АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СУММАРНОГО СПИНА В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б. С. Нахапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В теории критических явлений достаточно общепринята точка зрения, что в решетчатых моделях классической статистической физики размерности $\nu = 2, 3$ суммарный спин в критической точке не может иметь асимптотически нормального поведения, т.е. подчиняться центральной предельной теореме (ЦПТ) (см., например, [1] – [3]). Для иллюстрации тех общих соображений, которыми обосновывается вышеуказанный вывод, обычно рассматривается модель классического изинговского ферромагнетика. Эта модель, изученная в статистической физике наиболее полно, задается на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$ с помощью потенциала ближайших соседей следующего вида :

$$\Phi_{\{t,s\}}(x_t, x_s) = \begin{cases} x_t x_s, & |t-s| = 1, \\ 0, & |t-s| \neq 1, \end{cases}$$

где

$$|t-s| = \max_{1 \leq i \leq \nu} |t^{(i)} - s^{(i)}|, \quad t, s \in \mathbb{Z}^\nu, \quad x_t, x_s \in X = \{-1, 1\}.$$

Пусть $H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x})$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, $|\Lambda| < \infty$ – гамильтониан моделей Изинга на конфигурациях $x = (x_t, t \in \Lambda) \in X^\Lambda$ с граничными условиями $\overline{x} \in X^{\partial\Lambda}$

$$\partial\Lambda = \{t \in \mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda : \ d(t, \Lambda) = 1\}, \quad d(t, \Lambda) = \inf_{s \in \Lambda} \{|t-s|\},$$

т.е.

$$H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x}) = \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{(t,s) \\ t,s \in \Lambda}} x_t x_s + \beta \sum_{\substack{(t,s) \\ t \in \Lambda, s \in \partial\Lambda}} x_t \overline{x_s} + h \sum_{t \in \Lambda} x_t,$$

где $\langle t, s\rangle$ означает суммирование по ближайшим соседям, а параметры $h \in \mathbb{R}^1$ и $\beta \in \mathbb{R}^1_+$ называются *внешней магнетизацией* и *обратной температурой*, соответственно. Отвечающие этому гамильтониану гиббсовские распределения в конечном сосуде Λ с граничными условиями $\overline{x} \in X^{\partial\Lambda}$ имеют вид

$$P_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x}) = \left(\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta,h}(\overline{x})\right)^{-1} \exp[-H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x})], \quad x \in X^\Lambda,$$

$$\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta,h}(\overline{x}) = \sum_{x \in X^\Lambda} \exp[-H_\Lambda^{\beta,h}(x/\overline{x})].$$

Граничные условия $\{x_t = 1, \ t \in \partial\Lambda\}$ и $\{x_t = -1, \ t \in \partial\Lambda\}$, называемые "плюс" и "минус", соответственно, имеют особую важность. Соответствующие им гамильтонианы и гиббсовские распределения будут обозначены следующим образом : $H_{\Lambda,+}^{\beta,h}$, $P_{\Lambda,+}^{\beta,h}$, $H_{\Lambda,-}^{\beta,h}$, $P_{\Lambda,-}^{\beta,h}$. Хорошо известно, что при $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ меры $P_{\Lambda,+}^{\beta,h}$ и $P_{\Lambda,-}^{\beta,h}$ слабо сходятся к пределам $P_+^{\beta,h}$ и $P_-^{\beta,h}$, причем эти предельные гиббсовские меры являются эргодическими. Все другие возможные предельные меры являются линейными комбинациями указанных эргодических мер.

При $h \neq 0$ и любом β, $0 < \beta < \infty$ распределения $P_+^{\beta,h}$ и $P_-^{\beta,h}$ совпадают : $P_+^{\beta,h} = P_-^{\beta,h} = P^{\beta,h}$ и, таким образом, при указанных значениях параметров (β, h) в модели Изинга имеет место единственность. При $h = 0$ единственность наблюдается только в пределах некоторого интервала $0 < \beta \leq \beta_{cr}$, а при $\beta > \beta_{cr}$ имеем $P_+^{\beta,0} \neq P_-^{\beta,0}$. Последний факт интерпретируется как наличие фазового перехода, когда β возрастая, достигает обратной критической температуры β_{cr}. Отметим также, что для $0 < \beta \leq \beta_{cr}$, $h = 0$ пара корреляций $E^{\beta,0}x_t x_s$ для распределения $P^{\beta,0}$ убывает экспоненциально при $|t-s| \to \infty$, а именно, существует положительная величина $\tau(\beta, 0)$, называемая *корреляционной длиной*, такая, что

$$E^{\beta,0}x_t x_s \sim \exp\left[-\frac{|t-s|}{\tau(\beta,0)}\right].$$

Типичное обоснование (не строгое) того, что в модели Изинга суммарный спин в критической точке не подчиняется ЦПТ состоит в следующем. При приближении β к β_{cr}, $\beta \leq \beta_{cr}$, $h = 0$ происходит усиление корреляций между спинами, в результате чего корреляционная длина $\tau(0, \beta)$ стремится к бесконечности. В критической точке $\tau(0, \beta_{cr})$ корреляционная длина становится бесконечной, а убывание корреляций происходит степенным образом. Сами спины при этом никак нельзя считать слабо зависимыми случайными величинами. В этих условиях справедливости ЦПТ ожидать никак нельзя и ставится вопрос о нахождении другой более подходящей нормировки, при которой будет иметь место сходимость к некоторому другому, отличному от гауссовского, распределению.

В противовес этому ниже мы приведем пример простой, точно решаемой решетчатой модели, у которой суммарный спин в критической точке подчиняется ЦПТ. В этой модели ковариация спинов равна нулю для любых (h,β), в частности, для $\beta=\beta_{cr}$ и $h=h_{cr}$. Рассматриваемая модель описывается потенциалом следующего вида :

$$\widetilde{\Phi}_{\{t,s\}}(y_t,y_s)=\begin{cases}|y_t|\cdot|y_s|, & |t-s|=1,\\ 0, & |t-s|\neq 1,\end{cases}\qquad t,s\in\mathbb{Z}^\nu,$$

где $y_t, y_s\in Y=\{-1,0,1\}$. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y})=\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t,s\in\Lambda}}|y_t|\cdot|y_s|+\beta\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|y_t|\cdot|\overline{y}_s|+h\sum_{t\in\Lambda}|y_t|,\quad y\in Y^\Lambda,\ \overline{y}\in Y^{\partial\Lambda}.$$

Перепишем гамильтониан $\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}$ в удобной для нас форме. Имеем

$$\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y})=\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{(t,s)\\ t,s\in\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|y_s|-1)+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t,s\in\Lambda}}|y_t|-\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{(t,s)\\ t,s\in\Lambda}}1+$$

$$+\frac{\beta}{4}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|\overline{y}_s|-1)+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|y_t|+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|\overline{y}_s|-\frac{\beta}{4}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}1+$$

$$+\frac{h}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2|y_t|-1)+\frac{h}{2}|\Lambda|=\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{(t,s)\\ t,s\in\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|y_s|-1)+\frac{\beta}{4}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|\overline{y}_s|-1)+$$

$$+\frac{h}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2|y_t|-1)+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|y_t|+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|\overline{y}_s|-\frac{\beta}{8}|\Lambda|^2-\frac{\beta}{4}|\Lambda|\cdot|\partial\Lambda|+\frac{h}{2}|\Lambda|=$$

$$=\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{(t,s)\\ t,s\in\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|y_s|-1)+\frac{\beta}{4}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|\overline{y}_s|-1)+\frac{h}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2|y_t|-1)+$$

$$+\frac{\beta}{2}\sum_{t\in\Lambda}|y_t|\cdot 2\nu-\frac{\beta}{8}|\Lambda|^2-\frac{\beta}{4}|\Lambda|\cdot|\partial\Lambda|+\frac{h}{2}|\Lambda|+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|\overline{y}_s|.$$

Окончательно получаем

$$\widetilde{H}_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y})=\frac{\beta}{8}\sum_{\substack{(t,s)\\ t,s\in\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|y_s|-1)+\frac{\beta}{4}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}(2|y_t|-1)(2|\overline{y}_s|-1)+$$

$$+\frac{h+\beta\nu}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2|y_t|-1)+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|\overline{y}_s|+\frac{\beta\nu}{2}|\Lambda|-\frac{\beta}{8}|\Lambda|^2-\frac{\beta}{4}|\Lambda|\cdot|\partial\Lambda|= \qquad (1)$$

$$=H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)+\frac{\beta}{2}\sum_{\substack{(t,s)\\ t\in\Lambda,s\in\partial\Lambda}}|\overline{y}_s|+\frac{\beta\nu}{2}|\Lambda|-\frac{\beta}{8}|\Lambda|^2-\frac{\beta}{4}|\Lambda|\cdot|\partial\Lambda|,$$

где

$$2|y|-1=\{2|y_t|-1,\ t\in\Lambda\},\quad 2|\overline{y}|-1=\{2|\overline{y}_t|-1,\ t\in\partial\Lambda\}.$$

Воспользовавшись (1) выпишем соответствующее гиббсовское распределение :

$$Q_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y})=\frac{\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}{\sum_{y\in Y^\Lambda}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}.$$

Положим $\widetilde{Y}=\{0,1\}$. Тогда

$$\sum_{y\in Y^\Lambda}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=\sum_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}^\Lambda}2^{\sum_{t\in\Lambda}\widetilde{y}_t}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|\widetilde{y}|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=2^{|\Lambda|/2}\sum_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}^\Lambda}2^{\frac{1}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2\widetilde{y}_t-1)}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|\widetilde{y}|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=2^{|\Lambda|/2}\sum_{\widetilde{y}\in\widetilde{Y}^\Lambda}\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\widetilde{y}|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]=$$

$$=2^{|\Lambda|/2}\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\overline{y}|-1).$$

Далее

$$Q_\Lambda^{\beta,h}(y/\overline{y})=2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|}2^{\frac{1}{2}\sum_{t\in\Lambda}(2y_t-1)}\frac{\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}{\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\overline{y}|-1)}=$$

$$=2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|}\frac{\exp\left[-H_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1)\right]}{\mathbb{Z}_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|\overline{y}|-1)}=$$

$$=2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|}P_\Lambda^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}(2|y|-1\,/\,2|\overline{y}|-1).$$

Рассмотрим теперь две совокупности граничных условий

$$\{y\in Y^\Lambda:\ y_t=0,\ t\in\Lambda\},\quad \{y\in Y^\Lambda:\ y_t\neq 0,\ t\in\Lambda\}.$$

Первое множество состоит только из нулевых конфигураций, второе содержит все конфигурации с ненулевыми компонентами. Обозначим через $Q^{\beta,h}_{\Lambda,0}$, $Q^{\beta,h}_{\Lambda,+}$ гиббсовские распределения, отвечающие нулевым граничным условиям и ненулевым условиям соответственно. Имеем

$$Q^{\beta,h}_{\Lambda,0}(y) = 2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|} P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,-}(2|y|-1),$$

$$Q^{\beta,h}_{\Lambda,+}(y) = 2^{-\sum_{t\in\Lambda}|y_t|} P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,+}(2|y|-1).$$

При $I \subset \Lambda$ справедливы следующие равенства :

$$(Q^{\beta,h}_{\Lambda,0})_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \sum_{\widetilde{y}\in Y^{\Lambda\setminus I}} 2^{-\sum_{t\in\Lambda\setminus I}|\widetilde{y}_t|} P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,-}(2|y|-1, 2|\widetilde{y}|-1) =$$

$$= 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,-}\right)_I (2|y|-1), \qquad (2)$$

где

$$(2|y|-1, 2|\widetilde{y}|-1) = (2y_t-1,\ t\in I,\ 2\widetilde{y}_t-1,\ t\in\Lambda\setminus I).$$

Аналогично

$$(Q^{\beta,h}_{\Lambda,+})_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{\Lambda,+}\right)_I (2|y|-1). \qquad (3)$$

Поскольку при $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^\nu$ пределы в правых частях (2) и (3) существуют, то получаем

$$(Q^{\beta,h}_0)_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{-}\right)_I (2|y|-1),$$

$$(Q^{\beta,h}_+)_I(y) = 2^{-\sum_{t\in I}|y_t|} \left(P^{\beta/4,(h+\beta\nu-\ln 2)/2}_{+}\right)_I (2|y|-1), \quad y\in Y^I.$$

Отсюда ясно, что при $h+\beta\nu-\ln 2 \neq 0$ предельное гиббсовское распределение в нашей модели единственно (поскольку в этом случае при соответствующих значениях параметров единственность имеет место в модели Изинга) и происходит фазовый переход на прямой $h+\beta\nu-\ln 2 = 0$, $0<\beta<\infty$. Критическая точка имеет координаты $\beta^*_{cr} = 4\beta_{cr}$, $\quad h^*_{cr} = -\beta^*_{cr}\nu + \ln 2$, где β_{cr} – критическая обратная температура для модели Изинга.

Заметим, что гиббсовское распределение нашей модели в критической точке единственно, а следовательно, оно эргодично. Это распределение является трансляционно–инвариантным и обладает свойством мартингал-разности, поскольку потенциал рассматриваемой модели четный (см., например, [4], [5]).

Остается применить результат, доказанный автором, согласно которому любое однородное эргодическое, мартингал-разностное случайное поле второго порядка удовлетворяет ЦПТ (см. [5], [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Синай, Теореия Фазовых Переходов, Наука, М., 1986.
2. R. S. Ellis, Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics. Springer-Verlag, 1985.
3. Г. О. Георги, Гиббсовские Меры и Фазовые Переходы, Наука, М., 1990.
4. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser.A.I. Math., vol. 17, pp. 105 – 110, 1992.
5. B. S. Nahapetian, "Billingsley-Ibragimov theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics", C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 320, ser. I, pp. 1539 – 1544, 1995.
6. Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, "Предельные теоремы для мартингал-разностных случайных полей", Изв. НАН Армении, Математика, т. 30, № 6, стр. 22 — 38, 1995.

19 сентября 1995

Институт математики
НАН Армении