# О КОММУТАТИВНОСТИ ОБРАЗА $A$–ЗНАЧНОЙ АНАЛИТИЧСКОЙ ФУНКЦИИ

**М. И. Караханян**

**Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 31, № 1, 1996**

**Пусть $BL(H)$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве $H$. Н. Глобевник и И. Видов показали, что если множество значений операторнозначной аналитической функции $f$, определенной в области $D \subset \mathbb{C}$ со значением в алгебре $BL(H)$ состоит из нормальных операторов, то его образ $f(D)$ есть коммутативное подмножество в алгебре $BL(H)$. В настоящей работе существенно усилен этот результат.**

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $BL(H)$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве $H$. Н. Глобевник и И. Видов показали, что если множество значений операторнозначной аналитической функции $f$, определенной в области $D \subset \mathbb{C}$ со значением в алгебре $BL(H)$ состоит из нормальных операторов, то его образ $f(D)$ есть коммутативное подмножество в алгебре $BL(H)$. В дальнейшем Флеминг и Джемисон в [2] обобщили этот реизультат на случай банаховых алгебр. Пусть $A$ – комплексная банахова алгебра с единицей $\mathbf{1}$. Напомним, что элемент $h \in A$ называется эрмитовым, если $\|\exp(ith)\| = 1$ для всех вещественных чисел $t \in \mathbb{R}^1$. Это условие равносильно тому, что числовой образ

$$V(h) = \{\varphi(h): \quad \varphi \in A^*, \|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1\} \subset \mathbb{R}^1.$$

Множество всех эрмитовых элементов алгебры $A$ обозначим через $H(A)$. Отметим, что элемент $a \in A$ называется эрмитов разложимым, если $a = h + ik$, где $h, k \in H(A)$. Если коммутатор $[h,k] = hk - kh = 0$, то элемент $a$ называется нормальным. Легко видеть, что для каждого элемента $a \in A$ имеем $\mathrm{Sp}(a) \subset V(a)$ и, в частности, если элемент $a \in A$ нормален, то $\mathrm{co}(\mathrm{Sp}(a)) = V(a)$, где $\mathrm{co}(\mathrm{Sp}(a))$ – выпуклая оболочка спектра $\mathrm{Sp}(a)$ элемента $a$ (более подробно см. [3]).

Напомним, что (см. [4], [5]) элемент $h \in A$ называется квазиэрмитовым, если $\|\exp(ith)\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}^1$. Это условие обеспечиваe, чтобы спектр лежал на числовой оси $\mathbb{R}^1$, однако числовой образ $V(h)$ не обязан лежать на числовой оси. Если $a = h + ik$, где $[h, k] = 0$, и элементы $h, k$ – квазиэрмитовы в $A$, то $a$ называется квазинормальным. Вышеуказанное свойство между спектром элемента $a \in A$ и его числовым образом было бы интересно проследить и для квазинормальных элементов.

В настоящей работе, исходя из позиций работ [4 — 6], будут существенно усилены результаты работ [1], [2].

## §2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе будут получены некоторые результаты, которые имеют самостоятельный интерес и будут использованы в следующем параграфе. Целая функция $\omega(z)$, $z \in \mathbb{C}$ конечной степени принадлежит классу Полиа $\mathcal{P}$, если $\omega(z)$ не имеет нулей в открытой полуплоскости $\Im(z) < 0$ и при $\Im(z) < 0$ имеет место неравенство $|\omega(z)| > |\omega(\bar{z})|$. Функция $\omega(z) \in \mathcal{P}$ называется $\mathcal{P}$–майорантой для целой функции конечной степени $f(z)$, если степень $\omega(z)$ не меньше, чем степень $f(z)$ и $|f(x)| \le |\omega(x)|$ при $-\infty < x \le \infty$, где $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Для дальнейшего нам понадобится следующая важная теорема, являющаяся обобщением теорем Бернштейна (см. [7], [8]) :

*Если степень $\omega(z) \in \mathcal{P}$ не меньше степени $f(z)$, $|f(x)| \le |\omega(x)|$, где $x \in \mathbb{R}^1$, то $|f^{(p)}(x)| \le |\omega^{(p)}(x)|$; если функция $\omega(x)$ не есть многочлен и для какой-нибудь точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$ выполняется неравенство $|f^{(p)}(x_0)| \le |\omega^{(p)}(x_0)|$, то $f(x) = c_1\omega(x) + c_2\overline{\omega}(x)$, где $|c_1| + |c_2| = 1$.*

Пусть $\widehat{a} = (a_n)_1^\infty$ есть такая последовательность элементов банаховой алгебры $A$, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \rho_{\hat{a}} < \infty. \tag{1}$$

Тогда функция $\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ является $A$–значной целой функцией экспоненциального типа $\rho_{\hat{a}}$. Число $\rho_{\hat{a}}$ определяет конечность радиуса наименьшего круга $|r| < R$, вне которого сходится $A$–значный степенной ряд $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$. Отметим, что $\mathcal{A}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\rho_{\hat{a}}+\varepsilon} a(t)e^{zt}\,dt$. Хорошо известно, что преобразование Бореля $B$: $a(z) \to \mathcal{A}(z)$ устанавливает линейный изоморфизм между всеми $A$–значными функциями $a(z)$, аналитическими в окрестности $\infty$, и множеством всех $A$–значных целых функций экспоненциального типа [9]. В случае, когда $a_n = a^n$, $a \in A$, функция $a(z) = (z\mathbf{1} - a)^{-1}$ есть резольвента элемента $a$, а $\mathcal{A}(z) = e^{za}$.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty}$ элементов алгебры $A$ удовлетворяет условию (1).

Будем говорить, что последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$, если функция $\mathcal{A}_{\varphi}(z) = \varphi[\mathcal{A}(iz)]$ имеет $\mathcal{P}$–майоранту для всех $\varphi$ из единичной сферы $S(A^*)$ в сопряженном пространстве $A^*$. Будем говорить, что элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$, если последовательность $\hat{a} = (a^n)_1^{\infty}$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$.

**Предложение 1.** *Пусть последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$. Тогда $\|a_n\| \leq \inf\{|\omega_{\hat{a}}^{(n)}(0)|: \quad \omega_{\hat{a}} \in \mathcal{P}\}$, где $\omega_{\hat{a}}(z)$ – $\mathcal{P}$–майоранты $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$.*

**Доказательство.** Рассмотрим функцию $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$. $\mathcal{A}_{\varphi}^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(iz)^{n-p}\varphi(a_n)}{(n-p)!}$, поэтому $\mathcal{A}_{\varphi}^{(p)}(0) = \varphi(a_p)$. Функция $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$ – целая, экспоненциального типа и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_{\hat{a}}(z)$. Согласно обобщенной теореме Бернштейна имеем $|\mathcal{A}_{\varphi}^{(p)}(x)| \leq |\omega_{\hat{a}}^{(p)}(x)|$ так, что $|\varphi(a_p)| \leq |\omega_{\hat{a}}^{(p)}(0)|$.

**Предложение 2.** *Пусть последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ принадлежит $\mathcal{P}(A)$ и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_{\hat{a}}(z)$ типа $\sigma_{\omega_{\hat{a}}} \leq \rho_{\hat{a}}$. Тогда*

$$\|a_1\| \leq |\omega_{\hat{a}}'(0)| + \sigma_{\omega_{\hat{a}}} + \rho_{\hat{a}}. \tag{2}$$

**Доказательство.** Рассмотрим целую функцию $\mathcal{A}_{\varphi}(z)$. Так как $\sigma_{\mathcal{A}_{\varphi}} = \rho_{\hat{a}} \geq \sigma_{\omega_{\hat{a}}}$, то имеем

$$|\mathcal{A}_{\varphi}'(x)| \leq \left|\{\omega_{\hat{a}}(x)\exp\left(-i(\rho_{\hat{a}} - \sigma_{\omega_{\hat{a}}})x\right)\}'\right|.$$

Следовательно

$$\|a_1\| \le |\omega_{\hat{a}}'(0)| + (\rho_{\hat{a}} - \sigma_{\omega_{\hat{a}}})\,|\omega_{\hat{a}}(0)| \le |\omega_{\hat{a}}'(0)| + (\rho_{\hat{a}} + \sigma_{\omega_{\hat{a}}})\,|\omega_{\hat{a}}(0)|$$

из условия $\omega_{\hat{a}}(0) = 1$ следует (2).

**Предложение 3.** *Пусть последовательность $\hat{a} = (a_n)_1^{\infty} \subset A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$ и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_{\hat{a}}(z)$ нулевого рода. Тогда для любого натурального $p$*

$$\|a_p\| \le \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} |\omega_{\hat{a}}^{(p-j)}(0)|\, \rho_{\hat{a}}^{j}. \tag{3}$$

**Доказательство.** Так как $\omega_{\hat{a}}(z)$ имеет нулевой род, то из предложения 2 следует, что для любого натурального $p$

$$\left|A_{\varphi}^{(p)}(x)\right| \le \left|\{\omega_{\hat{a}}(x)\exp(-i\rho_{\hat{a}}x)\}^{(p)}\right|, \quad \text{где} \quad -\infty < x < \varphi.$$

Отсюда получаем (3), завершив доказательство.

В частности, если $\omega_{\hat{a}}(0) = 1$, то имеем (2). Как следствия из предложений 1 — 3 имеем :

**Следствие 1.** Если элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$, то $\|a^p\| \le \le \inf |\omega_a^{(p)}(0)|$, где инфимум взят по всем $\mathcal{P}$–майорантам элемента $a$.

**Следствие 2.** Пусть элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$ и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_a(z)$ типа $\sigma_{\omega_a} \le \rho(a)$, где $\rho(a)$ – спектральный радиус элемента $a$. Тогда

$$\|a\| \le |\omega_a'(0)| + \rho(a) + \sigma_{\omega_a}.$$

**Следствие 3.** Пусть элемент $a \in A$ принадлежит классу $\mathcal{P}(A)$ и имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_a(z)$ нулевого рода. Тогда для любого натурального $p$

$$\|a^p\| \le \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} |\omega_a^{(p-j)}(0)|\, \rho(a)^j.$$

В частности, если $\omega_a(0) = 1$, то $\|a\| \le |\omega_a'(0)| + \rho(a)$.

Для $\sigma > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}^1$ обозначим через $B_\sigma(\alpha)$ банахово пространство всех целых функций $f$ экспоненциального типа не больших чем $\sigma$, для которых

$$\|f\|_{\sigma,\alpha} := \sup \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{\alpha}} < \infty.$$

При $\alpha = 0$ мы получаем классическое пространство Бернштейна $B_\sigma(0) = B_\sigma$. При $\alpha \leq \beta$ имеем $B_\sigma(\alpha) \subseteq B_\sigma(\beta)$. Из теоремы Фрагмена–Линделефа вытекает, что для всех $f \in B_\sigma(\alpha)$

$$|f(z)| \leq C_f(1+|z|)^\alpha e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \qquad z = x + iy \in \mathbf{C}.$$

Из теоремы Коши и вышеуказанного неравенства следует, что оператор дифференцирования $\delta = \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dz}$ непрерывно действует в пространстве $B_\sigma(\alpha)$ и, кроме того, в пространстве $B_\sigma(\alpha)$ существует функция $\omega(z)$, для которой на вещественной оси выполняется следующее неравенство :

$$M_1(1+|x|)^\alpha \leq |\omega(x)| \leq M_2(1+|x|)^\alpha, \quad \text{где} \quad M_1, M_2 > 0 \quad \text{– константы.}$$

Отсюда заключаем, что в пространстве $B_\sigma(\alpha)$ имеет место следующая асимптотика :

$$\|\exp(ix\delta)\| \sim (1+|x|)^\alpha, \quad \text{где} \quad x \to \pm\infty.$$

Более подробно об этом можно найти в [10].

**Следствие 4.** Пусть $h \in A$ – элемент из класса $\mathcal{P}(A)$, который имеет $\mathcal{P}$–майоранту $\omega_h(z) \in B_{\rho(h)}(\alpha)$, где $\alpha \geq 0$. Тогда

$$\|h\| \leq M(\rho(h) + \alpha), \qquad \text{где} \quad M \quad \text{– константа.}$$

**Доказательство.** Рассмотрим целую функцию $\omega_h(z) = E_1(i\rho(h)z; 1+\alpha)$, где $E_1(z;\alpha)$ – функция Миттаг–Лефлера (см. [11]). Тогда при $x \to \pm\infty$

$$|\omega_h(x)| \leq M_1(1+\rho(h)|x|)^\alpha + \frac{M_2}{1+\rho(h)|x|}$$

и значит при подходящей константе, в силу следствия 3, для любого натурального $p$

$$\|h^p\| \leq M\left[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\alpha^{p-j}\rho(h)^j\right] = M(\alpha+\rho(h))^p.$$

В частности, для $p = 1$ имеем $\|h\| \leq M(\alpha + \rho(h))$.

**Замечание 1.** Если для $h \in A$ имеем $\|\exp(ith)\| = O(|t|^\alpha)$, при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha \geq 0$, то $\|h\| \leq M(\alpha + \rho(h))$.

**Замечание 2.** Если $\alpha = 0$, то из замечания 1 следует теорема Кацнельсона (см. [12]).

**Замечание 3.** Пусть $a = h + ik$ – квазинормальный элемент алгебры $A$. Тогда $\|h\| \leq M(1/2 + \rho(h))$, $\|k\| \leq M(1/2 + \rho(k))$ и значит

$$\|a^+\| = \|h - ik\| \leq \|h\| + \|k\| \leq M(1 + \rho(h) + \rho(k)) \leq M(1 + 2\|a\|).$$

Отметим, что для нормального элемента $a \in A$ имеем $\|a^+\| \leq 2\|a\|$, и эта оценка точная. Было бы интересно уточнить значение константы $M$ в вышеуказанном неравенстве.

## §3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе докажем основной результат статьи и некоторые следствия из него. Для этого напомним известные определения, а также докажем вспомогательные утверждения.

Пусть семейство $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}^1} \subset A$ есть равномерно непрерывная однопараметрическая гуппа в $A$, т.е. $u(t+s) = u(t)u(s)$, $u(0) = \mathbf{1}$, и пусть $u(t)$ – равномерно непрерывна в точке $O$, т.е. $\lim\limits_{t \to \infty} \|u(t) - \mathbf{1}\| = 0$. Это условие эквивалентно следующим двум условиям :

i) $u(t)$ равномерно дифференцируема при $t = 0$, т.е. существует элемент $a \in A$ такой, что $\lim\limits_{t \to 0} \left\| \dfrac{u(t) - \mathbf{1}}{t} - a \right\| = 0$;

ii) существует элемент $a \in A$ такой, что $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n a^n}{n!} = \exp(ta)$ и $\|u(t)\| \leq \exp(|t| \cdot \|a\|)$.

Для достаточно малых значений $t$ имеем $\left\| 1/t \int_0^t u(s)\, ds - \mathbf{1} \right\| < 1$ и значит $\mu(t) = 1/t \int_0^t u(s)\, ds \in A^{-1}$. Так как

$$\frac{u(\varepsilon) - \mathbf{1}}{\varepsilon} \mu(t) = \frac{1}{t\varepsilon} \int_0^t ds [u(s + \varepsilon) - u(\varepsilon)] =$$

$$= \frac{1}{t\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} u(s)\, ds - \frac{1}{t\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} u(s)\, ds = \frac{u(t) - \mathbf{1}}{t} \mu(\varepsilon),$$

то правая часть этого соотношения при $\varepsilon \to 0$ стремится к $\dfrac{u(t) - \mathbf{1}}{t}$. Следовательно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \frac{u(\varepsilon) - \mathbf{1}}{\varepsilon} - \frac{u(t) - \mathbf{1}}{t} \mu(t)^{-1} \right\| = 0.$$

Таким образом, $u(t)$ равномерно дифференцируема и ее генератор $a$ в точке $O$ задается выражением $a = \dfrac{u(t)-1}{t}\,\mu(t)^{-1}$. Из этого равенства получаем интегральное уравнение $u(t) - 1 = a\int_0^t u(s)\,ds$, которое методом последовательных приближений приводит к равенству $u(t) = \exp(ta)$. Из сказанного следует, что сумма генераторов и равномерные пределы генераторов снова будут генераторами. Легко видеть, что если $u(t)$ и $v(t)$ – равномерно непрерывные группы с генераторами $a$ и $b$, соответственно, то $u(t) - v(t) = t\int_0^1 u(st)(a-b)\,v((1-s)t)\,ds$ и значит

$$\|u(t) - v(t)\| \leq t\exp\left(|t|\,(\|a\| + \|b\|)\right)\cdot\|a - b\|.$$

**Предложение 4.** *Пусть $\{h_n\} \subset A$ – последовательность квазиэрмитовых элементов и $h_n \to h$ при $n \to \infty$. Тогда $h \in A$ – квазиэрмитов элемент.*

**Доказательство.** Так как $h_n \to h$, то

$$\|\exp(ith_n) - \exp(ith_m)\| \leq |t|\;o(|t|)\cdot\|h_n - h_m\|.$$

Таким образом, последовательность $\{\exp(ith_n)\}_{n=1}^{\infty}$ есть фундаментальная последовательность относительно равномерной по $t$ сходимости по норме $A$ на каждом компакте в $\mathbb{R}^1$. Следовательно, существует $u(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\exp(ith_n) \in A$ в том же смысле. Нетрудно видеть, что $u(t+s) = u(t)u(s)$, $u(0) = 1$ и $\lim\limits_{t\to 0}\|u(t) - 1\| = 0$, а значит $u(t) = \exp(ith)$. Тогда $\|\exp(ith)\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|\exp(ith_n)\|$ в смысле равномерной сходимости по $t$ на любом компакте в $\mathbb{R}^1$. Так как $\|\exp(ith_n)\| = o(|t|^{1/2})$ при $|t| \to \infty$, то $\|\exp(ith)\| = o(|t|^{1/2})$. Мы доказали предложение 4, а также нашли, что предел последовательности квазинормальных элементов есть квазинормальный элемент.

**Теорема 1.** *Пусть $A$ – комплексная банахова алгебра с единицей $1$, $\Delta = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ и $f\colon \Delta \to A$ есть такая $A$–значная аналитическая функция, что при каждом $z \in \Delta$ $f(z)$ есть кжазинормальный элемент алгебры $A$. Тогда образ $f(\Delta)$ – коммутативное подмножество в $A$.*

**Доказательство.** Так как

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j, \qquad \text{при} \quad z \in \Delta,$$

то $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|a_j\| r^j < \infty$ при $0 \le r < 1$. Для каждого $z \in \Delta$

$$[f(z), f^+(z)] = f(z)f^+(z) - f^+(z)f(z) = 0.$$

Производя почленное умножение, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{j}[a_m, a_{j-m}^+]\right) z^m \bar{z}^{j-m} = 0. \tag{4}$$

Поскольку $a_j = \dfrac{f^{(j)}(0)}{j!}$, то $a_j$ являются квазинормальными элементами и значит $\|a_j^+\| \le M[1 + 2\|a_j\|]$, откуда имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|a_j^+\| r^j \le M \left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j + 2\sum_{j=0}^{\infty}\|a_j\| r^j\right) < \infty \quad \text{при} \quad 0 \le r \le 1.$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|a_j\| r^j$ и $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|a_j^+\| r^j$ следует, что при $0 \le r < 1$ сходится и ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{j}[a_m, a_{j-m}^+]\right) r^j. \tag{5}$$

Таким образом, ряд в (4) равномерно сходится в каждом замкнутом диске внутри $\Delta$. Пусть $p \in \mathbf{N}$. Умножая (4) на $z^{p-1}$ и почленно интегрируя по границе диска $\Delta_r = \{|z| \le r\}$, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}[a_j, a_{j+p}^+]\, r^{2(j+p)}, \quad \text{при} \quad 0 \le r \le 1.$$

Сходимость ряда (5) показывает, что ряд

$$h_p(z) = \sum_{j=0}^{\infty}[a_j, a_{j+p}^+]\, z^{2(j+p)}$$

абсолютно сходится в $\Delta$ и значит $A$–значные функции $h_p(z)$ являются аналитическими функциями в круге $\Delta$. Из условия $h_p(r) = 0$ имеем

$$[a_j, a_{j+p}^+] = 0 \quad \text{при} \quad j \in \mathbf{N}.$$

Ввиду произвольности натурального $p$ имеем, что $[a_j, a_l^+] = 0$, где $j, l \in \mathbf{N}$. Так как элементы $a_j$ квазинормальны, то используя теорему Фугледе (см. [4] — [6]), получаем $[a_j, a_l] = 0$. Теорема 1 доказана.

**Замечание 4.** Вместо единичного диска $\Delta$ можно взять произвольную область $D$.

**Замечание 5.** Ввиду того, что существует (см. [10]) банахова алгебра $A_0$ с таким элементом $a_0 = h_0 + ik_0 \in A$, что $[h_0, k_0] = 0$, $\|\exp(ith_0)\| = O(|t|^{1/2})$, $\|\exp(itk_0)\| = O(|t|^{1/2})$, при $|t| \to \infty$, $t \in \mathbb{R}^1$, где $a_0 \in Z(A_0)$ (центр алгебры), однако $a_0^+ = h_0 - ik_0 \notin Z(A_0)$, то получаем, что теорема 1 является точной.

Следуя Г. Вайсу [13], будем говорить, что двусторонний идеал $I$ удовлетворяет обобщенному свойству Фугледе (GFP), если для каждого квазинормального элемента $a \in A$ и элемента $b \in A$ из условия $[a, b] \in I$ следует, что $[a^+, b] \in I$.

**Теорема 2.** *Пусть $A$ – комплексная банахова алгебра с единицей* 1. *Тогда каждый замкнутый двусторонний идеал $I \subset A$ удовлетворяет условию (GFP).*

**Доказательство.** Пусть $a \in A$ – квазинормальный элемент и $b \in A$ – такой элемент, что $[a, b] \in I$. Пусть $\pi_I\colon A \to A/I$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом $I$ и $a_I = \pi_I(a)$. Так как $[a, b] \in I$, то $[a_I, b_I] = 0$ и $[a^p, b] \in I$ для $p \geq 2$. Следовательно, $\left[\exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I\right), b\right] \in I$ и $\left[\exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I\right), b_I\right] = 0$. Мы получили, что

$$b_I = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda a_I\right) \cdot b_I \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I\right).$$

Пусть $\varphi \in (A/I)^*$, $\|\varphi\| = 1$ и

$$f_\varphi(\lambda) = \varphi\left[\exp\left(\frac{1}{2}\lambda a_I^+\right) \cdot b_I \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda a_I^+\right)\right] = \varphi[u_I(\lambda) \cdot b_I \cdot \overline{u}_I(\lambda)],$$

где $u_I(\lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda a_I^+ - \lambda a_I)\right]$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

Так как $\|u_I(\lambda)\| = o(|\lambda|^{1/2})$ при $|\lambda| \to \infty$, то $|f|_\varphi(\lambda)| = o(|\lambda|)$. В силу теоремы Лиувилля $f_\varphi(\lambda) \equiv f_\varphi(0)$ и значит $[a^+, b] \in I$. Доказательство завершено.

Напомним, что банахова алгебра $A$ называется простой, если она содержит ровно один нетривиальный замкнутый двусторонний идеал $I$. В связи с этим, банахово пространство $X$ называется простым, если операторная алгебра $BL(X)$ – простая алгебра.

Операторные алгебры $BL(l_p)$, $BL(C_0)$, при $1 \leq p < \infty$ являются простыми. Однако $BL(L_p[0,1]))$ $(1 \leq p < \infty, p \neq 2)$ и $BL(C([0,1]))$ не являются простыми алгебрами (см. [14]).

Пусть $I$ – замкнутый двусторонний идеал в $A$. Скажем, что элемент $a \in A$ квазинормален по модулю идеала $I$, если существует такой квазинормальный элемент $b \in A$, что $a - b \in I$.

Множество $E \subset A$ назовем коммутативным по модулю идеала $I$, если для любых элементов $a, b \in E$ имеем, что $[a, b] \in I$. В случае $I = \{0\}$ получаем обычное коммутативное множество. Если, в частности, $I = \mathrm{Rad}(A)$, то имеем коммутативное множество по модулю радикала алгебры $A$. В случае $A = BL(H)$ в качестве $I$ можно взять идеал $\mathcal{K}(H)$ компактных операторов, который является единственным замкнутым двусторонним идеалом в этой алгебре. В случае $A = BL(X)$, где $X$ – банахово пространство, таких идеалов бесконечно много. Следующая теорема является следствием теоремы 1.

**Теорема 3.** *Пусть $A$ – комплексная банахова алгебра с единицей, $I$ – замкнутый двусторонний идеал в $A$. Пусть $f(z)$ – $A$–значная аналитическая функция такая, что для каждого $z \in \Delta$, $f(z)$ – квазинормальный элемент по модулю $I$. Тогда $f(\Delta)$ есть коммутативное по модулю идеала $I$ подмножество в алгебре $A$.*

**Доказательство.** Пусть $\pi_I : A \to A/I$ – канонический гомоморфизм, порожденный идеалом $I$. Рассмотрим функцию $f_I(z) = \pi_I(f(z)) : \Delta \to A/I$. Тогда при каждом $z \in \Delta$, $f_I(z)$ – квазинормальный элемент в фактор–алгебре $A/I$. В силу теоремы 1 множество $f_I(\Delta)$ есть коммутативное подмножество в $A/I$, т.е. для любых $z, z' \in \Delta$ имеем $[f_I(z), f_I(z')] = 0$, откуда следует, что $[f(z), f(z')] \in I$, что и требовалось доказать.

**ABSTRACT.** Let $BL(H)$ be Banach algebra of all bounded linear operators defined on a complex Hilbert space. H. Globevnik and I. Vidav have demonstrated that if the values of operator–valued analytic function $f$ defined in the connected open set $D \subset \mathbf{C}$ with value in the algebra $BL(H)$ are normal operators, then the range of $f(D)$ is a commutative subset in the algebra $BL(H)$. In the present paper this result is essentially strengthened.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Globevnik, I. Vidav, "A note on normal– operator–valued analytic functions", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 37, no. 2, pp. 619 — 621, 1973.
2. R. J. Fleming, J. E. Jamison, "Commutative ranges of analytic functions in Banach algebras", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 93, no. 1, pp. 48 — 50, 1985.

3. F. Bonsall, T. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer, 1973.
4. Е. А. Горин, М. И. Караханян, "Асимптотический вариант теоремы Фугледе–Путнама о коммутаторах для элементов банаховых алгебр", Мат. Заметки, т. 22, № 2, стр. 179 – 188, 1977.
5. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов элементов банаховых алгебр", Изв. АН АрмССР, Математика, т. 19, № 5 – 6, стр. 405 — 421, 1978.
6. М. И. Караханян, "Асимптотические свойства коммутаторов", Изв НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 43– 49, 1994.
7. Н. И. Ахиезер, Лекции по Теории Аппроксимации, М., Наука, 1965.
8. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1966.
9. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
10. Е. А. Горин, "Обобщение Одной Теоремы Фугледе, Алгебра и Анализ, № 5, 1993.
11. М. М. Джрбашян, "Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области", М., Наука, 1966.
12. В. Е. Кацнельсон, "У консервативного оператора норма совпадает с спекральным радиусом", Мат. Исслед., т. 5, № 3, стр. 186 — 189, 1970.
13. G. Weiss, "The Fuglede commutativity theorem module operator ideals", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 83, № 1, pp. 113 — 118, 1981.
14. А. Пич, Операторные Идеалы, М., Мир, 1978.

8 декабря 1995 Ереванский государственный университет