Psi(z,\zeta;2,\alpha,0) = \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\bar{\zeta}}\right)^{\alpha+1}.$$

Перечислим те свойства ядер Φ и Ψ, на которых основывается доказательство теоремы А :

а1). При фиксированном $z \in D$ функция $\Psi(z,\zeta)$ является гладкой на $\overline{D} \setminus \{0\}$ и удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial \Psi(z,\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = (z-\zeta)(1-|\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi(z,\zeta).$$

б1). При $\zeta \to 0$

$$\Psi(z,\zeta) = \begin{cases} 1 + O(|\zeta|^{\gamma+1}), & \text{при } z \neq 0, \\ 1 + O(|\zeta|^{\gamma+2}), & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

в1). $\Psi(z,\zeta) = 0$, при $|\zeta| = 1$.

г1). $\Psi(z,z) = 1$, при $z \neq 0$ и $\lim\limits_{\zeta \to 0} \Psi(0,\zeta) = 1$.

1.2. Приведем необходимые нам обозначения :

$D^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_k| < 1, k = 1, ..., n\}$ – единичный полидиск в пространстве $\mathbf{C}^n$

$$\overline{D}_k f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right), \quad \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^{n} \overline{D}_k f \, d\bar{z}_k,$$

$$d\bar{z}[k] = d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n,$$

$$d\bar{z} \wedge dz = d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

Пространство $\mathbf{C}^n$ предполагается ориентированным так, что $d\bar{z} \wedge dz = (2i)^n dV_{2n}$, где dV_{2n} означает $2n$-мерную меру Лебега в $\mathbf{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$. Обозначим через $(j_1, ..., j_{n-k})$ мультииндекс, дополнительный к $(i_1, ..., i_k)$. Для заданных чисел $\rho_k > 0$, $\alpha_k > -1$, $\gamma_k > -2$ $(k = 1, ..., n)$ пусть $\mu_k = \dfrac{2+\gamma_k}{\rho_k}$ и $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$. Пространство функций f, имеющих норму

$$\left[\int_{D^n} |f(\zeta)|^p \prod_{k=1}^{n} (1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k} |\zeta_k|^{\gamma_k} \, dV_{2n}\right]^{1/p} < \infty,$$

обозначим через $L^p_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Теорема 1. *Пусть f – гладкая в D^n функция такая, что $f, \overline{D}_k f \in L^p_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, $k = 1, ..., n$. Тогда имеет место интегральное представление*

$$f(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial} f)(z), \tag{6}$$

где

$$P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z) = \frac{1}{\pi^n} \int_{D^n} f(\zeta) \prod_{m=1}^{n} (1 - |\zeta_m|^{\rho_m})^{\alpha_m} |\zeta_m|^{\gamma_m} \Phi(z_m, \zeta_m) \, dV_{2n}(\zeta), \tag{7}$$

$$T_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial} f)(z) =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \int_{D^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}) D_{j_m} f\right] \Psi(z_{j_1}, \zeta_{j_1}) \times \cdots$$

$$\cdots \times \Psi(z_{j_{n-k}}, \zeta_{j_{n-k}}) \prod_{m=1}^{k} (1 - |\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}})^{\alpha_{i_m}} |\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}} \Phi(z_{i_m}, \zeta_{i_m}) \frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2k}}. \tag{8}$$

Заметим, что условия на функцию f по сравнению с теоремой А ослаблены : вместо гладкости на $\overline{D}$ требуется гладкость в D и условие $\overline{D}_k f \in L^1_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Предварительно докажем лемму, имеющую сугубо технический характер, введя для краткости записи следующие обозначения :

$$\Psi_m = \Psi(z_m, \zeta_m; \rho_m, \alpha_m, \gamma_m), \quad \Phi_m = \Phi(z_m, \zeta_m; \rho_m, \alpha_m, \gamma_m),$$

$$\widetilde{\Phi}_m = (1 - |\zeta_m|^{\rho_m})^{\alpha_m} |\zeta_m|^{\gamma_m} \Phi_m,$$

$$A_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \frac{|\zeta_{i_1} - z_{i_1}|^2 + \cdots + |\zeta_{i_k} - z_{i_k}|^2}{|\zeta - z|^{2n-2k+2}} \, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta,$$

$1 \leq k \leq n$,

$$B_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \int_{D^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\overline{z}_{j_m} - \overline{\zeta}_{j_m}) \overline{D}_{j_m} f \right] \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n-2k}},$$

$0 \leq k \leq n-1$.

Лемма. *Пусть* $f \in C^1(D^n)$. *Тогда* $A_k = \frac{1}{n-k}(B_k + A_{k+1})$, $1 \leq k \leq n-1$.

Доказательство. Используя тождество

$$\frac{|\zeta_{i_1} - z_{i_1}|^2 + \cdots + |\zeta_{i_k} - z_{i_k}|^2}{|\zeta - z|^{2n-2k+2}} = \frac{1}{n-k} \sum_{m=1}^{n-k} \overline{D}_{j_m} \frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}},$$

справедливость которого проверяется непосредственным вычислением, будем иметь

$$A_k = \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \overline{D}_{j_m} \frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} (-1)^{j_m - 1} \times$$

$$\times \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \, d_\zeta \left[\frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \, d\overline{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta \right]. \qquad (9)$$

Рассмотрим следующие формы бистепени $(n, n-1)$ при фиксированной точке $z \in D^n$:

$$\lambda = \lambda_{i_1, \ldots, i_k, j_m} = \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \widetilde{\Phi}_{i_1} \cdots \widetilde{\Phi}_{i_k} \frac{\overline{\zeta}_{j_m} - \overline{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \, d\overline{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta,$$

которые имеют особенности в точке $\zeta = z$ и на координатных плоскостях $\{\zeta_p = 0\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Применяя формулу Стокса в области $D^n \setminus (B_\varepsilon \cup V_\varepsilon)$, где

$$B_\varepsilon = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}, \quad V_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{n} \{\zeta : |\zeta_k| < \varepsilon\},$$

получим

$$\int\limits_{\partial D^n}\lambda-\int\limits_{\partial B_\varepsilon}\lambda-\int\limits_{\partial V_\varepsilon}\lambda=\int\limits_{D^n\setminus(B_\varepsilon\cup V_\varepsilon)}d\lambda. \tag{10}$$

Интеграл по ∂V_ε стремится к нулю вместе с ε в силу свойства б1). Оценим интеграл по сфере ∂B_ε :

$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon}\lambda\right|\le C\int\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{|d\overline{\zeta}[j_m]\wedge d\zeta|}{|\zeta-z|^{2n-2k-1}}\le C\frac{1}{\varepsilon^{2n-2k-1}}\int\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon}dS_{2n-1}\le C\varepsilon^{2k},$$

где C – константа. Перейдя к пределу при $\varepsilon\to 0$ и учитывая, что $\lambda=0$ на ∂D^n, из (10) получим $\int\limits_{D^n}d\lambda=0$, или

$$\int\limits_{D^n}d_\zeta\left[f\Psi_{j_1}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde{\Phi}_{i_1}\cdots\widetilde{\Phi}_{i_k}\right]\frac{\overline{\zeta}_{j_m}-\overline{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\overline{\zeta}[j_m]\wedge d\zeta+$$

$$+\int\limits_{D^n}f\Psi_{j_1}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde{\Phi}_{i_1}\cdots\widetilde{\Phi}_{i_k}\,d_\zeta\left[\frac{\overline{\zeta}_{j_m}-\overline{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\overline{\zeta}[j_m]\wedge d\zeta\right]=0.$$

Отсюда и из (9), с учетом свойства а1)

$$A_k=$$

$$=\frac{1}{n-k}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\int\limits_{D^n}\left[\sum_{m=1}^{n-k}(\overline{z}_{j_m}-\overline{\zeta}_{j_m})\overline{D}_{j_m}f\right]\Psi_{j_1}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde{\Phi}_{i_1}\cdots\widetilde{\Phi}_{i_k}\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n-2k}}+$$

$$+\frac{1}{n-k}\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{m=1}^{n-k}\int\limits_{D^n}f\Psi_{j_1}\cdots\overline{D}_{j_m}\Psi_{j_m}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde{\Phi}_{i_1}\cdots\widetilde{\Phi}_{i_k}\frac{\overline{\zeta}_{j_m}-\overline{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\overline{\zeta}\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{1}{n-k}B_k+\frac{1}{n-k}\times$$

$$\times\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{m=1}^{n-k}\int\limits_{D^n}f\Psi_{j_1}\cdots\widetilde{\Phi}_{j_m}\cdots\Psi_{j_{n-k}}\widetilde{\Phi}_{i_1}\cdots\widetilde{\Phi}_{i_k}\frac{|\overline{\zeta}_{j_m}-\overline{z}_{j_m}|^2}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\,d\overline{\zeta}\wedge d\zeta.$$

Объединяя слагаемые, имеющие одинаковый набор индексов, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Напомним формулу Мартинелли–Бохнера для гладких функций (см., например, [6]) :

$$u(z)=\int\limits_{\partial G}u(\zeta)\omega'(\zeta,z)-\int_G\overline{\partial}u(\zeta)\wedge\omega'(\zeta,z), \tag{11}$$

где $u(z)$ – функция, гладкая на замыкании ограниченной области G с кусочно-гладкой границей, $\omega'(\zeta, z)$ – форма бистепени $(n, n-1)$, имеющая вид

$$\omega'(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n |\zeta - z|^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)\, d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Рассмотрим сперва случай, когда f – гладкая на $\overline{D}^n$ функция. Применяя (11) в области $G = D^n \setminus V_\varepsilon$, где V_ε определяется как в лемме, к функции

$$u_z(\zeta) = f(\zeta)\Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n),$$

и учитывая свойство г1), будем иметь

$$f(z) = \int\limits_{\partial D_n} f(\zeta)\Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n)\omega'(\zeta,z) - \int\limits_{\partial V_\varepsilon} f(\zeta)\Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n)\omega'(\zeta,z) -$$

$$- \int\limits_{D_n} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge \Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n)\omega'(\zeta,z) - \int\limits_{D_n} f(\zeta)\overline{\partial}\left[\Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n)\right] \wedge \omega'(\zeta,z). \tag{12}$$

Как и в лемме получим, что интеграл по ∂V_ε стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, а интеграл по ∂D^n равн нулю. Итак

$$f(z) = -\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{D^n} \left[\sum_{k=1}^{n} (\overline{\zeta}_k - \overline{z}_k)\overline{D}_k f\right] \Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n) \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} -$$

$$- \int\limits_{D^n} f(\zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\overline{D}_i\Psi(z_i,\zeta_i)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n)\, d\overline{\zeta}_i\right] \wedge \omega'(\zeta,z) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int\limits_{D^n} \left[\sum_{k=1}^{n} (\overline{z}_k - \overline{\zeta}_k)\overline{D}_k f\right] \Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n) \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{D^n} f(\zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \Psi(z_1,\zeta_1)\cdots\widetilde{\Phi}(z_i,\zeta_i)\cdots\Psi(z_n,\zeta_n)|\zeta_i - z_i|^2\right] \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} \right\}.$$

В обозначениях леммы это равенство выглядит следующим образом :

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}(B_0 + A_1). \tag{13}$$

Из леммы последовательно получаем

$$A_1 = \frac{1}{n-1}B_1 + \frac{1}{n-1}A_2 = \frac{1}{n-1}B_1 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n-2}B_2 + \frac{1}{n-2}A_3\right) = \cdots$$

$$= \frac{1}{n-1}B_1 + \frac{1}{(n-1)(n-2)}B_2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}B_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}A_n. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left[B_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-1)\cdots(n-k)}B_k + \frac{1}{(n-1)!}A_n\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}A_n + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n}B_k. \qquad (15)$$

Заметим, что согласно определению A_k, B_k и $\widetilde{\Phi}_k$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}A_n = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{D^n} f(\zeta)\widetilde{\Phi}_1\cdots\widetilde{\Phi}_n\frac{|\zeta_1-z_1|^2+\cdots+|\zeta_n-z_n|^2}{|\zeta-z|^2}\,d\overline{\zeta}\wedge d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{D^n} f(\zeta)\widetilde{\Phi}_1\cdots\widetilde{\Phi}_n\,dV_{2n}(\zeta) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z);$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n}B_k = T_{\rho,\alpha,\gamma}(\overline{\partial}f)(z),$$

и утверждение теоремы 1 для функций, гладких на $\overline{D}^n$, следует из (15).

Рассмотрим, наконец, случай произвольной функции, которая удовлетворяет условию теоремы 1. Пусть $g_p(t)$ – последовательность функций, гладких на $[0,\infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$g_p(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \le t \le 1-\frac{3}{p}, \\ 0 & \text{при } t \ge 1-\frac{1}{p}, \end{cases} \qquad |g_p'(t)| \le p. \qquad (16)$$

Существование $g_p(t)$ очевидно. Пусть $h_p(z) = g_p(|z_1|)\cdots g_p(|z_n|)$ для $z \in \mathbb{C}^n$. Так как функции fh_p гладкие на $\overline{D}^n$, то, по доказанному

$$f(z)h_p(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(fh_p)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(\overline{\partial}(fh_p))(z) =$$

$$= P_{\rho,\alpha,\gamma}(fh_p)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(h_p\overline{\partial}f)(z) + T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\overline{\partial}h_p)(z). \qquad (17)$$

Последовательность h_p ограничена и стремится к 1 во всех точках $z \in D^n$. Поэтому

$$\lim_{p\to\infty} f(z)h_p(z) = f(z), \qquad (18)$$

$$\lim_{p\to\infty} P_{\rho,\alpha,\gamma}(fh_p)(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z), \qquad (19)$$

$$\lim_{p\to\infty} T_{\rho,\alpha,\gamma}(h_p\overline{\partial}f)(z) = T_{\rho,\alpha,\gamma}(\overline{\partial}f)(z). \tag{20}$$

Для оценки $T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\overline{\partial}h_p)$ заметим, что по построению $\overline{\partial}h_p$ отлично от нуля лишь на множестве

$$S_p = \bigcup_{k=1}^{n}\left\{z\in\mathbf{C}^n:\ 1-\frac{3}{p}\le |z_k|\le 1-\frac{1}{p}\right\}\bigcap D^n,$$

причем, как это следует из (16), на S_p имеет место неравенство

$$(1-|\zeta_k|^{\rho_k})|\overline{D}_k h_p(\zeta)| \le \ \text{Const}\ .$$

В работе [5] получена асимптотика ядер Ψ_k : $\Psi_k = O\big((1-|\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k+1}\big)$ при $|\zeta_k|\to 1$, $z_k\in D$ фиксировано. Учитывая все это, имеем

$$|T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\overline{\partial}h_p)(z)| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}(n-k-1)!\ \text{Const}\int\limits_{S_p}|f(\zeta)|\sum_{m=1}^{n-k}|\overline{D}_{j_m}h_p(\zeta)|\cdot|\Psi_{j_1}|\cdots$$

$$\cdots\Psi_{j_{n-k}}\prod_{m=1}^{k}(1-|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}})^{\alpha_{i_m}}|\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}}|\Phi_{i_m}|\,dV_{2n}(\zeta)\le$$

$$\le\ \text{Const}\int\limits_{S_p}|f(\zeta)|\prod_{k=1}^{n}(1-|\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}\,dV_{2n}(\zeta).$$

Последний интеграл стремится к нулю при $p\to\infty$, т.к. $f\in L^1_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$. Итак

$$\lim_{p\to\infty} T_{\rho,\alpha,\gamma}(f\overline{\partial}h_p)(z) = 0. \tag{21}$$

Утверждение теоремы следует из (17) – (21).

Интегральное прдставление (6) – (8) является многомерным аналогом (5) и (2). В работе П. Шарпантье [7] установлен многомерный вариант формулы (2).

1.3. Пространство $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ является гильбертовым, если скалярное произведение в нем определить следующим образом :

$$\langle f,g\rangle_{\rho,\alpha,\gamma} = \int\limits_{D^n} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\prod_{k=1}^{n}(1-|\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}\,dV_{2n}(\zeta). \tag{22}$$

Множество функций из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, голоморфных в D^n, составляет замкнутое подпространство, которое обозначим через $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Теорема 2. *Оператор $P_{\rho,\alpha,\gamma}$ является ортогональным проектором из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ на $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.*

Доказательство. Прежде всего, если $f \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, то $\overline{\partial} f = 0$, и, как следует из (6), $f(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z)$. Пусть, далее, $V(z)$ принадлежит ортогональному дополнению $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$. Имеем

$$P_{\rho,\alpha,\gamma}(V)(z) = \frac{1}{\pi^n}\left\langle V(\zeta), \prod_{m=1}^{n} \overline{\Phi(z_m,\zeta_m)}\right\rangle_{\rho,\alpha,\gamma}. \tag{23}$$

Функция $\overline{\Phi(z,\zeta)}$ при фиксированном $z \in D$ голоморфна относительно ζ в D и непрерывна в $\overline{D}$ (см. [5]). Поэтому $\prod\limits_{m=1}^{n} \overline{\Phi(z_m,\zeta_m)}$ принадлежит $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ и, как следует из (22) и (23), $P_{\rho,\alpha,\gamma}(V) \equiv 0$. Это и доказывает теорему.

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$

2.1. В работе [5] построены ядра Φ^∞ и Ψ^∞ :

$$\Phi^\infty(z,\zeta) \equiv \Phi^\infty(z,\zeta;\rho,\sigma,\gamma) = \frac{\rho\sigma^\mu}{2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z\overline{\zeta};\mu),$$

$$\Psi^\infty(z,\zeta) \equiv \Psi^\infty(z,\zeta;\rho,\sigma,\gamma) = 1 - \sigma^\mu \frac{\rho(\zeta - z)}{\zeta} \int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma r^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z/\zeta;\mu)\, dr,$$

где

$$\rho > 0, \quad \sigma > 0, \quad \gamma > -2, \quad \mu = \frac{2+\gamma}{\rho}. \tag{24}$$

Теорема B. *(см. [5]). Пусть для гладкой на комплексной плоскости функции f при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия :*

$$f(z) = O\big(e^{(1-\varepsilon)\sigma|z|^\rho}\big) \quad \text{и} \quad \overline{D} f(z) = O\big(e^{(1-\varepsilon)\sigma|z|^\rho}\big), \quad z \to \infty.$$

Тогда имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |\zeta|^\gamma e^{-\sigma|\zeta|^\rho} f(\zeta)\Phi^\infty(z,\zeta)\, dV_2(\zeta) - \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{D} f(\zeta)\Psi^\infty(z,\zeta)\frac{dV_2(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Доказательство этой теоремы основано на перечисляемых ниже свойствах а2) – г2) ядер Φ^∞ и Ψ^∞, которые вполне аналогичны свойствам а1) – г1), соответствующим случаю круга в §1).

а2).При фиксированном $z \in D$ функция $\Psi^{\infty}(z,\zeta)$ является гладкой на $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ и удовлетворяет равенству

$$\overline{D}_{\zeta}\Psi^{\infty}(z,\zeta)=(z-\zeta)|\zeta|^{\gamma}e^{-\sigma|\zeta|^{\rho}}\Phi^{\infty}(z,\zeta).$$

б2). При $\zeta\to 0$ имеем

$$\Psi^{\infty}(z,\zeta)=\begin{cases}1+O(|\zeta|^{\gamma+1}) & \text{при } z\neq 0,\\ 1+O(|\zeta|^{\gamma+2}) & \text{при } z=0.\end{cases}$$

в2). Для любого $\varepsilon>0$ имеем $\Psi^{\infty}(z,\zeta)=O\big(e^{-(1-\varepsilon)\sigma|\zeta|^{\rho}}\big)$, при $\zeta\to\infty$.

г2). $\Psi^{\infty}(z,z)=1$, при $z\neq 0$ и $\lim\limits_{\zeta\to 0}\Psi^{\infty}(0,\zeta)=1$.

2.2. Для заданных наборов чисел $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$, $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, удовлетворяющих (24), обозначим через $L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ пространство измеримых в $\mathbf{C}^n$ функций с конечной нормой

$$\left[\int\limits_{\mathbf{C}^n}|f(\zeta)|^p\prod_{m=1}^{n}|\zeta_m|^{\gamma_m}e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}}\,dV_{2n}\right]^{1/p},$$

а через $H^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ – его замкнутое подпространство, состоящее из целых функций.

Теорема 3. *Пусть f – гладкая в $\mathbf{C}^n$ функция такая, что $f,\overline{D}_k f\in L^p_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ $(k=1,\dots,n,\ p>1)$. Тогда имеет место интегральное представление*

$$f(z)=P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z)+T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}f)(z), \tag{25}$$

где

$$P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbf{C}^n}f(\zeta)\prod_{m=1}^{n}|\zeta_m|^{\gamma_m}e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}}\Phi^{\infty}_m(z_m,\zeta_m)\,dV_{2n}(\zeta), \tag{26}$$

$$T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}f)(z)=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\sum_{i_1<\dots<i_k}\int\limits_{\mathbf{C}^n}\left[\sum_{m=1}^{n-k}(\overline{z}_{j_m}-\overline{\zeta}_{j_m})\overline{D}_{j_m}f\right]\Psi^{\infty}(z_{j_1},\zeta_{j_1})\times\cdots$$

$$\cdots\times\Psi^{\infty}(z_{j_{n-k}},\zeta_{j_{n-k}})\prod_{m=1}^{k}|\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}}e^{-\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}}\Phi^{\infty}(z_{i_m},\zeta_{i_m})\frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n-2k}}. \tag{27}$$

Доказательство. Возьмем гладкую на $[0,\infty)$ функцию $v(t)$, удовлетворяющую условию

$$v(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\le t\le 1,\\ 0 & \text{при } 2\le t<\infty,\end{cases}$$

и построим последовательность функций

$$v_N(z)=v\left(\frac{|z_1|}{N}\right)\cdots v\left(\frac{|z_n|}{N}\right),\quad z\in\mathbf{C}^n,\quad N=1,2,\ldots$$

Очевидно, $v_N(z)\equiv 1$ в полидиске $D_N^n=\{z\in\mathbf{C}^n:\ |z_k|<N,\ k=1,\ldots,n\}$, и $v_N(z)\equiv 0$ вне полидиска D_{2N}^n. Далее, производные от $v_N(z)$ отличны от нуля лишь в "кольце" $D_{2N}^n\setminus D_N^n$ и, кроме того

$$|\mathrm{grad}\, v_N(z)|\le\frac{1}{N}\,\mathrm{Const}\,.$$

Рассмотрим последовательность fv_N. Поскольку эти функции финитны, то формулы (25) – (27) для них доказываются с использованием свойств а2) – г2) так же, как теорема 1 доказывалась для гладкой в $\overline{D}^n$ функции; только вместо единичногио полидиска D^n нужно взять D_N^n, при этом ввиду финитности интегралы по границе D_N^n исчезают. Итак

$$f(z)v_N(z)=P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z)+T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}(fv_N))(z)=$$

$$=P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z)+T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(v_N\overline{\partial}f)(z)+T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f\overline{\partial}v_N)(z). \tag{28}$$

Введем для краткости обозначение

$$d\mu(\zeta)=\prod_{m=1}^{n}|\zeta_m|^{\gamma_m}e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}}dV_{2n}(\zeta).$$

Имеем

$$|P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z)-P^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z)|\le\int_{\mathbf{C}^n}|f(\zeta)|\cdot|v_N(\zeta)-1|\prod_{m=1}^{n}|\Phi^{\infty}(z_m,\zeta_m)|\,d\mu(\zeta)\le$$

$$\le\int_{\mathbf{C}^n\setminus D_N^n}|f(\zeta)|\prod_{m=1}^{n}|\Phi^{\infty}(z_m,\zeta_m)|\,d\mu(\zeta).$$

Из свойств функции типа Миттаг–Лефлера следует, что функция $\prod\limits_{m=1}^{n}\Phi^{\infty}(z_m,\zeta_m)$ имеет по каждой переменной ζ_m порядок $\frac{1}{2}\rho_m$, поэтому она имеет конечную

$L^q(d\mu)$-норму. По неравенству Гельдера правая часть последнего неравенства не превосходит следующей величины :

$$\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D_N^n} |f(\zeta)|^p\, d\mu\right]^{1/p} \left[\int\limits_{\mathbb{C}^n} \prod_{m=1}^{n} |\Phi^\infty(z_m,\zeta_m)|^q\, d\mu(\zeta)\right]^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Так как $f\in L^p(d\mu)$, то при $N\to\infty$

$$|P^\infty_{\rho,\sigma,\gamma}(fv_N)(z)-P^\infty_{\rho,\sigma,\gamma}(f)(z)|\leq \text{Const}\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D_N^n} |f(\zeta)|^p\, d\mu\right]^{1/p} \to 0. \tag{29}$$

Далее имеем

$$|T^\infty_{\rho,\sigma,\gamma}(v_N\overline{\partial}f)(z)-T^\infty_{\rho,\sigma,\gamma}(\overline{\partial}f)(z)|\leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k-1)!\sum_{i_1<\cdots<i_k}\int\limits_{\mathbb{C}^n}\sum_{m=1}^{n-k}|\overline{z}_{j_m}-\overline{\zeta}_{j_m}|\cdot|v_N(\zeta)-1|\times$$

$$\times|\overline{D}_{j_m}f|\cdot|\Psi^\infty_{j_1}|\cdots|\Psi^\infty_{j_{n-k}}|\prod_{m=1}^{k}|\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}}e^{-\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}}\frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n-2k}}. \tag{30}$$

Оценим каждое слагаемое $J^N_{i_1,\ldots,i_k,j_m}$ в (30), считая точку z фиксированной и N настолько большим, что $z\in D_N^n$. Очевидно

$$\frac{|\overline{z}_{j_m}-\overline{\zeta}_{j_m}|}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\leq \text{Const}, \quad \text{при } \zeta\in\mathbb{C}^n\setminus D_N^n.$$

Далее

$$|\Phi^\infty_{i_m}|\leq \text{Const}\,\exp[(1+\delta)\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}}], \quad \text{при любом } \delta>0,$$

$$|\Psi^\infty_{j_m}|\leq \text{Const}\,\exp[-(1-\varepsilon)\sigma_{j_m}|\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}].$$

Последнее неравенство следует из в2). Имеем

$$J^N_{i_1,\ldots,i_k,j_m}\leq \text{Const}\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D_N^n}|\overline{\partial}f|\left\{\prod_{m=1}^{n-k}|\zeta_{j_m}|^{-\gamma_{j_m}}\exp[\varepsilon\sigma_{j_m}|\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}]\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{m=1}^{k}\exp\left[(1+\delta)\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}}\right]\right\}d\mu(\zeta)\leq$$

$$\leq \text{Const}\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n}|\overline{\partial}f|^p\,d\mu\right]^{1/p}\left[\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D^n}|Q|^q\,d\mu\right]^{1/q}, \tag{31}$$

где через Q обозначено выражение в фигурных скобках. Далее

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D^n} |Q|^q\,d\mu = \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus D^n_N} \prod_{m=1}^{n-k} |\zeta_{j_m}|^{-2\gamma_{j_m}} \exp[(q\varepsilon-1)\sigma_{j_m}|\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}]\times$$

$$\times\prod_{m=1}^{k} \exp\left[q(1+\delta)\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}} - \sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}\right] dV_{2n} < \text{Const} . \qquad (32)$$

Последнее неравенство следует из того, что ε можно взять столь малым, чтобы удовлетворялось неравенство $q\varepsilon - 1 < 0$. Из (30) – (32), с учетом того, что $\bar{\partial} f \in L^p(d\mu)$, следует

$$\lim_{N\to\infty} T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(v_N\bar{\partial} f)(z) = T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(\bar{\partial} f)(z). \qquad (33)$$

Аналогичными рассуждениями получаем

$$\lim_{N\to\infty} T^{\infty}_{\rho,\sigma,\gamma}(f\bar{\partial} v_N)(z) = 0. \qquad (34)$$

Кроме того, очевидно

$$\lim_{N\to\infty} f(z)v_N(z) = f(z). \qquad (35)$$

Утверждение теоремы 3 следует из (29), (33) – (35).

Формулы (25) – (27) приобретают особенно простой вид при выборе параметров $\rho_k = 2$, $\sigma_k = 1$, $\gamma_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. В этом случае

$$\Phi^{\infty}(z,\zeta,2,1,0) = \exp(z\bar{\zeta}), \quad \Psi^{\infty}(z,\zeta,2,1,0) = \exp[(z-\zeta)\bar{\zeta}],$$

$$P^{\infty}_{2,1,0}(f)(z) = \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{C}^n} f(\zeta)\exp(\langle z-\zeta,\zeta\rangle)\,dV_{2n}(\zeta),$$

$$T^{\infty}_{2,1,0}(\bar{\partial} f)(z) = \frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{C}^n} \langle\bar{\partial} f, z-\zeta\rangle \exp(\langle z-\zeta,\zeta\rangle)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!\,|z-\zeta|^{2n-2k}}\right] dV_{2n}(\zeta),$$

где $\langle a,b\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\bar{b}_k$.

Оператор $T^{\infty}_{2,1,0}$ встречается в работе [8] в связи с решением $\bar{\partial}$-уравнения.

2.3. Пространство $L^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbb{C}^n)$ со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{\rho,\sigma,\gamma} = \int\limits_{\mathbb{C}^n} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\prod_{m=1}^{n}|\zeta_m|^{\gamma_m}e^{-\sigma_m|\zeta_m|^{\rho_m}}\,dV_{2n}$$

является гильбертовым. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Оператор $P_{\rho,\sigma,\gamma}$ являтся ортогональным проектором из $L^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$ на $H^2_{\rho,\sigma,\gamma}(\mathbf{C}^n)$.*

Замечание. От гладкости f можно отказаться, в этом случае производные $\overline{D}_k f$ в формулах (6) и (25) нужно понимать в смысле обобщенных функций.

ABSTRACT. In the paper a Cauchy–Green's type formula is obtained for a class of functions $f(z)$ defined in the unit polydisc D^n. This formula separates from f its "analytical part", which receives an operator interpretation. Similar results are obtained for functions defined in the space $\mathbf{C}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Carleson, "The corona problem", Lect. Notes Math., vol. 118, pp. 121 – 132, 1970.
2. А. Г. Витушкин, "Аналитическя емкость в задачах теории приближений", Успехи Мат. Наук, т. 22, № 6, стр. 141 – 199, 1967.
3. Г. М. Хенкин, "Метод интегральных представлений в комплексном анализе", Итоги Науки : Совр. Проб. Мат., ВИНИТИ, т. 7, стр. 23 – 124, 1985.
4. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Мат. и Мех. АН АрмССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
5. М. М. Джрбашян, "Весовые интегральные представления гладких или голоморфных функций в единичном круге и в комплексной плоскости", Изв. НАН Армении. Математика, т. 28, № 4, стр. 1 – 28, 1993.
6. Б. В. Шабат, Введение в Комплексный Анализ, т. 2, М., Наука, 1985.
7. Ph. Charpentier, "Formules explicities pour les solutions minimales de l'equation $\overline{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbf{C}^n$", Ann. Inst. Fourier, vol. 30, № 4, pp. 121 – 154, 1980.
8. B. Bendtsson, M. Andersson, "Henkin-Ramirez formulas with weight factors", Ann. Inst. Fourier, vol. 32, № 3, pp. 91 – 110, 1982.

12 декабря 1995

Ереванский государственный университет