ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ГЛАДКОСТИ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ

А. Г. Багдасарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 1, 1996

В статье мы доказываем интерполяционную теорему для H - и B -пространств типа Соболева–Лиувилля и Никольского–Бесова с разными анизотропиями, предполагая, что одно из интерполяционных пространств вложено в другое. С помощью классических анизотропных пространств на плоскости мы доказываем формулу представления для пространства обобщенной гладкости, порожденного вполне правильным многогранником.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] Х. Трибель назвал “нерешенной проблемой” задачу описания интерполяционных пространств между двумя анизотропными пространствами разной анизотропии (см. стр. 377). В работе [2] мы доказали интерполяционные теоремы в более общей ситуации, рассматривая пространства $H_p^\mu(\mu; \mathbb{R}^n)$ и $B_{p,q}^\mu(\mu; \mathbb{R}^n)$, которые при конкретизации функции $\mu(\xi)$ совпадают с анизотропными классами. Оказалось, что интерполяция между классическими анизотропными пространствами разной анизотропии приводит нас к пространствам, порожденным некоторым вполне правильным многогранником (см. [3]). Такого рода H -пространства были рассмотрены в [4], а B -пространства (они возникают при “вещественной” интерполяции) были рассмотрены в [5], [6].

В настоящей работе мы обобщаем результаты работы [2] и доказываем интерполяционные формулы при ослабленных предположениях. Поскольку интерполируя между анизотропными классами мы приходим к пространствам, порожденным вполне правильным многогранником, естественно поставить обратный

вопрос : можно ли каждое из пространств типа H (Соболева–Лиувилля) и B (Никольского–Бесова), порожденных вполне правильным многогранником, представить в виде интерполяционного пространства между анизотропными классами? На этот вопрос мы даем положительный ответ при $n = 2$ (теорема 2).

Поставленный вопрос, кроме приведенной мотивации интересен и сам по себе, учитывая, что с помощью возможных представлений можно распространить множество результатов для классических анизотропных классов и на случай пространств, порожденных вполне правильным многогранником.

§2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство,

$\mathbb{Z}_n^+$ – множество мультииндексов, т.е. векторов с целыми неотрицательными компонентами,

S – класс Шварца,

M_p – пространство мультипликаторов Фурье типа (p, p) ,

F – оператор преобразования Фурье.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_n^+$ положим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$.

Определение 1. Неустой многогранник $\mathcal{N}$ с вершинами из $\mathbb{Z}_n^+$ назовем *полным*, если начало координат является вершиной $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}$ имеет вершины на каждой оси координат $\mathbb{Z}_n^+$. Полный многогранник $\mathcal{N}$ назовем *вполне правильным*, если внешние нормали $(n-1)$ -мерных некоординатных граней $\mathcal{N}$ имеют только положительные координаты.

Пусть $\mathcal{N}$ – полный многогранник с вершинами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_N$, при этом вершина α_j находится на j -той оси ($j = 1, \dots, n$) и $\alpha_0 = (0, \dots, 0)$. Сопоставим многограннику $\mathcal{N}$ функцию

$$\mu(\xi) = \left(\sum_{j=1}^n \xi^{2\alpha_j} + \sum_{i=1}^N \xi^{2\beta_i} \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$. Через $\Phi(\mu; \mathbb{R}^n)$ обозначим множество систем функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$, обладающих следующими свойствами :

а) $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^n)$, $(F\varphi_k)(\xi) \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$

б) $\text{supp } F\varphi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \leq \mu(\xi) \leq 2^{k+1}\}$, $\text{supp } F\varphi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \mu(\xi) \leq 2\}$,

в) $\sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(\xi) \equiv 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$,

г) $\|F\varphi_k\|_{M_p} \leq C$, $k = 1, 2, \dots$

Пример системы из $\Phi(\mu; \mathbb{R}^n)$ приведен в [5].

Определение 3. Пусть $1 < p, q < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\{\varphi_k\} \in \Phi(\mu; \mathbb{R}^n)$, и пусть S' — класс, сопряженный классу Шварца S . Положим

$$H_p^s(\mu; \mathbb{R}^n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_H = \|F^{-1}\{(1 + \mu^2)^{s/2} Ff\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

$$B_{p,q}^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|_B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|f * \varphi_k\|_{L_p}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Если вершины многогранника $\mathcal{N}$ не являются мультииндексами, то H и B -пространства определяются как пополнение класса Шварца S .

В работе [2] были доказаны интерполяционные формулы для H и B -пространств с разными анизотропиями (разными порождающими многогранниками или разными порождающими функциями $\mu(\xi)$).

§3. ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВ С РАЗНЫМИ АНИЗОТРОПИЯМИ

Пусть $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}_1$ — порождающие многогранники интерполяционных пространств. В [2] мы предположили, что $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ и что некоординатные грани этих многогранников не имеют общих точек (см. [2], теорему 7 и замечание 3). Следующая теорема обобщает теорему 7 работы [2], освобождая ее от второй части условия.

Теорема 1. Пусть

$$0 < \theta < 1, \quad 1 < p_0, p_1, p, q_0, q_1, r < \infty, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

и пусть функции μ_i порождены полными многогранниками $\mathcal{N}_i$ ($i = 0, 1$). Пусть далее $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$. Тогда

$$а) \quad \left(B_{p,q_0}^1(\mu_0), B_{p,q_1}^1(\mu_1) \right)_{\theta,r} = B_{p,r}^1(\mu_0^{1-\theta} \mu_1^\theta),$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad & \left(B_{p_0, p_1}^1(\mu_0), B_{p_1, q_1}^1(\mu_1) \right)_{\theta, p^*} = B_{p^*, q^*}^1(\mu_0^{1-\theta} \mu_1^\theta), \\
 в) \quad & \left[B_{p_0, q_0}^1(\mu_0), B_{p_1, q_1}^1(\mu_1) \right]_{\theta} = B_{p^*, q^*}^1(\mu_0^{1-\theta} \mu_1^\theta), \\
 г) \quad & \left(H_p^1(\mu_0), H_p^1(\mu_1) \right)_{\theta, r} = B_{p, r}^1(\mu_0^{1-\theta} \mu_1^\theta).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем формулу а); формулы б) – г) доказываются аналогично. Согласно вышеизложенному результату [2] достаточно предполагать, что некоординатные грани многоугольников $\mathcal{N}_0$ и $\mathcal{N}_1$ имеют, по крайней мере, одну общую точку. Воспользуемся теоремой вложения разных метрик для B -пространств (см. [2], теорему 7). Имеем

$$B_{p, q_0}^{1+\varepsilon}(\mu_0) \subset B_{p, q_0}^1(\mu_0), \quad B_{p, q_1}^1(\mu_1) \subset B_{p, q_1}^{1-\varepsilon}(\mu_1), \quad \varepsilon > 0,$$

причем константы, фигурирующие в этих вложениях, не зависят от ε . Тогда

$$\left(B_{p, q_0}^{1+\varepsilon}(\mu_0), B_{p, q_1}^1(\mu_1) \right)_{\theta, r} \subset \left(B_{p, q_0}^1(\mu_0), B_{p, q_1}^1(\mu_1) \right)_{\theta, r} \subset \left(B_{p, q_0}^1(\mu_0), B_{p, q_1}^{1-\varepsilon}(\mu_1) \right)_{\theta, r}. \quad (2)$$

Первые и последние интерполяционные пространства в (2) определяются с помощью теоремы 7 из [2], т.к. некоординатные грани соответствующих многогранников уже не имеют общих точек. Тогда (2) принимает вид

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= B_{p, r}^1(\mu_0^{(1+\varepsilon)(1-\theta)} \mu_1^\theta), \quad A_2 = \left(B_{p, q_0}^1(\mu_0), B_{p, q_1}^1(\mu_1) \right)_{\theta, r}, \\
 A_3 &= B_{p, r}^1(\mu_0^{1-\theta} \mu_1^{(1-\varepsilon)\theta}).
 \end{aligned}$$

Каждое из B -пространств в (3) порождено некоторой системой $\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$. Чтобы различить эти системы друг от друга вместо φ_k напишем $\varphi_k(\mu)$, где μ – соответствующая порождающая функция типа (1). В частности

$$\left\{ \varphi_k(\mu_i) \right\}_{k=0}^\infty \in \Phi(\mu_i; \mathbb{R}^n), \quad i = 0, 1.$$

По соображениям плотности можно ограничиться функциями из S . Используя теоремы 4 – 6 из [2] и правое вложение из (3), для $f \in S$ получаем

$$\|f\|_{A_3}^r = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kr} \|f * \varphi_k(\mu_0^{1-\theta} \mu_1^{(1-\varepsilon)\theta})\|_{L_p}^r \sim$$

$$\begin{aligned} & \sim \sum_{k=0}^{\infty} \left\| F^{-1} [(1 + \mu_0^2)^{(1-\theta)/2} (1 + \mu_1^2)^{(1-\epsilon)\theta/2} F \varphi_k F f] \right\|_{L_p}^r \sim \\ & \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\epsilon \theta r} \| If * \varphi_k(\mu_1) \|_{L_p}^r \leq c' \| f \|_{A_2}^r, \end{aligned} \quad (4)$$

где $c' > 0$ не зависит от ϵ , знак $\sim$ означает двустороннюю оценку и

$$If = F^{-1} [(1 + \mu_0^2)^{(1-\theta)/2} (1 + \mu_1^2)^{\theta/2} F f].$$

Аналогично, из левого вложения в (3) имеем

$$\| f \|_{A_2}^r \leq c'' \| f \|_{A_1}^r = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kr} \| f * \varphi_k(\mu_0^{(1-\theta)(1+\epsilon)} \mu_1^\theta) \|_{L_p}^r \sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\epsilon(1-\theta)r} \| If * \varphi_k(\mu_0) \|_{L_p}^r. \quad (5)$$

Из (4) и (5) получаем

$$c_1 \| If \|_{B_1} \leq \| f \|_{A_2} \leq c_0 \| If \|_{B_2}, \quad B_1 = B_{p,r}^{-\epsilon\theta}(\mu_1), \quad B_2 = B_{p,r}^{\epsilon(1-\theta)}(\mu_0), \quad (6)$$

где c_0 и c_1 не зависят от ϵ . Поскольку $f \in S$, то ряды, определяющие нормы слева и справа в (6), сходятся равномерно по ϵ на $[0, 1]$. В качестве мажорантного ряда можно взять ряд, определяющий норму $\| If \|_{B_{p,r}^1(\mu_0)}$. Тогда можно перейти к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$. Учитывая теоремы 4 и 6 из [2], получим

$$\| f \|_{A_2} \sim \| If \|_{B_{p,r}^0} \sim \| f \|_{B_{p,r}^1(\mu_0^{1-\theta} \mu_1^\theta)}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. В утверждениях а) – г) теоремы 1 верхний индекс слева и справа можно заменить на (-1) . Доказательство аналогично доказательству утверждений а) – г).

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫМИ КЛАССАМИ

Рассмотрим специальный случай (проблема Трибеля), когда H и B в левой части утверждений теоремы 1 суть классические анизотропные пространства Соболева–Лиувилля и Никольского–Бесова с разными анизотропиями, т.е. соответствующие многогранники суть пирамиды. Многогранники анизотропных пространств не имеют вершин вне координатных осей. Нетрудно убедиться, что многогранники пространств справа в утверждениях теоремы 1 имеют вершины и вне координатных осей, т.е. эти пространства не являются классическими

анизотропными пространствами. Таким образом, интерполируя между анизотропными пространствами разной анизотропии, мы получаем пространства, порожденные вполне правильным многогранником, который имеет вершины и вне координатных осей.

Представляет интерес и обратная задача. По всей вероятности задача представления пространств, порожденных вполне правильным многогранником, в виде интерполяционных пространств между анизотропными пространствами, в общем случае имеет отрицательный ответ.

Нам удастся доказать формулы представления для $n = 2$. Оказывается, что в этом случае всякое H и B -пространство, порожденное вполне правильным многогранником, получается многократной интерполяцией между соответствующими анизотропными пространствами. Причем количество интерполяций равно числу вершин вне координатных осей порождающего многогранника.

Каждому утверждению теоремы 1 соответствует теорема представления. Поскольку, в первую очередь, нас интересует появление вершин вне координатных осей, воспользуемся только случаем в) при $p_0 = p_1 = p$ и $q_0 = q_1 = q$. Пусть задан вполне правильный многоугольник $\mathcal{N}$ в первом координатном углу координатной плоскости с вершинами $(0, s)$, $(m, 0)$, $r_1, \dots, r_N$. Вершины $r_1, \dots, r_N$ находятся вне координатных осей. Проведем из точки $(0, s)$ прямые, параллельные отрезкам $[(0, s); r_1]$, $[r_1; r_2]$, $\dots$, $[r_{N-1}; r_N]$, $[r_N; (m, 0)]$. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ через $[\alpha, \beta]$ мы обозначили отрезок, соединяющий точки α и β . Обозначим точки пересечения этих прямых с осью абсцисс через $m_0 > m_1 > \dots > m_N$. Тогда появляются $N+1$ треугольников, для которых одна вершина $(0, s)$, а вторая $(m_i, 0)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Обозначим эти треугольники через $\mathcal{N}_i$.

Будем рассматривать B -пространства с верхним индексом 1 и нижними индексами p и q . Обозначим через $B^N(\mathcal{N})$ начальное B -пространство, порожденное многоугольником $\mathcal{N}$. Через $B_{m_i}^0$ — классические анизотропные пространства, порожденные треугольниками $\mathcal{N}_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. Верхний индекс показывает отсутствие вершин вне координатных осей.

Теорема 2. Пусть $1 < p, q < \infty$, $n = 2$. Справедлива следующая формула

представления :

$$B_{p,q}^1 \equiv B^N(\mathcal{N}) = \left[B_{m_0}^0, \left[B_{m_1}^0, \dots, \left[B_{m_{N-1}}^0, B_{m_N}^0 \right]_{\theta_N} \dots \right]_{\theta_2} \right]_{\theta_1}, \quad (7)$$

где

$$r_i = (r_1^i, r_2^i), \quad i = 1, \dots, N, \quad \theta_i = \frac{r_2^i}{r_2^{i-1}}, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$\theta_1 = \frac{r_2^1}{s}, \quad r_2^1 > r_2^2 > \dots > r_2^N.$$

Доказательство. Многоугольники всех используемых пространств вложены один в другой, поэтому, интерполируя можно применять теорему 1. Доказательство проведем индукцией по N . При $N = 1$ (7) имеет вид

$$B^1(\mathcal{N}) = \left[B_{m_0}^0, B_{m_1}^0 \right]_{r_2/s}, \quad r = (r_1, r_2). \quad (8)$$

Пространства $B_{m_i}^0$ ($i = 0, 1$) – анизотропные пространства, порожденные функциями (см. определения 2, 3) $\mu_i(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^{2m_i} + \xi_2^{2s})^{1/2}$. Используя теорему 2 из [7], теорему П. И. Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [8]) и теорему 1, с помощью несложных вычислений получим (8). Заметим, что функция $\mu_0^{1-s} \mu_1^s$ из теоремы 1 порождает две вершины вне осей координат, одна из которых не существенна (см. [8]). Пусть формула (7) верна для любого вполне правильного многоугольника с R вершинами вне осей координат. Пусть, далее, многоугольник $\mathcal{N}$ имеет $R + 1$ вершин $r^1, \dots, r^{R+1}$ вне координатных осей и две вершины $(0, s)$, $(m, 0)$ на осях. Докажем сначала, что

$$B^{R+1}(\mathcal{N}) = \left[B_{x'}^R, B_{x''}^R \right]_{\theta_{R+1}}, \quad \theta_{R+1} = \frac{r_2^{R+1}}{r_2^R}, \quad (9)$$

где $[r^R, (x'', 0)] \parallel [r^{R+1}, (m, 0)]$ и $[r^R, (x', 0)] \parallel [r^R, r^{R+1}]$. В формуле (9) пространства справа имеют многоугольники $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$ с вершинами $(0, s)$, $r^1, \dots, r^R$, $(x', 0)$ и $(x'', 0)$, соответственно, а слева – исходное пространство с многоугольником $\mathcal{N}$.

Обозначим

$$\lambda(\xi) = \left(\xi_2^{2s} + \sum_{j=1}^R \xi_1^{2r^j} \right)^{1/2}.$$

По теореме 1 функция, порождающая пространство $[B_{x'}^R, B_{x''}^R]_{\theta_{R+1}}$, имеет

вид

$$(\lambda^2(\xi) + \xi_1^{2x'})^{\frac{1-s}{2}} (\lambda^2(\xi) + \xi_1^{2x''})^{\frac{s}{2}}. \quad (10)$$

После некоторых вычислений, отбрасывая несущественные вершины (см. [8] и теорему 2 из [7]) приходим к формуле (9). Применяя (7) к пространствам B_{Σ}^R и $B_{\Sigma'}^R$, в (9), отсюда для $\theta_1 = \frac{r_2^1}{s}$ получим

$$B^{R+1}(\mathcal{N}) = \left[\left[B_{m_0}^0, \dots, [B_{m_{R-1}}^0, B_{m_R}^0], \dots \right]_{\theta_1}, \left[B_{m_0}^0, \dots, [B_{m_{R-1}}^0, B_{m_{R+1}}^0], \dots \right]_{\theta_1, \theta_{R+1}} \right] \quad (11)$$

С помощью теоремы 1 нетрудно проверить, что

$$\left[[A, B]_{\eta_0}, [A, C]_{\eta_0} \right]_{\eta_1} = \left[A, [B, C]_{\eta_1} \right]_{\eta_0}, \quad (12)$$

где A, B, C — анизотропные пространства $B_{m_i}^0$ ($i = 0, 1, \dots, R+1$), $0 < \eta_0, \eta_1 < 1$. Применяя (12) к (11), придем к требуемой формуле представления для $R+1$ вершин вне координатных осей. Теорема 2 доказана.

Аналогично, применяя другие утверждения теоремы 1, можно доказать и другие формулы представлений анизотропными классами.

Как уже отмечалось, формула (7) дает возможность характеризовать поведение любого линейного непрерывного оператора в пространствах, порожденных вполне правильным многоугольником. Точнее, справедлива следующая

Теорема 3. Пусть в предположениях и обозначениях теоремы 2 линейный непрерывный оператор T таков, что $T : B_{m_i}^0 \mapsto B_{m_i}^0$ с нормой M_i ($i = 0, 1, \dots, N$). Тогда $T : B^N(\mathcal{N}) \mapsto B^N(\mathcal{N})$ с нормой M , удовлетворяющей неравенству

$$M \leq M_N^{r_2^N/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^{N-1} M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s}. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем индукцией по N . При $N = 1$ неравенство (13) непосредственно следует из (8) и теоремы 4.1.2 из [9]. Пусть (13) выполняется для многоугольника с $N = R$ вершинами вне координатных осей. Согласно теореме 4.1.2 из [9] и предположению индукции из (11) имеем

$$M \leq \left(M_N^{r_2^N/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^{R-1} M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s} \right)^{1 - \frac{r_2^{R+1}}{r_2^R}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(M_{R+1}^{r_2^R/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^{R-1} M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s} \right)^{\frac{R+1}{r_2^R}} = \\ & = M_{R+1}^{r_2^{R+1}/s} M_0^{(s-r_2^1)/s} \prod_{k=1}^R M_k^{(r_2^k - r_2^{k+1})/s}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. In the paper we prove an interpolation theorem for the H - and B -spaces of type Sobolev–Liouville and Nikol’ski–Besov with differing anisotropies provided that one of the interpolation spaces imbedded into another. By means of classical anisotropic spaces on the plane we prove a representation formula for a space of generalized smoothness generated by completely regular polyhedron.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, М., Мир, 1986.
2. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция некоторых функциональных пространств разной анизотропии", Изв. НАН Армении, Математика, т. 27, № 4, стр. 49 – 58, 1992.
3. В. П. Михайлов, "Поведение на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, т. 91, стр. 59 – 81, 1967.
4. Л. В. Волевич, Б. П. Панаян, "Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения", УМН, т. 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
5. А. Г. Багдасарян, "Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств", Изв. АН АрмССР. Математика, т. 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
6. А. Г. Багдасарян, "Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств", ДАН АрмССР. Математика, т. 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
7. А. Г. Багдасарян, "Теоремы вложения для некоторых обобщенных функциональных пространств", Изв. НАН Армении. Математика, т. 29, № 3, стр. 1 – 10, 1994.
8. П. И. Лизоркин, " (L_p, L_q) -мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, т. 152, № 4, стр. 808 – 811, 1963.
9. Й. Берг, Й. Лефстрем, Интерполяционные Пространства. Введение, М., Мир, 1980.
10. С. В. Успенский, Г. В. Демищенко, В. Г. Перепелкин, Теоремы Вложения и Приложения к Дифференциальным Уравнениям, Новосибирск, Наука, Сиб. отд., 1984.

1 сентября 1995

Ереванский государственный университет