ОБ ОДНОЙ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. Машурян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В работе изучается последовательность трансляционно–инвариантных маркированных точечных процессов в $\mathbb{R}^d$ с пространством марок $\{1, ..., n\}$. Процессы взаимодействуют согласно некоторому механизму, определенному случайным графом, который превращает последовательность в марковскую. Найдены условия, гарантирующие эргодичность последовательности. Предлагается стохастическое построение эргодического распределения.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Р. В. Амбарцумян показал в [1], что распределение $P(A)$ всякого классического гиббсовского точечного процесса в $\mathbb{R}^d$, управляемого "парным потенциалом", является единственным решением некоторого уравнения вида

$$P(A) = \int Q(A, \omega)\, P(d\omega), \tag{0.1}$$

где ядро $Q(A, \omega)$ – распределение точечного процесса в $\mathbb{R}^d$, зависящее от реализации ω точечного процесса как параметра. Для любого ω распределение Q вполне определяется "параметром активности" и "парным потенциалом" гиббсовского процесса. Буква A в $P(A)$ и $Q(A, \omega)$ означает событие (измеримое множество) в стандартном ([2]) пространстве $\mathcal{M}$ реализаций точечного процесса в $\mathbb{R}^d$.

Начиная с некоторого начального распределения $P_1(d\omega)$ точечного процесса в $\mathbb{R}^d$ можно получить последовательность $P_1(d\omega), P_2(d\omega), \ldots$ распределений точечных процессов в $\mathbb{R}^d$:

$$P_{s+1}(A) = \int Q(A, \omega) P_s(d\omega), \quad s = 1, 2, \ldots$$

В работе [1] построением эргодической марковской цепи с пространством состояний $\mathcal{M}$ была показана сходимость последовательности $\{P_s\}$ к предельному распределению P, не зависящему от выбора P_1. Для этой цепи P_s становится вероятностным распределением состояния в момент времени s. Это построение проводилось с помощью случайного графа, вершинами которого являлись точки реализаций $\omega \in \mathcal{M}$.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для *маркированных точечных процессов*. Основным результатом является Теорема 1, которая задает некоторые условия, обеспечивающие эргодичность нашей марковской последовательности маркированных точечных процессов. Мы будем рассматривать только простые точечные процессы в терминологии [3].

§1. МАРКОВСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

В этом параграфе мы опишем марковскую последовательность точечных процессов с пространством состояний $\mathcal{M}'$, которое является пространством всех реализаций маркированных точечных процессов в $\mathbb{R}^d$ с марками из множества $\{1,\dots,n\}$. Каждая реализация $\varphi \in \mathcal{M}'$ – счетное множество $\{(x_k, i_k)\}_{k=1,2,\dots}$, где $\omega = \{x_k\}_{k=1,2,\dots} \in \mathcal{M}$ – реализация точечного процесса в $\mathbb{R}^d$, а $i_k \in \{1,\dots,n\}$ – марка точки $x_k \in \mathbb{R}^d$. Для φ мы будем использовать обозначение $\{(x_k, i_k)\}$, опуская индексы $k = 1, 2, \dots$ Напомним, что счетное множество $\omega \subset \mathbb{R}^d$ является реализацией, если $card(\omega \cap B) < \infty$ для любого шара $B \subset \mathbb{R}^d$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{d+1}$ систему параллельных гиперплоскостей H_s, описываемых стандартными декартовыми координатами $(x^{(1)},\dots,x^{(d+1)})$ в $\mathbb{R}^{d+1}$ уравнением $x^{(d+1)} = s$, $s = 1,2,\dots$. Гиперплоскость H_s назовем *s-уровнем*. Ниже мы будем предполагать, что реализация (состояние) $\psi_s \in \mathcal{M}'$ нашей марковской последовательности в момент времени s, $s = 1,2,\dots$ лежит на s-уровне (т.е. $\psi_s \subset H_s$). Точнее, $\psi_s = \{(x_k, i_k)\} \subset H_s$ означает, что $\{x_k\} \subset H_s$.

Для построения нашей последовательности $(\psi_1, \psi_2, \dots)$ нам понадобится вероятностное распределение P_1 трансляционно-инвариантного маркированного точечного процесса, которое будет служить вероятностным распределением состояния последовательности на уровне $s = 1$. Нам также понадобится семейство функций

$$\{h_{ij}(x):\ h_{ij}:\mathbb{R}^d \longmapsto [0,1],\quad h_{ij}(-x)=h_{ij}(x),\quad 1\le i,j\le n\}$$

и распределение Q трансляционно–инвариантного маркированного точечного процесса в $\mathbb{R}^d$ с марками в $\{1,\ldots,n\}$. Сначала выбираем φ_1 с распределением P_1 и помещаем φ_1 в H_1. Затем выбираем бесконечную последовательность независимых случайных реализаций $\varphi_2,\varphi_3,\ldots$ с распределением Q и помещаем φ_s в H_s, $s=2,3,\ldots$. Полагаем $\psi_1=\varphi_1$. Определим ψ_2 как случайное подмножество φ_2, получающееся из φ_2 применением случайной операции *разрежения*, зависящей от ψ_1. Разрежение действует следующим образом. Пусть $\psi_1=\{(x_k,i_k)\}$, $\varphi_2= =\{(y_k,j_k)\}$. Точка (x,i) из ψ_1 ударяет точку (y,j) реализации φ_2 с вероятностью $1-h_{ij}((x-y)_d)$; по определению $(x-y)_d=(x^{(1)}-y^{(1)},\ldots,x^{(d)}-y^{(d)})$; удары для различных пар предполагаются независимыми. Точку $(y,j)\in\psi_2$ назовем *активной*, если она не получает ударов из точек ψ_1 ; В случае хоть одного удара, (y,j) называется *мертвой*. Определим ψ_2 как множество *активных* точек φ_2. Для $s>2$ по индукции построим случайную реализацию ψ_s. Пусть реализации $\psi_1,\ldots,\psi_{s-1}$ построены. Точка $(x,i)\in\psi_{s-1}$ ударяет точку $(y,j)\in\varphi_s$ с вероятностью $1-h_{ij}((x-y)_d)$. Удары для различных пар снова независимы. Определяем ψ_s как случайное подмножество активных точек φ_s. Распределение ψ_s обозначаем через P_s, $s=1,2,\ldots$.

Лемма 1. *Случайная последовательность $\psi_1,\psi_2,\ldots$ является марковской цепью.*

Доказательство. По построению, условное распределение последовательности $\psi_s,\psi_{s+1},\ldots$ при условии $\psi_1,\ldots,\psi_{s-1}$, совпадает с ее распределением при условии ψ_{s-1}. Лемма доказана.

Вероятностное распределение марковской последовательности процессов ψ_s, $s=1,2,\ldots$ есть вероятность на счетном произведении V копий $\mathcal{M}'$: $V=\mathcal{M}'\times \times\mathcal{M}'\times\cdots$. Для изучения эргодичности нашей марковской последовательности построим случайный граф $g\in G$, вершины которого – точки в реализациях $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$. Заметим, что каждая вершина – точка в $\mathbb{R}^d$, дополненная маркой из $\{1,...,n\}$.

Рассмотрим последовательности $v = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots) \in V$ и $e = (b_1, b_2, \ldots)$, где b_l равно 0 или 1. В качестве множества вершин g служит объединение $\varphi_1 \cup \varphi_2 \cup \cdots$, являющееся подмножеством $\mathbb{R}^{d+1}$. Пронумеруем числами $l = 1, 2, \ldots$ элементы множества $\{((x, i), (y, j)) : (x, i) \in \varphi_s, (y, j) \in \varphi_{s+1}, s = 1, 2, \ldots\}$ пар точек реализаций, лежащих на соседних уровнях. Поместим *ребро* между точками l-ой пары из указанного множества тогда и только тогда, когда $b_l = 1$, $l = 1, 2, \ldots$ Полученный граф обозначим через g. Отметим, что ребра g могут связать только точки реализации, лежащие на соседних уровнях. На V рассмотрим вероятностную меру

$$\rho(dv) = P_1(d\psi_1) \times Q(d\varphi_2) \times Q(d\varphi_3) \times \cdots.$$

По заданной $v \in V$ определим вероятность $\rho_v(de)$ следующим образом : случайные величины b_l в $e = (b_1, b_2, \ldots)$ независимы и

$$\text{вероятность } (b_l = 1) \; = \; 1 - h_{ij}((x - y)_d), \tag{1.1}$$

где $((x, i), (y, j))$ – l-ая пара в нашей нумерации. Зададим вероятность на G, определив

$$\rho(dg) = \rho(dv) \times \rho_v(de). \tag{1.2}$$

Определим *отображение разрежения* $G \longmapsto V$. Образ $(\psi_1(g), \psi_2(g), \ldots) \in V$ графа $g = (v, e) \in G$ строится следующим образом : $\psi_1(g) = \varphi_1$; рекуррентно, $\psi_{s+1}(g)$ – множество тех точек φ_{s+1}, которые не связаны ребрами с точками $\psi_s(g)$, $s = 1, 2, \ldots$. Это отображение определяет вероятность на V. По построению, вероятность на V, индуцированная из G совпадает с распределением вышеописанной марковской последовательности и распределение каждой $\psi_s(g)$ есть P_s.

§2. ЧАСТИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Нам понадобятся некоторые определения. Мы можем двигаться на каждом ребре графа $g \in G$ в двух направлениях. Движение из верхнего уровня в нижний назовем *движением вниз*. Для каждой вершины (x_k, i_k) графа g через t_k обозначим наибольший подграф g, вершин которого можно достичь из (x_k, i_k) движением вниз. Назовем t_k *направленным вниз деревом с корнем* (x_k, i_k). Аналогично, можем говорить о движении вверх и направленных вверх деревьях.

Знание t_k с корнем (x_k, i_k) в принципе позволяет выявить которое из двух случаев имеет место : (x_k, i_k) активна или (x_k, i_k) мертва. Следуя [1], дерево назовем *четным*, если его корень активен. Итак, $\psi_s = \{(x_k, i_k) \in \varphi_s : t_k$ четно$\}$. Пусть

$$v_s = \{(x_k, i_k) \in \varphi_s : \ t_k \text{ четно и не достигает второго уровня}\}. \tag{2.1}$$

Нашей первой целью является исследование интенсивности q_s процесса

$$\psi_s \setminus v_s = \{(x_k, i_k) \in \varphi_s : \ t_k \text{ четно и достигает второго уровня}\}. \tag{2.2}$$

В лемме 3 мы дадим достаточные условия для стремления q_s к 0 при $s \to \infty$. Легко проверить, что маркированный точечный процесс $\{(x_k, i_k, t_k)\}$ инвариантен относительно перемещений $\mathbb{R}^d$.

Напомним (подробности см. [4]) понятие ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с конечным числом типов частиц (i-частиц, $i = 1, \dots, n$). Процесс начинается с z_{11} частицами типа 1, z_{12} частицами типа $2, \dots, z_{1n}$ частицами типа n в первом поколении. Затем каждая частица, независимо от других, производит потомков, которые могут быть различных типов. Потомки частиц из первого поколения образуют второе поколение. Они, в свою очередь, производят своих потомков, которые образуют третье поколение и так далее. В каждом поколении i-частица ($i = 1, \dots, n$) производит потомки, число которых случайно и управляется вероятностным распределением F_i, зависящим только от i а не от поколения.

Обозначим через Z_s последовательность $(z_{s1}, \dots, z_{sn})$, где z_{si} – число i-частиц в s-ом поколении. $Z_s = \overline{0}$ означает, что $z_{s1} = \cdots = z_{sn} = 0$. Событие $\{Z_s = \overline{0}$ для некоторого поколения $s\}$ назовем *вырождением*. Предположим, что $A = ||a_{ij}||$, $1 \le i, j \le n$, где a_{ij} – среднее число j-потомков i-частицы. Пусть σ – действительное собственное значение A ($\sigma \in \mathbb{R}$) с наибольшим модулем (такое собственное значение существует для каждой матрицы A с неотрицательными элементами ; см. [5]).

Далее, обозначим через $a_{ij}^{(s)}$ элементы s-ой степени матрицы $A : A^s = \|a_{ij}^{(s)}\|$. Типы i и j $(1 \le i, j \le n)$ назовем ***сообщающимися***, если существуют натуральные s, s' такие, что $a_{ij}^{(s)} > 0$, $a_{ji}^{(s')} > 0$. Тип, не сообщающийся ни с собой, ни с другими типами, назовем ***особым***. Отношение сообщения делит множество не особых типов в непересекающиеся непустые классы. Класс C назовем ***финальным***, если число C-потомков каждой C-частицы равно 1 с вероятностью 1 (C-частица это частица с типом в C).

Следующее утверждение отвечает на вопрос : какова вероятность вырождения ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона ?

Утверждение 1. *([4]) Вероятность вырождения равна 1 для всех Z_1 тогда и только тогда, когда одновременно а) $\sigma \le 1$ и б) нет финальных классов.*

Из этого утверждения мы выводим достаточные условия, обеспечивающие стремление к нулю интенсивности q_s процесса $\psi_s \setminus v_s$. Сначала докажем лемму. Определим новую вероятность $\rho^*(dg)$ в пространстве графов G :

$$\rho^*(dg) = \rho^*(dv) \times \rho_v^*(de), \tag{2.3}$$

где $\rho^*(dv) = Q(d\varphi_1) \times Q(d\varphi_2) \times \cdots$, а $\rho_v^*(de)$ определяется следующим образом. Случайные величины b_l в $e = (b_1, b_2, \ldots)$ снова независимы, однако в противоположность $\rho_v(de)$, для l-ой пары $((x,i),(y,j))$

$$\text{вероятность } (b_l = 1) \;=\; 1 - h_{ji}((x-y)_d) \tag{2.4}$$

(заметим изменение порядка i и j по сравнению с (1.1)). Обозначим через λ интенсивность φ_s и через $\{p_1, ..., p_n\}$ – распределение типичной марки в φ_s. Заметим,что эти величины не зависят от s и определяются через вероятностное распределение Q. Нам понадобится случайное дерево t_0^*. Для его определения рассмотрим сначала граф g_0, вероятностное распределение которого получается из (2.3), если взять φ_1 состоящим из одной единственной точки, а именно, начала координат O, и дадим марку i точке O с вероятностью p_i. Теперь определим t_0^* как направленный вверх (возможно бесконечный) подграф g_0 с корнем в O. Иными словами, t_0^* – наибольший подграф g_0, вершины которого достигаются из O движением вверх. Обозначим через F_0 вероятностное распределение t_0^*.

Лемма 2. *Если для всех* $1 \leq i \leq n$ *выполняются неравенства*

$$a_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j \int_{\mathbb{R}^d} [1 - h_{ji}(x)]dx < 1, \tag{2.5}$$

то $F_0(t_0^*$ *конечно*$) = 1$.

Доказательство. Построим "процесс частиц" T, помещающий частицы в заданных положениях, *являющихся вершинами* t_0^*, согласно следующему стохастическому закону.

1) С вероятностью 1 процесс T имеет только одну частицу в $O \in H_1$. С вероятностью p_i ее тип есть i.

2) Частица типа i, помещенная в $x \in \varphi_s$, производит потомка типа j, помещенного в $y \in \varphi_{s+1}$ с вероятностью $1 - h_{ji}((x-y)_d)$.

3) Если T помещает частицу в $x \in \varphi_s$, $s \geq 2$, то эта частица получает марку точки x.

4) При заданных $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ все индивидуальные акты производства потомков стохастически независимы.

Последовательность n-ок $(z_{s1}, \ldots, z_{sn})$, $s = 1, 2, \ldots$ чисел частиц процесса T – ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с n типами частиц со средним числом $a_{ij} = \lambda p_j \int_{\mathbb{R}^d} [1 - h_{ji}(x)]dx$ j-потомков i-частицы.

Пусть T_0 – граф в $\mathbb{R}^{d+1}$, который мы получаем, интерпретируя частицы T как вершины и помещая ребра между частицами и их потомками. Заметим, что T_0 может иметь несколько вершин в положениях; одинаковая пара положений также может быть соединена несколькими ребрами. Теперь построим подграф $t_0 \in T_0$ следующим образом. Вершины T_0 на первом и втором уровне сохраняются. Для каждого положения x на третьем уровне мы выбираем вершину в x, согласно результату независимого случайного эксперимента, который дает равные вероятности каждой частице в x. Затем мы устраняем остальные вершины в x со всем их потомством. На четвертом уровне мы действуем аналогичным образом и т.д. По определению, остается дерево t_0.

Легко видеть, что вероятностные распределения t_0 и t_0^* совпадают. Следовательно, достаточно показать, что t_0 конечно с вероятностью 1. По построению,

t_0 будет конечным, если процесс T вырождается с вероятностью 1. Покажем выполнение последнего обстоятельства.

В этом ветвящемся процессе нет финальных классов. Действительно, из существования финального класса C следовало бы $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq 1$ для каждой $i \in C$ (поскольку i имеет не менее одного потомка с вероятностью 1), что противоречило бы нашему предположению (2.5).

Из $\sigma \leq \max_{1 \leq i \leq n} a_i$ (см. [5]) и (2.5) заключаем, что $\sigma < 1$. Таким образом, условия а) и б) утверждения 1 удовлетворяются и наш ветвящийся процесс T вырождается с вероятностью 1. Поэтому t_0, а с ним и t_0^*, конечны с вероятностью 1. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если условия (2.5) выполнены, то интенсивность q_s процесса $\psi_s \setminus v_s$, заданного по (2.2), стремится к 0 при $s \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие маркированные точечные процессы :

$$\{(x_k, t_k^*) : (x_k, i_k) \in \varphi_1\}, \tag{2.6}$$

$$\{(x_k, t_k^*) : (x_k, i_k) \in \varphi_1,\ t_k^* \text{ не достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}, \tag{2.7}$$

$$\{(x_k, t_k^*) : (x_k, i_k) \in \varphi_1,\ t_k^* \text{ достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}. \tag{2.8}$$

Здесь t_k^* – направленное вверх дерево с корнем в (x_k, i_k), т.е. наибольший подграф g, вершины которого достижимы из (x_k, i_k) движением вверх. Граф g определяется по формуле (2.3). Имеем также аналогичные маркированные точечные процессы, соответствующие $\rho(dg)$ в (1.2) :

$$\{(x_k, t_k) : (x_k, i_k) \in \varphi_s\}, \tag{2.9}$$

$$\{(x_k, t_k) : (x_k, i_k) \in \varphi_s,\ t_k \text{ не достигает второго уровня}\}, \tag{2.10}$$

$$\{(x_k, t_k) : (x_k, i_k) \in \varphi_s,\ t_k \text{ достигает второго уровня}\}. \tag{2.11}$$

Из построений ясно, что процессы (2.6) – (2.11) трансляционно-инвариантны и

$$\text{интенсивность (2.6)} = \text{интенсивности (2.9)},$$

$$\text{интенсивность (2.7)} = \text{интенсивности (2.10)}.$$

Обозначая через int интенсивность соответствующего точечного процесса, имеем

$$q_s \le \text{int (2.11)} = \text{int (2.9)} - \text{int (2.10)} = \text{int (2.6)} - \text{int (2.7)} = \text{int (2.8)}.$$

Покажем, что

$$\text{int (2.8)} \to 0. \tag{2.12}$$

Пусть F – распределение типичной марки (2.6) (подробности см. [2]). Для события B в пространстве направленных вверх деревьев имеем (см. [2]) : $F(B) = \lambda_B \lambda^{-1}$, где λ_B – интенсивность процесса $\{(x_k, t_k^*) : t_k^* \in B\}$, а λ – интенсивность (2.6). Выбирая $B = B_{s-1} =$ {деревья, достигающие $(s-1)$-го уровня}, получаем : int (2.8) $\to 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s\to\infty} F(B_s) = 0$. Но $\{B_s\}$ – монотонно убывающая последовательность событий. Следовательно, $\lim F(B_s) = F(\lim B_s) = F(B_\infty)$, где $B_\infty = \cap B_s =$ {бесконечные деревья}.

Итак, осталось показать, что $F(B_\infty) = 0$. Это следует из того (Лемма 4), что направленное вверх дерево t_0^* из Леммы 2 имеет вероятностное распределение F и по той же лемме оно конечно с вероятностью 1. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Вероятностное распределение F_0 направленного вверх дерева t_0^* совпадает с вероятностным распределением типичной марки точечного процесса (2.6), т.е. $F_0 = F$.*

Доказательство. Распределение F можно получить ([2]) как условное распределение следующим путем :

$$F(A) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P\left(\binom{\varepsilon}{1} \cap (t^* \in A)\right)}{P\binom{\varepsilon}{1}},$$

где ε – шар, убывая стремящийся к началу координат O, $\binom{\varepsilon}{1}$ – множество реализаций точечных процессов, имеющих только одну точку в ε, t^* – дерево с корнем в (единственной) точке из ε. Часть графа g, суженная на уровни $s = 2, 3, \ldots$ –стохастически независима от процесса $\varphi_1 = \psi_1$. Следовательно, обуславливающее событие $\binom{\varepsilon}{1}$ воздействует только на условное распределение марки i точки реализации из ε. В пределе последнее условное распределение превращается в распределение типичной марки в процессе $\{(x_k, i_k)\}$. Это распределение марки было использовано при построении дерева t_0^*. Лемма 4 доказана.

§3. ЭРГОДИЧНОСТЬ МАРКОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Сформулированная ниже основная теорема вытекает из следующего утверждения, являющегося расслабленной версией теоремы из [3]. Будем использовать обозначение $\binom{B}{l} = \{$реализации с l точками в $B\}$.

Утверждение 2. *Пусть $P, P_1, P_2, \ldots$ – распределения простых точечных процессов в полном сепарабельном метрическом пространстве X. Если для всех ограниченных борелевских множеств $B \subseteq X$ и всех неотрицательных целых l имеем $P_s\binom{B}{l} \to P\binom{B}{l}$ при $s \to \infty$, то последовательность $\{P_s\}$ слабо сходится к P.*

Следующая теорема дает достаточные условия для того, чтобы наша марковская последовательность точечных процессов была эргодичной.

Теорема 1. *Если условия (2.5) выполнены, то вероятностное распределение P_s процесса ψ_s в марковской последовательности $(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ слабо сходится к распределению P^* маркированного точечного процесса $\psi^* = \{(x_k, i_k) \in \varphi_1 : t_k^*$ четно$\}$, соответствующего (2.3).*

Доказательство. Для каждого $s = 1, 2, \ldots$ рассмотрим маркированные точечные процессы ψ_s и ψ^* как простые точечные процессы в $X = \mathbb{R}^d \times \{1, ..., n\}$ (реализации обоих точечных процессов лежат в X). Нам нужна метрика в X, в качестве которой мы выбираем сумму евклидовой метрики в $\mathbb{R}^d$ и дискретной метрики в $\{1, ..., n\}$. Пусть $B \subseteq X$ – ограниченное борелевское множество и $l \in \{0, 1, \ldots\}$. Тогда существует ограниченное борелевское множество $B_0 \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $B \subseteq B_0 \times \{1, \ldots, n\}$. Теперь рассмотрим процесс

$$v_s^* = \{(x_k, i_k) \in \varphi_1 :\ t_k^* \text{ четно и не достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}, \tag{3.1}$$

$$\psi^* \setminus v_s^* = \{(x_k, i_k) \in \varphi_1 :\ t_k^* \text{ четно и достигает } (s-1)\text{-го уровня}\}. \tag{3.2}$$

Обозначим через Q_s, R_s, Q_s^*, R_s^*, распределения точечных процессов (2.1), (2.2), (3.1), (3.2), соответственно. Пусть $\Im_s$ и $\Im_s^*$ совместные распределения пар точечных процессов (2.1),(2.2) и (3.1),(3.2). Легко проверить, что $Q_s = Q_s^*$. Пусть L_d – лебегова мера в $\mathbb{R}^d$. Используя знак $\mathbf{E}$ математического ожидания, получаем

$$\left|P^*\binom{B}{l} - P_s\binom{B}{l}\right| = \left|\sum_{i=0}^{l} \Im_s^*\left(\binom{B}{l-i} \times \binom{B}{i}\right) - \sum_{i=0}^{l} \Im_s\left(\binom{B}{l-i} \times \binom{B}{i}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\Im_s^*\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{0}\right)-\Im_s\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{0}\right)\right|+\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}=$$

$$=\left|\Im_s^*\left(\binom{B}{l}\times\mathcal{M}'\right)-\sum_{i=1}^{\infty}\Im_s^*\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{i}\right)-\right.$$

$$\left.-\Im_s\left(\binom{B}{l}\times\mathcal{M}'\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\Im_s\left(\binom{B}{l}\times\binom{B}{i}\right)\right|+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}\leq\left|Q_s^*\binom{B}{l}-Q_s\binom{B}{l}\right|+2\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+2\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}=$$

$$=2\left[\sum_{i=1}^{\infty}R_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}R_s\binom{B}{i}\right]\leq 2\left[\sum_{i=1}^{\infty}iR_s^*\binom{B}{i}+\sum_{i=1}^{\infty}iR_s\binom{B}{i}\right]=$$

$$=2\left[\mathbf{E}R_s^*(B)+\mathbf{E}R_s(B)\right]\leq 2\left[\mathbf{E}R_s^*(B_0\times\{1,\dots,n\})+\mathbf{E}R_s(B_0\times\{1,\dots,n\})\right]=$$

$$=2L_d(B_0)\;[\text{int }(3.2)+\text{int }(2.2)]\,.$$

Из леммы 3 следует, что int (2.2) $= q_s \to 0$ и int (3.2) $\leq$ int (2.8) $\to 0$ (см. (2.12)). Поэтому $\left|P^*\binom{B}{l}-P_s\binom{B}{l}\right|\to 0$, и согласно Утверждению 2, теорема доказана.

ABSTRACT. The paper considers a sequence of translation-invariant marked point processes in $\mathbb{R}^d$ with mark space $\{1,\dots,n\}$. The processes interact according to some mechanism determined by a random graph, which renders the sequence to be Markov. Conditions are found which guarantee the ergodicity of the sequence. A stochastic construction of the ergodic distribution is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, "Random graph approach to Gibbs processes with pair interaction", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 3 – 14, 1991.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. press, 1990.
3. K. Matthes, J. Kerstan, J. Mecke, Infinitely Divisible Point Processes, Wiley, Chichester, 1978.
4. T. E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer, Berlin, 1963.
5. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Наука, М., 1966.

19 ноября 1995 Ереванский государственный университет