ОПИСАНИЕ ВКЛЮЧЕНИЯ–ИСКЛЮЧЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

С. Ю. Дашян, Б. С. Нахапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 6, 1995

В работе описывается подход включения–исключения для построения случайных полей на ν -мерной целой решетке. Представлено сравнение с классическим гиббсовским описанием.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Подход включения–исключения был удачно применен в работе Амбарцумяна и Сукнасяна [1] в теории точечных процессов. Основным результатом этого подхода явилась следующая теорема.

Теорема А. (Р. В. Амбарцумян, Г. С. Сукнасян) Пусть задана система $\{f(x_1, \dots, x_n)\}$, $x_i \in \mathbb{R}^d$ неотрицательных симметричных функций, удовлетворяющая условию $f(x_1, \dots, x_n) < b^n$, $n = 1, 2, \dots$ для некоторого $b > 0$. Если для почти всех $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ и всех выпуклых $D \subset \mathbb{R}^d$ имеют место неравенства

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_D \dots \int_D f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \geq 0,$$

$$f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_D \dots \int_D f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n \geq 0, \quad m > 0,$$

то существует точечный процесс P такой, что в точках продолжения значения f совпадают с плотностями P .

Целью настоящей работы является применение того же подхода к конструкциям случайных полей на целой решетке $\mathbb{Z}^{\nu}$. Особое внимание уделяется классическим гиббсовским случайным полям. В работе описываются основные факты при предлагаемом подходе, приводятся некоторые примеры и утверждения для

достаточно широкого класса негиббсовских случайных полей. Отметим, что в настоящее время в статистической физике интенсивно изучаются негиббсовские случайные поля (см., например, [2] – [5]).

§2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И P -ФУНКЦИИ

Рассмотрим случайные поля на целой ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$. Для простоты предположим, что фазовое пространство X состоит из двух точек: $X = \{0, 1\}$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^\nu$, и пусть

$$X^\Lambda = \{x_t, t \in \Lambda\}, \quad x_t \in X, \quad t \in \Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}$$

– множество конфигураций (реализаций) на Λ . Каждый элемент $x \in X^\Lambda$ однозначно определяется по подмножеству Λ , где под конфигурацией x предполагается значение 1 (согласно физической терминологии это – подмножество, захваченное частицами). Поэтому всякую конфигурацию на Λ будем отождествлять с соответствующим подмножеством Λ . Вероятностное распределение на X^Λ обозначим через $P_\Lambda = \{P_\Lambda(x), x \subseteq \Lambda\}$, $\Lambda \in \mathcal{E}$. Для $\Lambda = \emptyset$ существует только одно вероятностное распределение $P_\emptyset(\emptyset) = 1$. Для $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $I \subseteq \Lambda$ обозначим

$$(P_\Lambda)_I(x) = \sum_{J \subseteq \Lambda \setminus I} P_\Lambda(x \cup J), \quad x \subseteq I.$$

Определение 1. Множество вероятностных распределений $P = \{P_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$ называется *согласованным в смысле Колмогорова*, если для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $I \subseteq \Lambda$ $(P_\Lambda)_I(x) = P_I(x)$, $x \subseteq I$.

Хорошо известно, что всякое множество вероятностных распределений, согласованное в смысле Колмогорова, определяет некоторую меру вероятности на $X^{\mathbb{Z}^\nu}$, эквивалентную некоторому случайному полю. При подходе включения-исключения условие согласованности в смысле Колмогорова заменяется некоторым условием неотрицательности, налагаемым на некоторые конечные суммы с меняющимися знаками слагаемых.

Пусть B – банахово пространство всех ограниченных функций, определенных на $\mathcal{E}$, с нормой

$$\|b\| = \sup_{\Lambda \in \mathcal{E}} \frac{1}{2n(\Lambda)} \sum_{J \subseteq \Lambda} |b_J|, \quad b = \{b_J, J \in \mathcal{E}\} \in B,$$

где $n(\Lambda)$ – некоторая нумерация элементов из $\mathcal{E}$.

Определение 2. Функцию $f = \{f_J, J \in \mathcal{E}\}$, $f \in B$ назовем P -функцией, если $f_\emptyset = 1$ и для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $x \subseteq \Lambda$

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J} \geq 0, \quad (1)$$

где $|\cdot|$ означает число точек конечного множества.

Заметим, что пространство $B^P \subset B$ всех P -функций является выпуклым закрытым подмножеством B . Нетрудно показать, что B^P компактно.

Теорема 1. Система $P = \{P_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$ вероятностных распределений согласована в смысле Колмогорова тогда и только тогда, когда существует P -функция f такая, что

$$P_\Lambda(x) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J}, \quad P_\Lambda(\emptyset) = f_\Lambda, \quad x \subseteq \Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}. \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $P = \{P_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$ — система вероятностей, согласованная в смысле Колмогорова. Положим $f_\Lambda = P_\Lambda(\emptyset)$, $\Lambda \in \mathcal{E}$. Очевидно $0 \leq f_\Lambda \leq 1$, $f_\emptyset = P_\emptyset(\emptyset) = 1$. Далее

$$\begin{aligned} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J} &= \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} P_{\Lambda \setminus J}(\emptyset) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} (P_\Lambda)_{\Lambda \setminus J}(\emptyset) = \\ &= \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \sum_{\tilde{J}: \tilde{J} \subseteq J} P_\Lambda(\tilde{J}) = \sum_{\tilde{J} \subseteq x} P_\Lambda(\tilde{J}) \sum_{J: \tilde{J} \subseteq J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} = P_\Lambda(x). \end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались соотношением

$$\sum_{A: B \subseteq A \subseteq C} (-1)^{|C \setminus A|} = \begin{cases} 1, & B = C, \\ 0, & B \neq C. \end{cases} \quad (3)$$

Достаточность. Пусть f — P -функция. Положим

$$P_\Lambda(x) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J}, \quad x \subseteq \Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}$$

и покажем, что $P = \{P_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$ — семейство вероятностных распределений, согласованное в смысле Колмогорова. Имеем

$$\sum_{x \subseteq \Lambda} P_\Lambda(x) = \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} f_{\Lambda \setminus J} = \sum_{J \subseteq \Lambda} f_{\Lambda \setminus J} \sum_{x: J \subseteq x \subseteq \Lambda} (-1)^{|x \setminus J|} = f_\emptyset = 1,$$

т.е. P – система вероятностных распределений. Проверим, что оно согласовано. Для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$ и $I \subseteq \Lambda$ можем написать

$$\begin{aligned} (P_\Lambda)_I(x) &= \sum_{J \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{\tilde{J} \subseteq \mathbb{Z}^v \setminus J} (-1)^{|\mathbb{Z}^v \setminus \tilde{J}|} f_{\Lambda \setminus \tilde{J}} = \\ &= \sum_{J \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{\tilde{J}_1 \subseteq \mathbb{Z}^v} (-1)^{|\mathbb{Z}^v \setminus \tilde{J}_1|} \sum_{\tilde{J}_2 \subseteq J} (-1)^{|\mathbb{Z}^v \setminus \tilde{J}_2|} f_{\Lambda \setminus (\tilde{J}_1 \cup \tilde{J}_2)} = \\ &= \sum_{\tilde{J}_1 \subseteq \mathbb{Z}^v} (-1)^{|\mathbb{Z}^v \setminus \tilde{J}_1|} \sum_{\tilde{J}_2 \subseteq \Lambda \setminus I} f_{\Lambda \setminus (\tilde{J}_1 \cup \tilde{J}_2)} \sum_{J: \tilde{J}_2 \subseteq J \subseteq \Lambda \setminus I} (-1)^{|J|} = \\ &= \sum_{\tilde{J}_1 \subseteq \mathbb{Z}^v} (-1)^{|\mathbb{Z}^v \setminus \tilde{J}_1|} f_{I \setminus \tilde{J}_1} = P_I(x). \end{aligned}$$

§3. ПРИМЕРЫ P -ФУНКЦИЙ

Пример 1. Пусть f – P -функция. Для любого $B \in \mathcal{E}$ такого, что $f_B > 0$, рассмотрим функцию $f^{(B)} = \{f_{B \cup J} (f_B)^{-1}, J \in \mathcal{E}\}$. Легко видеть, что $f^{(B)}$ – снова P -функция. Реализации соответствующих случайных полей могут достигнуть значения 1 только вне B .

Пример 2. Пусть P – случайное поле с независимыми компонентами, и пусть $f_t = P_{\{t\}}(\theta)$, $t \in \mathbb{Z}^v$. Соответствующей P -функцией будет

$$f = \left\{ \prod_{t \in J} f_t, J \in \mathcal{E} \right\}.$$

Случай $f_t \equiv q$, $t \in \mathbb{Z}^v$, $0 \leq q \leq 1$ соответствует случайному полю Бернулли.

Пример 3. Пусть $p(x)$, $x \in [0, 1]$ – плотность вероятности и $f = \{q^{|J|}, J \in \mathcal{E}\}$ – P -функция Бернулли. Функция

$$b = \left\{ \int_0^1 q^{|J|} p(q) dq, J \in \mathcal{E} \right\}$$

является P -функцией, соответствующей смеси случайных полей Бернулли. В случае $p(x) = \tau x^{\tau-1}$, $\tau > 0$ соответствующей P -функцией является

$$b = \left\{ \tau \int_0^1 q^{|\Lambda|+\tau-1} dq = \frac{\tau}{|\Lambda|+\tau}, \Lambda \in \mathcal{E} \right\}.$$

В этом случае множеством конечномерных распределений является

$$P_\Lambda(x) = \frac{\tau}{|\Lambda|+\tau} \prod_{i=1}^{|\Lambda|} \frac{\tau}{|\Lambda|+\tau-i}, \Lambda \in \mathcal{E}.$$

В §7 мы покажем, что это случайное поле негиббсовское.

Пример 4. Пусть $\beta_{t,s}$, $t, s \in \mathbb{Z}^d$ — набор неотрицательных чисел таких, что $\sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \beta_{t,s} < \infty$. Рассмотрим

$$f = \left\{ \exp \left[- \sum_{t,s \in J} \beta_{t,s} \right], \quad J \in \mathcal{E} \right\}.$$

Она — P -функция, которая является дискретным аналогом точечного случайного поля в $\mathbb{R}^d$ Амбарцумяна-Сукиасяна [1]. Кратко напомним основной результат работы [1]. Рассматривается следующая последовательность функций :

$$f(x_1) \equiv \alpha, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \alpha^n \prod_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, n\}} h(x_i, x_j), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

где $0 \leq h(x, y) \leq 1$ — симметричная функция в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$ — параметр (интенсивность), а произведение проводится по всем возможным два-подмножествам $\{1, \dots, n\}$. При условии сходимости

$$\sup_x \int_{\mathbb{R}^d} [1 - h(x, y)] dy < \infty$$

существует точечный процесс P в $\mathbb{R}^d$, для которого (4) представляет так называемые *абсолютные плотности*, т.е. для каждой последовательности $x_1, \dots, x_n$

$$P(dx_1, \dots, dx_n) = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Этот результат доказан в [1] с помощью теоремы А. Кажется возможным доказательство соответствующего результата для P -функций.

Пример 5. Здесь мы введем некоторые P -функции, встречающиеся в теории гиббсовских случайных полей. Для любого непустого $A \in \mathcal{E}$ фиксируем произвольную точку $t_A \in A$ и определим частичную упорядоченность в $\mathcal{E}$. Предположим, что $B < A$, $B, A \in \mathcal{E}$, если существует последовательность $B = B_1, B_2, \dots, B_n = A$ такая, что $B_{i-1} = B_i \setminus t_{B_i}$, $i = 2, \dots, n$. Последовательность

$$\beta = \{B_1, T_1; \dots; B_n, T_n\}, \quad B_i, T_i \in \mathcal{E}, \quad T_i \cap B_i = t_{B_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$B_1 \leq A, \quad B_i \leq B_{i-1} \cup T_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n$$

назовем путем с началом в A и длиной n . Множество всех путей с началом в A и длиной n мы обозначим через $B_A^{(n)}$, $A \in \mathcal{E}$. Пусть $K = (K_J, J \in \mathcal{E})$ — функция такая, что

$$\sum_{\substack{J \in \mathcal{E} \\ |J|=n}} |K_J| < \alpha \lambda^n, \quad \lambda(1 + \sqrt{\alpha})^2 < 1, \quad \lambda, \alpha > 0.$$

Тогда функция

$$f_J = 1 + \sum_n \sum_{\beta \in B_J^{(n)}} (-1)^n K_{\beta_1} \cdots K_{\beta_n}, \quad J \in \mathcal{E}$$

представляет собой P -функцию (см., например, [9], [10]).

§4. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И Q -ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы построим P -функции по принципу, используемому в теории гиббсовских случайных полей.

Определение 3. Функция $\theta = \{\theta_J, J \in \mathcal{E}\}$ называется Q -функцией, если $\theta_J > 0$, $J \in \mathcal{E}$, $\theta_\emptyset = 1$ и для любого $x \in \mathcal{E}$

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J \geq 0. \quad (5)$$

В противовес P -функциям Q -функции имеют простое построение.

Теорема 2. Функция $\theta = \{\theta_J, J \in \mathcal{E}\}$ будет Q -функцией тогда и только тогда, когда существует функция $H = \{H_S, S \in \mathcal{E}\}$, $H_S \geq 0$, $S \in \mathcal{E}$, $H_\emptyset = 1$ такая, что для каждого $J \in \mathcal{E}$, $\theta_J = \sum_{S \subseteq J} H_S$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\theta = \{\theta_J, J \in \mathcal{E}\}$ — Q -функция. Положим

$$H_S = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|} \theta_J, \quad S \in \mathcal{E}. \quad (6)$$

Поскольку θ — Q -функция, то согласно определению H_S имеем $H_S \geq 0$, $S \in \mathcal{E}$ и $H_\emptyset = 1$. Имеем

$$\sum_{S \subseteq \Lambda} H_S = \sum_{S \subseteq \Lambda} \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|} \theta_J = \sum_{J \subseteq \Lambda} \theta_J \sum_{S: J \subseteq S \subseteq \Lambda} (-1)^{|S \setminus J|} = \theta_\Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E}.$$

Достаточность. Пусть $\theta_\Lambda = \sum_{S \subseteq \Lambda} H_S$. Очевидно $\theta_J > 0$, $J \in \mathcal{E}$, $\theta_\emptyset = 1$. Наконец

$$\sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|} \theta_J = \sum_{J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|} \sum_{\tilde{J} \subseteq J} H_{\tilde{J}} =$$

$$= \sum_{\tilde{J} \subseteq S} H_{\tilde{J}} \sum_{J: \tilde{J} \subseteq J \subseteq S} (-1)^{|S \setminus J|} = H_S > 0, \quad S \in \mathcal{E}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $\theta = \{\theta_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$ — Q -функция. Пусть $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^v$ — последовательность возрастающих подмножеств такая, что для любого $J \in \mathcal{E}$ существует предел

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^v} \frac{\theta_{\Lambda \setminus J}}{\theta_\Lambda} = f_J. \quad (7)$$

Тогда $f = \{f_J, J \in \mathcal{E}\}$ — P -функция.

Доказательство. Для любого $I \in \mathcal{E}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{J \subseteq z} (-1)^{|z \setminus J|} f_{J \setminus I} &= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^v} \sum_{J \subseteq z} (-1)^{|z \setminus J|} \frac{\theta_{\Lambda \setminus (I \setminus J)}}{\theta_\Lambda} = \\ &= \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^v} \frac{1}{\theta_\Lambda} \sum_{J \subseteq z} (-1)^{|z \setminus J|} \theta_{(\Lambda \setminus I) \cup J}, \quad z \subseteq I. \end{aligned}$$

Поскольку θ — Q -функция, то для $\Lambda \in \mathcal{E}$, $I \subseteq \Lambda$, $S \subseteq \Lambda \setminus I$ и $z \subseteq I$ имеем

$$\sum_{J \subseteq z \cup S} (-1)^{|z \cup S \setminus J|} \theta_J \geq 0, \text{ поэтому}$$

$$D \equiv \sum_{S \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{J \subseteq z \cup S} (-1)^{|z \cup S \setminus J|} \theta_J \geq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D &= \sum_{S \subseteq \Lambda \setminus I} \sum_{J_1 \subseteq z} (-1)^{|z \setminus J_1|} \sum_{J_2 \subseteq \Lambda \setminus I} \theta_{J_1 \cup J_2} \sum_{J_2: J_2 \subseteq S \subseteq \Lambda \setminus I} (-1)^{|S \setminus J_2|} = \\ &= \sum_{J_1 \subseteq z} (-1)^{|z \setminus J_1|} \theta_{(\Lambda \setminus I) \cup J_1} \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Дадим характеристику Q -систем, используемых ниже в §§5,6.

Определение 4. Семейство вероятностных распределений $Q = \{Q_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}$, $Q_\Lambda(\emptyset) > 0$, $Q_\emptyset(\emptyset) = 1$ называется согласованным в смысле Добрушина, если для любых $\tilde{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{E}$, $\Lambda \cap \tilde{\Lambda} = \emptyset$

$$Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}(x) = \frac{Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}(\emptyset)}{Q_\Lambda(\emptyset)} Q_\Lambda(x), \quad x \subseteq \Lambda. \quad (8)$$

Переищем (8) в эквивалентном виде

$$Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}(x) = Q_{\Lambda}(x) (Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}})_{\tilde{\Lambda}}^{-1}(\theta). \quad (9)$$

Теорема 4. Система $Q = \{Q_{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{E}\}$, $Q_{\Lambda}(\theta) > 0$, $Q_{\emptyset}(\theta) = 1$ вероятностных распределений согласована в смысле Добрушина тогда и только тогда, когда существует Q -функция $\theta = \{\theta_J, J \in \mathcal{E}\}$ такая, что для любого $\Lambda \in \mathcal{E}$

$$Q_{\Lambda}(x) = \frac{1}{\theta_{\Lambda}} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J, \quad x \subseteq \Lambda. \quad (10)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $Q = \{Q_{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{E}\}$, $Q_{\Lambda}(\theta) > 0$, $Q_{\emptyset}(\theta) = 1$ – множество вероятностных распределений, согласованное в смысле Добрушина. Положим $\theta_{\Lambda} = [Q_{\Lambda}(\theta)]^{-1}$, $\Lambda \in \mathcal{E}$. Имеем

$$1 = \sum_{S \subseteq J} Q_J(S) = \sum_{S \subseteq J} \frac{Q_J(\theta)}{Q_{\Lambda}(\theta)} Q_{\Lambda}(S) = \frac{Q_J(\theta)}{Q_{\Lambda}(\theta)} \sum_{S \subseteq J} Q_{\Lambda}(S).$$

Отсюда получим

$$\theta_J = \theta_{\Lambda} \sum_{S \subseteq J} Q_{\Lambda}(S).$$

Следовательно

$$\sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J = \theta_{\Lambda} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \sum_{S \subseteq J} Q_{\Lambda}(S) = \theta_{\Lambda} Q_{\Lambda}(x),$$

и мы получим (10).

Достаточность. Пусть существует Q -функция $\theta = \{\theta_J, J \in \mathcal{E}\}$ такая, что имеет место (10). Согласно определению, $Q_{\Lambda}(x) \geq 0$, $Q_{\emptyset}(\theta) = 1$. Далее имеем

$$\sum_{x \subseteq \Lambda} Q_{\Lambda}(x) = \frac{1}{\theta_{\Lambda}} \sum_{x \subseteq \Lambda} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J = \frac{1}{\theta_{\Lambda}} \sum_{J \subseteq \Lambda} \theta_J \sum_{x: J \subseteq x \subseteq \Lambda} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J = 1,$$

т.е. система (10) – множество вероятностных распределений. Проверим его согласованность в смысле Добрушина. Сначала заметим, что $Q_{\Lambda}(\theta) = \frac{1}{\theta_{\Lambda}}$, $\Lambda \in \mathcal{E}$.

Далее

$$Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}(x) = \frac{1}{\theta_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}} \sum_{J \subseteq x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J = \frac{\theta_{\Lambda}}{\theta_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}} Q_{\Lambda}(x) = \frac{Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}(\theta)}{Q_{\Lambda}(\theta)} Q_{\Lambda}(x), \quad x \subseteq \Lambda.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Если $\theta = \{\theta_J, J \in \mathcal{E}\}$ — Q -функция, то

$$f^{(\Lambda)} = \left\{ f_J = \frac{\theta_{\Lambda \setminus J}}{\theta_{\Lambda}}, J \in \mathcal{E} \right\}$$

— P -функция с параметрическим множеством $\Lambda \in \mathcal{E}$. Вероятностные распределения для соответствующих случайных полей имеют вид

$$P_I^{(\Lambda)}(x) = (P_{\Lambda})_{\Lambda \cap I}(x), \quad x \subset I,$$

$$(P_{\Lambda})_{\emptyset}(x) = \begin{cases} 1, & x = \emptyset, \\ 0, & x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Это — случайное поле в конечном объеме Λ .

Замечание 2. Поскольку множество всех P -функций компактно, то можно выбрать сходящуюся последовательность P -функций $f^{(\Lambda_k)} \rightarrow f$ (при $k \rightarrow \infty$), где $\Lambda_k \uparrow \mathbb{Z}^{\nu}$, $k \rightarrow \infty$ — некоторая возрастающая последовательность подмножеств. Случайное поле с P -функцией f называется предельным для случайных полей в конечных объемах.

§5. Q -ФУНКЦИИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $P = \{P_{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{E}\}$ — случайное поле. Согласно хорошо известной теореме мартингальной сходимости для любых $\Lambda \in \mathcal{E}$, $x \subset \Lambda$, $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda$ существует предел

$$Q_{\Lambda}^{\bar{x}}(z) = \lim_{\tilde{\Lambda} \uparrow \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda} \frac{P_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}^{\sim}(z \cup \bar{x}_{\tilde{\Lambda}})}{P_{\tilde{\Lambda}}^{\sim}(\bar{x}_{\tilde{\Lambda}})} \quad \text{п.н.}, \quad (11)$$

где $\bar{x}_{\tilde{\Lambda}} = \bar{x} \cap \tilde{\Lambda}$. Для каждого $\Lambda \in \mathcal{E}$ величина (11) определяет некоторое вероятностное распределение, называемое *условным распределением на Λ с граничным условием $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda$* (см. [6], [7]). Семейство условных распределений, зависящих от $\Lambda \in \mathcal{E}$ и граничных условий $\bar{x}$

$$Q = \{Q_{\Lambda}^{\bar{x}}, \Lambda \in \mathcal{E}, \bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda\} \quad (11')$$

называется *условным распределением случайного поля P* .

Определение 5. Система вероятностных распределений (11') называется *согласованной в смысле Добрушина*, если для любых $\tilde{\Lambda}, \Lambda \in \mathcal{E}$, $\Lambda \cap \tilde{\Lambda} = \emptyset$ и любых $x \in \Lambda$, $y \in \tilde{\Lambda}$, $\bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu} \setminus (\Lambda \cup \tilde{\Lambda})$

$$Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}^{\bar{x}}(x \cup y) = Q_{\Lambda}^{\bar{x} \cup y}(x) \left(Q_{\Lambda \cup \tilde{\Lambda}}^{\bar{x}} \right)_{\tilde{\Lambda}}(y). \quad (12)$$

Определение 6. Функция $\theta(\bar{x}) = \{\theta_J^{\bar{x}}, J \in \mathcal{E}\}$, $\theta_{\emptyset}^{\bar{x}} = 1$, $\bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu}$, $\bar{x}_J = \bar{x} \cap (\mathbb{Z}^{\nu} \setminus J)$ называется *Q-функцией с граничным условием $\bar{x}$* , если для любого $x \in \mathcal{E}$

$$\sum_{J \subset x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J^{\bar{x}} \geq 0.$$

Любая функция $H(\bar{x}) = \{H_J^{\bar{x}}, J \in \mathcal{E}\}$, $H_{\emptyset}^{\bar{x}} = 1$, $\bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu}$ с неотрицательными значениями называется *H-функцией с граничным условием $\bar{x}$* .

Теорема 5. Функция $\theta(\bar{x}) = \{\theta_J^{\bar{x}}, J \in \mathcal{E}\}$, $\theta_{\emptyset}^{\bar{x}} = 1$, $\bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu}$ является Q-функцией с граничным условием $\bar{x}$ тогда и только тогда, когда существует H-функция $H(\bar{x})$ такая, что для любого $\Lambda \in \mathcal{E}$

$$\theta_{\Lambda}^{\bar{x}} = \sum_{J \subset \Lambda} H_J^{\bar{x}}.$$

Определение 7. Система $\theta = \{\theta(\bar{x}), \bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu}\}$ Q-функций, зависящих от граничных условий, называется *согласованной*, если соответствующая система $H = \{H(\bar{x}), \bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu}\}$ H-функций обладает следующим свойством: для любых $J_1, J_2 \in \mathcal{E}$ и $\bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu}$

$$H_{J_1 \cup J_2}^{\bar{x}} = H_{J_1}^{\bar{x}} H_{J_2}^{\bar{x}}.$$

Теорема 6. Система условных распределений (11') согласована в смысле Добрушина тогда и только тогда, когда существует согласованная система Q-функций $\theta = \{\theta(\bar{x}), \bar{x} \in \mathbb{Z}^{\nu}\}$ такая, что

$$Q_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) = \frac{1}{\theta_{\Lambda}^{\bar{x}}} \sum_{J \subset x} (-1)^{|x \setminus J|} \theta_J^{\bar{x}}, \quad x \in \Lambda.$$

Доказательства теорем 5, 6 аналогичны доказательствам теорем 2, 4. Последние соответствуют случаю пустых граничных условий.

§6. Q-ФУНКЦИИ ДЛЯ ГИББСОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Измеримую функцию Φ , определенную на $\mathcal{E}$, назовем *потенциалом*, если

$$\sup_{a \in \mathbb{Z}^{\nu}} \sum_{J: a \in J \in \mathcal{E}} |\Phi(J)| < \infty. \quad (13)$$

Потенциальная энергия конфигурации $x \subset \Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{E}$ с граничным условием $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda$ определяется по формуле

$$U^{\bar{x}}(x) = \sum_{\emptyset \neq J \subset x} \sum_{\bar{J} \subset \bar{x}} \Phi(J \cup \bar{J}).$$

Q-функции с граничным условием $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ для гиббсовских случайных полей имеют вид

$$\mathbb{Z}(\bar{x}) = \left\{ \mathbb{Z}_{\Lambda}^{\bar{x}\Lambda^{\circ}} = \sum_{x \subset \Lambda} \exp[-U^{\bar{x}\Lambda^{\circ}}(x)], \quad \Lambda \in \mathcal{E} \right\}.$$

Соответствующими гиббсовскими условными распределениями являются

$$Q_{\Lambda}^{\bar{x}\Lambda^{\circ}}(x) = \left(\mathbb{Z}_{\Lambda}^{\bar{x}\Lambda^{\circ}} \right)^{-1} \exp[-U^{\bar{x}\Lambda^{\circ}}(x)], \quad x \subset \Lambda.$$

Всякий элемент закрытой выпуклой оболочки множества предельных гиббсовских распределений называется *гиббсовским случайным полем* (см. [7], [8]). Отметим также, что всякая H -система, соответствующая гиббсовскому случайному полю, имеет вид

$$\{H_S^{\bar{x}} = \exp[-U^{\bar{x}}(S)], \quad S \in \mathcal{E}, \quad \bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus S\}.$$

§7. НЕ ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Ниже мы построим некоторые негиббсовские случайные поля.

Предложение 1. Пусть $\theta = \{\theta_J^{\bar{x}}, J \in \mathcal{E}, \bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus J\}$ — согласованная система Q-функций и $H = \{H_J^{\bar{x}}, J \in \mathcal{E}, \bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus J\}$ — соответствующая система неотрицательных функций (H -система). Пусть функция $R(\bar{x})$, $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ такая, что $R(\bar{x}_1) = R(\bar{x}_2)$, если $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ до конечного числа точек решетки. Тогда система

$$H_R = \left\{ (H_J^{\bar{x}})^{R(\bar{x})}, \quad J \in \mathcal{E}, \quad \bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus J \right\}$$

определяет некоторую согласованную θ -систему Q-функций, которую обозначим через θ_R .

Доказательство. Для любых $J_1, J_2 \in \mathcal{E}$ и $\bar{x} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \{J_1 \cup J_2\}$ можем написать

$$(H_{J_1 \cup J_2}^{\bar{x}})^{R(\bar{x})} = \left(H_{J_1}^{\bar{x}} H_{J_2}^{\bar{x} \cup J_1} \right)^{R(\bar{x})} =$$

$$= (H_{J_1}^{\bar{x}})^{R(\bar{x})} (H_{J_2}^{\bar{x} \cup J_1})^{R(\bar{x})} = (H_{J_1}^{\bar{x}})^{R(\bar{x})} (H_{J_2}^{\bar{x} \cup J_1})^{R(\bar{x} \cup J_1)}.$$

Предложение 2. Пусть $\theta = \{\theta_J, J \in \mathcal{E}, \bar{x} \subset \mathbb{Z}^v \setminus J\}$ – гиббсовская система Q -функций. Тогда соответствующая θ_R – негиббсовская система Q -функций.

Доказательство. Поскольку θ – гиббсовская, то соответствующая H система имеет вид

$$H = \{\exp[-U^{\bar{x}}(x)], x \subset \Lambda, \bar{x} \subset \mathbb{Z}^v \setminus \Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}.$$

Следовательно

$$H_R = \{\exp[-U^{\bar{x}}(x)R(\bar{x})], x \subset \Lambda, \bar{x} \subset \mathbb{Z}^v \setminus \Lambda, \Lambda \in \mathcal{E}\}.$$

Согласно предложению 1 H_R определяет некоторую θ_R , которая согласована и, следовательно, в свою очередь, определяет случайное поле. Покажем, что это случайное поле негиббсовское, т.е. нет такого потенциала $\tilde{\Phi}$, что

$$U^{\bar{x}}(x)R(\bar{x}) = \sum_{J \subset x} \sum_{\emptyset \neq \tilde{J} \subset \bar{x}} \tilde{\Phi}(J \cup \tilde{J}). \quad (14)$$

Предположим, что обратное утверждение верно, т.е. имеет место (14). Для $x = \emptyset$ имеем

$$\left(\Phi(\emptyset) + \sum_{\emptyset \neq J \subset \bar{x}} \Phi(J) \right) R(\bar{x}) = \tilde{\Phi}(\emptyset) + \sum_{\emptyset \neq J \subset \bar{x}} \tilde{\Phi}(J).$$

Следовательно, если $\bar{x} = \emptyset$, то $\Phi(\emptyset)R(\emptyset) = \tilde{\Phi}(\emptyset)$ и если $\bar{x} = \{t\}$, то

$$[\Phi(\emptyset) + \Phi(t)]R(t) = \tilde{\Phi}(\emptyset) + \tilde{\Phi}(t), \quad [\Phi(\emptyset) + \Phi(t)]R(\emptyset) = \tilde{\Phi}(\emptyset) + \tilde{\Phi}(t), \quad \Phi(t)R(\emptyset) = \tilde{\Phi}(t).$$

Аналогичным образом находим, что $\Phi(J)R(\emptyset) = \tilde{\Phi}(t)$ для любого $J \in \mathcal{E}$. Поэтому

$$H^{\bar{x}}(x)R(\bar{x}) = H^{\bar{x}}(x)R(\emptyset) \quad \text{или} \quad R(\bar{x}) = R(\emptyset).$$

Однако последнее соотношение неверно, если $\bar{x}$ бесконечно.

Теперь покажем, что случайное поле примера 3 негиббсовское. Условные вероятности имеют вид

$$Q_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) = p^{|\bar{x}|} (1 - p(\bar{x}))^{|\Lambda| - |\bar{x}|}, \quad x \subset \Lambda, \quad \bar{x} \subset \mathbb{Z}^v \setminus \Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{E},$$

где

$$p(\bar{x}) = \lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \frac{|\bar{x}|}{|\Lambda|} \quad \text{п.н.}$$

Запишем $Q_{\Lambda}^{\bar{x}}(x)$ в виде

$$Q_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) = \frac{\left(\frac{p(\bar{x})}{1-p(\bar{x})}\right)^{|x|}}{(1-p(\bar{x}))^{-|\Lambda|}}.$$

Поэтому нормирующим фактором будет $Z_{\Lambda}(\bar{x}) = (1-p(\bar{x}))^{-|\Lambda|}$, а потенциальной энергией будет

$$U^{\bar{x}}(x) = |x| \ln \frac{p(\bar{x})}{1-p(\bar{x})}.$$

Согласно предложению 2, эта потенциальная энергия не порождает гиббсовского случайного поля в классическом смысле.

ABSTRACT. The inclusion-exclusion approach towards construction of random fields on the ν -dimensional integer lattice is described. Comparison with classical Gibbs description is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, H. S. Sukiasian, "Inclusion-exclusion and point processes", Acta Appl. Math., vol. 22, pp. 15 - 31, 1991.
2. R. H. Schonmann, "Projections of Gibbs measures may be non Gibbsian", CMP, vol. 124, pp. 1 - 7, 1989.
3. R. B. Israel, "Banach algebras and Kadanoff transformations", in Random Fields (Estergom 1979), North-Holland, vol. 7, pp. 593 - 608, 1981.
4. J. L. Lebovitz, C. Mayes, "The effect of an external field on an interface, entropic repulsion", J. Stat. Phys., vol. 46, pp. 39 - 49, 1987.
5. A. van Enter, R. Fernandez, A. Sokal, "Regularity properties and pathologies of position - space renormalization - group transformations : scope and limitations of Gibbsian theory", J. Stat. Phys., vol. 72, № 5,6, 1993.
6. R. L. Dobrushin, "The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity", Th. Prob. Appl., vol. 13, pp. 197 - 224, 1968.
7. R. L. Dobrushin, "Gibbsian random fields for lattice systems with pairwise interactions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 292 - 301, 1968.
8. R. L. Dobrushin, "The problem of uniqueness of a Gibbs random field and the problem of phase transition", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 302 - 312, 1968.
9. V. A. Malyshev, "Cluster expansion in lattice models of statistical physics and the quantum theory of fields", Russian Math. Surveys, vol. 35, no. 2, pp. 3 - 53, 1980.
10. В. А. Малышев, Р. А. Мянлос, Гиббсовские Случайные Поля. Метод Кластерных Расширений, Наука, М., 1985.

19 ноября 1995

Институт математики
НАН Армении