

УБЫВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ В КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ С ВАКУУМОМ

Б. С. Нахапетян, С. К. Погосян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 6, 1995

В настоящей статье мы рассматриваем решетчатые спиновые системы с общим вакуумным потенциалом и стандартное спиновое пространство. Эти системы обобщают так называемые конфигурационные системы, которые относятся к особому случаю, когда спиновое пространство — синглетон. Мы показываем, что при некоторых условиях на потенциал, гиббсовские распределения в больших сосудах удовлетворяют условию равномерно сильного перемешивания. Получается, что конечно-сосудистые гиббсовские распределения и соответствующие предельные поля имеют существенно различные оценки для коэффициента перемешивания. В первом случае они представляют собой сумму двух членов, один из которых отвечает за скорость убывания корреляций, а другой — за скорость стремления к предельному гиббсовскому полю при увеличении сосуда.

1°. Слабая коррелированность значений случайного поля является тем фундаментальным свойством, которое позволяет для случайных полей, им обладающих, устанавливать многие содержательные теоремы, в частности, построить теорию предельных теорем, аналогичную имеющей место для последовательностей независимых случайных величин (см., например, [1] — [3]). В работах, посвященных этой тематике, используется широкий спектр определений этого свойства: эргодичность, условия перемешивания, семинвариантные условия слабой зависимости, ассоциативность, (положительная зависимость) и т.д.

Другим направлением, где убывание корреляций играет важную роль, является проблема существования и единственности случайного поля с заданной системой условных распределений. Это впервые обсуждалось в основополагающей работе

Добрушина [4] о задании случайного поля с помощью системы условных распределений. В связи с этим, особый интерес представляют гиббсовские случайные поля. Совокупность гиббсовских распределений в конечных сосудах, вообще говоря, не является согласованной в смысле Колмогорова. Таковыми оказываются системы конечномерных распределений для предельных гиббсовских распределений. Гиббсовские распределения в конечных сосудах представляют собой систему условных распределений для предельных гиббсовских полей (см. [5,8]).

В настоящей работе мы изучаем решетчатые спиновые системы с вакуумным потенциалом общего взаимодействия и стандартным спиновым пространством. Эти системы естественным образом обобщают так называемые конфигурационные системы, которые соответствуют особому случаю, когда спиновое пространство – синглетон. Приводятся условия на потенциал, при которых соответствующие гиббсовские распределения в больших, но конечных сосудах удовлетворяют условию равномерно сильного перемешивания. Оказывается, что конечномерные гиббсовские распределения и соответствующие предельные поля имеют существенно разные выражения для оценки коэффициента перемешивания. В первом случае это сумма двух членов, один из которых отвечает за скорость убывания корреляций, а другой – за скорость стремления к предельному гиббсовскому распределению при увеличении сосуда.

Из полученных оценок следует, что предельное гиббсовское распределение единственно и удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания. При степенном или экспоненциально убывающем потенциале, когда увеличивается расстояние между рассматриваемыми значениями поля, оценки убывают, соответственно, степенным или экспоненциальным образом, с одинаковой скоростью. В статье мы развиваем результаты работы [7].

Следует отметить, что применение общих результатов Добрушина [4] к рассматриваемым нами системам приводит к более ограничительным условиям на потенциал. Используемые в статье корреляционные уравнения были получены одним из авторов [7] и являются обобщением корреляционных уравнений Гал-

лавоти и Миракл-Соля [8].

2°. Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство¹ с конечной и неотрицательной мерой μ , и пусть B — σ -алгебра его борелевских подмножеств.

Для простоты предполагаем, что $\mu(X) = 1$.

Пусть $\mathbb{Z}^\nu$, $\nu \geq 1$ — ν -мерная целочисленная решетка. Для $I \subset \mathbb{Z}^\nu$ через $C(I)$ обозначим множество всех конечных подмножеств I , а через X^I — декартово произведение $\prod_{t \in I} X_t$, где все X_t являются копиями пространства X . Мы также будем считать X^I пространством функций $(x(t), t \in I)$, определенных на I со значениями в X . Через B^I обозначим борелевскую σ -алгебру на X^I , соответствующую топологии произведения, а через μ^I — соответствующее мер произведение мер. Рассмотрим пространство

$$L(I) = \bigcup_{J \in C(I)} X^J, \quad I \subset \mathbb{Z}^\nu$$

с σ -алгеброй $B(I)$ и мерой m_I . По определению, их проекции на каждое X^J , $J \in C(I)$ совпадают с B^J и μ^J соответственно. Здесь $X^\emptyset = \{\emptyset\}$ и $\mu^\emptyset(X^\emptyset) = 1$.

Для любого $I \in C(\mathbb{Z}^\nu)$, $L(I)$ — компактное сепарабельное метрическое пространство и $B(I)$ — его борелевская σ -алгебра.

Пространство $(L(I), B(I), m_I)$ назовем пространством конфигураций в I .

Мы также будем рассматривать пространство

$$\tilde{L}(I) = \bigcup_{J \subset I} X^J.$$

Элемент $x \in L(I)$ назовем конфигурацией на J и обозначим $s(x) = J$, если $x \in X^J$, $J \subset I$. Сужение x на $V \subset J$ обозначим через x_V , т.е. $x_V = (x(t); t \in V)$. Если $x = (x(t), t \in I)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}(t), t \in \tilde{I})$, $I \cap \tilde{I} = \emptyset$, то через $x + \tilde{x}$ обозначим конфигурацию на $I \cup \tilde{I}$, определяемую формулой

$$(x + \tilde{x})(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in I, \\ \tilde{x}(t), & \text{если } t \in \tilde{I}. \end{cases}$$

Пусть для $A \in B(I)$, $\tilde{A} \in B(\tilde{I})$ $A + \tilde{A} = \{x + \tilde{x}: x \in A, \tilde{x} \in \tilde{A}\}$.

¹Результаты работы остаются верными, если X — стандартное борелевское пространство (см. [9])

Предполагается, что потенциал взаимодействия Φ — измеримая вещественная функция на L . Здесь и ниже будем писать $L, \tilde{L}$ и C вместо $L(\mathbb{Z}^\nu)$, $\tilde{L}(\mathbb{Z}^\nu)$ и $C(\mathbb{Z}^\nu)$. Потенциал Φ назовем трансляционно-инвариантным, если для любых $a \in \mathbb{Z}^\nu$ и $x \in L$ с $s(x) = I$ имеем $\Phi(x) = \Phi(\bar{x})$, где $s(\bar{x}) = I + a$ и $\bar{x}(t) = x(t - a)$, $t \in I + a$. Предположим, что $\Phi(x) = 0$ при $|s(x)| = 1$, где $|\cdot|$ означает кардинальность множества. Положим также $z(x) = \prod_{t \in s(x)} \exp(-\Phi(x(t)))$.

Мы будем рассматривать трансляционно-инвариантные потенциалы Φ , удовлетворяющие условию

$$\|\Phi\| = \sum_{\substack{I \in C, \\ 0 \in I}} \sup_{x \in X^I} |\Phi(x)| < \infty.$$

Пусть $I \in C$ и $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus I)$. Потенциальная энергия конфигурации $x \in L(I)$ с граничным условием $\bar{x}$ определяется формулой

$$U^{\bar{x}}(x) = \sum_{J: 0 \neq J \subset s(x)} \sum_{\bar{J} \in C(s(\bar{x}))} \Phi(x_J + \bar{x}_{\bar{J}}).$$

Определим распределение Гиббса в конечном объеме $I \in C$ с граничным условием $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus I)$ как вероятностную меру $P_I^{\bar{x}}$ на $B(I)$, абсолютно непрерывную относительно m_I , с плотностью

$$q_I^{\bar{x}}(x) = \frac{z(x) \exp(-U^{\bar{x}}(x))}{\Xi(I, \bar{x})}, \quad x \in L(I), \quad (2.1)$$

где нормирующий множитель

$$\Xi(I, \bar{x}) = \int_{L(I)} z(x) \exp(-U^{\bar{x}}(x)) m_I(dx)$$

называется статистической функцией.

Корреляционные функции

$$\rho_I^{\bar{x}}(x) = \begin{cases} \frac{\int_{L(I \setminus s(x))} z(x+y) \exp(-U^{\bar{x}}(x+y)) m_{I \setminus s(x)}(dy), & \text{если } x \in L(I), \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (2.2)$$

будут основным инструментом в нашем изучении свойств распределения (2.1).

Для любых $I \subset \mathbb{Z}^\nu$, $J \in C(I)$ определим отображение $\pi_{I,J}: \tilde{L}(I) \rightarrow L(J)$ по формуле $\pi_{I,J}(x) = x_J$, $x \in \tilde{L}(I)$. Пусть $\tilde{B}(I)$ — σ -алгебра в $\tilde{L}(I)$, порожденная

отображениями $\{\pi_{J,J}; J \in \mathcal{C}(I)\}$. Тогда $(\tilde{L}(I), \tilde{B}(I))$ — проективный предел измеримых пространств $\{(L(J), B(J)); J \in \mathcal{C}(I)\}$.

Для вероятностной меры P на $\tilde{B}(I)$ или $B(I)$, $I \subset \mathbb{Z}^\nu$, через $(P)_J$ (часто через P_J) обозначим сужение P на $B(J)$, $J \in \mathcal{C}(I)$.

Пусть $T \subset \mathbb{Z}^\nu$ — бесконечное подмножество и $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$. Если для возрастающей последовательности множеств $\Lambda_n \in \mathcal{C}$, $\Lambda_n \uparrow T$, $n \rightarrow \infty$ и последовательности граничных условий $\bar{x}_n \in \tilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$ существует предел $P_{T,J}^{\bar{x}} = \omega \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{\Lambda_n}^{\bar{x} + \bar{x}_n})_J$ при любом $J \in \mathcal{C}(T)$, то существует единственная вероятностная мера $P_T^{\bar{x}}$ на проективном пределе $(\tilde{L}(T), \tilde{B}(T))$, причем такая, что $(P_T^{\bar{x}})_J = P_{T,J}^{\bar{x}}$, $J \in \mathcal{C}(T)$ (см. [9]). Эту вероятностную меру мы назовем предельной гиббсовской мерой на T . Если $T = \mathbb{Z}^\nu$, то $P \equiv P_{\mathbb{Z}^\nu}^{\bar{x}}$ — обычная предельная гиббсовская мера на $\mathbb{Z}^\nu$.

3°. В этом параграфе мы даем необходимые определения и формулируем основные результаты. Через $\mathcal{A}$ обозначим класс трансляционно инвариантных потенциалов Φ , удовлетворяющих следующим условиям :

$$\|\Phi\| < \infty; \quad \gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z)\right) < 1,$$

где

$$z = \sup_{x \in X} z(x), \quad \gamma_\Phi(z) = \frac{z \exp(\|\Phi\|)}{1 + z \exp(\|\Phi\|)},$$

$$C_\Phi = 2 \exp(e^{\|\Phi\|} - 1) - 2, \quad \tilde{C}_\Phi(z) = \beta(X) z e^{2\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) (C_\Phi + 2),$$

$$\beta(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } |X| = 1, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любых $x_1, x_2 \in \tilde{L}$ положим

$$x_1 \Delta x_2 = s(x_1) \cup s(x_2) \setminus E(x_1, x_2),$$

где $E(x_1, x_2)$ — наибольшее множество S такое, что $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in S$.

Рассмотрим следующую метрику на $\mathbb{Z}^\nu$:

$$\delta(t_1, t_2) = \max_{1 \leq i \leq \nu} |t_1^{(i)} - t_2^{(i)}|, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^\nu.$$

Для $J_1, J_2 \subset \mathbb{Z}^v$ через $\delta(J_1, J_2)$ обозначим расстояние между множествами J_1, J_2 :

$$\delta(J_1, J_2) = \inf_{t_1 \in J_1, t_2 \in J_2} \delta(t_1, t_2).$$

Предполагаем, что $\delta(J, \emptyset) = \infty$ для любого $J \in \mathcal{C}$. Для потенциала $\Phi \in \mathcal{A}$ и неотрицательного числа d положим

$$\alpha(d) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\gamma_{\Phi}(z) \left(1 + C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z) \right) \right]^n r \left(\frac{d}{n+1} \right), \quad (3.1)$$

где

$$r(d) = \frac{1}{\|\Phi\|} \sum_{J \in \mathcal{C}: O \in J \notin S(O, d)} \sup_{z \in X^J} |\Phi(z)|. \quad (3.2)$$

Здесь $S(O, d) = \{t \in \mathbb{Z}^v: \delta(O, t) \leq d\}$. Очевидно $r(d)$ — монотонно убывающая функция, стремящаяся к нулю на бесконечности. Положим $r(\infty) = 0$.

Предложение 1. а) Если потенциал $\Phi \in \mathcal{A}$ убывает степенным образом с показателем γ , т. е.

$$\|\Phi\|_{\gamma} = \sum_{J \in \mathcal{C}: O \in J} (\text{Diam } J)^{\gamma} \sup_{z \in X^J} |\Phi(z)| < \infty, \quad \gamma > 0, \quad (3.3)$$

то величины α и r убывают степенным образом с тем же показателем.

б) Если $\Phi \in \mathcal{A}$ убывает экспоненциально, т. е.

$$\|\Phi\|_{\gamma}^{(1)} = \sum_{J \in \mathcal{C}: O \in J} e^{\gamma \text{Diam } J} \sup_{z \in X^J} |\Phi(z)| < \infty, \quad \gamma > 0, \quad (3.4)$$

то величины α и r убывают экспоненциально.

Доказательство. Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$r(d) \leq \frac{\|\Phi\|_{\gamma}}{\|\Phi\|} d^{-\gamma}.$$

Следовательно

$$\alpha(d) \leq d^{-\gamma} \frac{\|\Phi\|_{\gamma}}{\|\Phi\|} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\gamma_{\Phi}(z) \left(1 + C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z) \right) \right]^n (n+1)^{\gamma},$$

что и доказывает пункт а).

Аналогичным образом из (3.4) получаем

$$r(d) \leq \frac{\|\Phi\|_{\gamma}^{(1)}}{\|\Phi\|} e^{-\gamma d}.$$

Поэтому

$$\alpha(d) \leq e^{-\gamma d} \frac{\|\Phi\|_7^{(1)}}{\|\Phi\|} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\gamma_{\Phi}(z) \left(1 + C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z) \right) \right]^n \exp \left(\gamma d \frac{n}{n+1} \right).$$

Предложение 1 доказано.

Мы будем говорить, что случайное поле P_T на $T \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания $\varphi_I(d)$, $d \geq 0$, $\varphi_I(d) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$, если для всех $I, V \in \mathcal{C}(T)$, $I \cap V = \emptyset$ имеет место следующее неравенство :

$$\left| (P_T)_{I/V}(A/B) - (P_T)_I(A) \right| \leq \varphi_I(\delta(I, V)), \quad (3.5)$$

где $A \in \mathcal{B}(I)$, $B \in \mathcal{B}(V)$, $(P_T)_V(B) > 0$ и

$$(P_T)_{I/V}(A/B) = \frac{(P_T)_{I \cup V}(A+B)}{(P_T)_V(B)}.$$

Для $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ положим

$$\chi_{\Lambda}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in L(\Lambda), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательства нижеследующих теорем 1–4 даны в разделе 5.

Теорема 1. Пусть $\Phi \in \mathcal{A}$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathcal{C}$, и пусть $x \in L(\Lambda_1)$, $\bar{x}_i \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda_i)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\left| \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_1}(x) - \rho_{\Lambda_2}^{\bar{x}_2}(x) \right| \leq B_{\Phi} \cdot \alpha(\delta(s(x), \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)) + \gamma_{\Phi}(z) \left(C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z) \right) \alpha(\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)), \quad (3.6)$$

где

$$B_{\Phi} = \frac{ze^{2\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) \cdot (1 + ze^{\|\Phi\|})}{(\hat{z} + e^{\|\Phi\|}) (1 + 2ze^{\|\Phi\|})} (2 + C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z)) + \\ + \gamma_{\Phi}(z) e^{\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) \cdot [2 + C_{\Phi} + 4z(C_{\Phi} + 1)]$$

$$\text{и } \hat{z} = \int_{\mathcal{X}} z(x) \mu(dx).$$

Пусть $\{\Lambda_n \in \mathcal{C}, n = 1, 2, \dots\}$ – возрастающая последовательность множеств такая, что $\Lambda_n \uparrow T$, где T – бесконечное подмножество $\mathbb{Z}^{\nu}$. Пусть $\bar{x}_n \in \tilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$, $n = 1, 2, \dots$ – последовательность граничных условий.

Теорема 2. Для потенциалов Φ из класса $\mathcal{A}$ существуют предельные корреляционные функции

$$\rho_T^{\bar{x}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Lambda_n}^{\bar{x} + \bar{x}_n}(x), \quad x \in L(T) \quad (3.7)$$

с граничным условием $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus T)$, не зависящие от выбора Λ_n and $\bar{x}_n$, $n = 1, 2, \dots$

Для любых $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $\bar{x}_i \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda_i)$, $i = 1, 2$ и $x \in L(\Lambda_1)$ имеем (3.6).

Следствие 1. Если $\Phi \in \mathcal{A}$, то для всяких $T \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $\Lambda_n \in \mathcal{C}(T)$, $n = 1, 2, \dots$, $\Lambda_n \uparrow T$ и граничных условий $\bar{x}_n \in \tilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$, $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus T)$ выполняется неравенство

$$\left| \rho_T^{\bar{x}}(x) - \rho_{\Lambda_n}^{\bar{x} + \bar{x}_n}(x) \right| \leq \left[B_{\Phi} + \gamma_{\Phi}(x) \left(C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(x) \right) \right] \alpha(\delta(s(x), \mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda)), \quad x \in L(T).$$

Если $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ и $\bar{x}_i \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda_i)$, $i = 1, 2$, то

$$\left| \rho_{\Lambda}^{\bar{x}_1}(x) - \rho_{\Lambda}^{\bar{x}_2}(x) \right| \leq B_{\Phi} \cdot \alpha(\delta(s(x), \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)).$$

Следствие 2. В условиях теоремы 2 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(q_{\Lambda_n}^{\bar{x} + \bar{x}_n} \right)_I(x) = (q_T^{\bar{x}})_I(x), \quad x \in L(I) \quad (3.8)$$

для любых $L \in \mathcal{C}(T)$, который не зависит от выбора Λ_n и $\bar{x}_n$, $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Следующая формула выражает плотности $q_{\Lambda}^{\bar{x}}$ через корреляционные функции $\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}$: для всех $\Lambda \in \mathcal{C}$, $I \subset \Lambda$ и $x \in L(I)$

$$(q_{\Lambda}^{\bar{x}})_I(x) = \int_{L(I \setminus s(x))} (-1)^{|y|} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x + y) m_{I \setminus s(x)}(dy). \quad (3.9)$$

Эту формулу можно доказать, подставив (2.2) в правую часть (3.9). Теперь (3.8) следует из (3.7) и (3.9).

Замечание 1. Из вышесказанного следует, что формула (3.9) имеет место при любых $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $I \in \mathcal{C}(\Lambda)$ и $x \in L(I)$.

Определим

$$(q_{\Lambda}^{\bar{x}})_{I|V}(x|y) = \frac{(q_{\Lambda}^{\bar{x}})_{I \cup V}(x + y)}{(q_{\Lambda}^{\bar{x}})_V(y)}$$

для любых $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $I, V \in \mathcal{C}(\Lambda)$, $I \cap V = \emptyset$, $x \in L(I)$, $y \in L(V)$ и $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda)$.

Теорема 3. Пусть $\Phi \in \mathcal{A}$. Тогда при любых $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $I, V \in \mathcal{C}(\Lambda)$, $I \cap V = \emptyset$, $x \in L(I)$, $y \in L(V)$ и $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus T)$ имеет место следующее неравенство :

$$\left| (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_{I/V}(x|y) - (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_I(x) \right| \leq 2^{|I|} B_{\Phi} \alpha(\delta(I, V)). \quad (3.10)$$

Теорема 4. Если $\Phi \in \mathcal{A}$, то для любого подмножества $T \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ и граничного условия $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus T)$ гиббсовское случайное поле $P_{\bar{T}}^{\bar{x}}$ единственно и удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания

$$\varphi_I(d) = 4^{|I|} B_{\Phi} \cdot \alpha(\delta(I, V)).$$

4°. В этом разделе приводятся некоторые необходимые технические результаты. Для $x, y \in L$, $\bar{x} \in \tilde{L}$ и $t \in s(x)$ полагаем

$$W_t^{\bar{x}}(x) = \sum_{I: t \in I \subset s(x)} \sum_{\bar{I} \in \mathcal{C}(s(\bar{x}))} \Phi(x_I + \bar{x}_{\bar{I}}), \quad (4.1)$$

если $s(x) \cap s(y) = \emptyset$, и $W_t^{\bar{x}}(x) = 0$ - в противном случае ;

$$\gamma_t^{\bar{x}}(x) = \frac{z(x) \exp(-W_t^{\bar{x}}(x))}{1 + \int_{X_t} z(u + x') \exp(-W_t^{\bar{x}}(u + x')) \mu_t(du)}, \quad (4.2)$$

где x' - сужение x на $s(x) \setminus \{t\}$;

$$W_t^{\bar{x}}(x; y) = \sum_{I: t \in I \subset s(x)} \sum_{\bar{I} \in \mathcal{C}(s(\bar{x}))} \Phi(x_I + \bar{x}_{\bar{I}} + y), \quad (4.3)$$

если $s(x)$, $s(\bar{x})$ и $s(y)$ попарно не пересекаются, 0 - в противном случае. Мы также полагаем

$$K_t^{\bar{x}}(x; y) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1, \dots, V_n\}}^* \prod_{i=1}^n (\exp(-W_t^{\bar{x}}(x; y_{V_i})) - 1), \quad (4.4)$$

где $\sum^*$ означает суммирование по всем n непустым разным наборам $V_1, \dots, V_n$ таким, что $\bigcup_1^n V_i = s(y)$.

Мы будем пользоваться также следующими величинами. Для $J, V \in \mathcal{C}$, $t \in J$ и $\bar{J} \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ положим

$$\widehat{W}_t^{\bar{J}}(J; V) = \sum_{I: t \in I \subset J} \sum_{\bar{I} \in \mathcal{C}(s(\bar{J}))} \sup_{\substack{x \in X^I, \bar{x} \in X^{\bar{I}} \\ y \in X^V}} |\Phi(x_I + \bar{x}_{\bar{I}} + y)|, \quad (4.5)$$

если $J, \bar{J}$ и V попарно не пересекаются и $\widehat{W}_i^{\bar{J}}(J; V) = 0$ - в противном случае.

Пусть

$$\widehat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1, \dots, V_n\}} \prod_{i=1}^n \left(\exp \left(\widehat{W}_i^{\bar{J}}(J; V_i) \right) - 1 \right). \quad (4.6)$$

Очевидно

$$|W_i^{\bar{x}}(x; y)| \leq \widehat{W}_i^{s(\bar{x})}(s(x); s(y)), \quad |K_i^{\bar{x}}(x; y)| \leq \widehat{K}_i^{s(\bar{x})}(s(x); s(y)).$$

Корреляционные функции $\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}$ удовлетворяют следующим соотношениям (см. [7]):

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x) &= \chi_{\Lambda}(x) \cdot \gamma_i^{\bar{x}}(x) \left\{ \rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x') + (G^{\bar{x}} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}})(x) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{X_1} z(u + x') \exp(-W_i^{\bar{x}}(u + x')) [(G^{\bar{x}} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}})(x) - (G^{\bar{x}} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}})(u + x')] \mu_1(du) \right\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} (G^{\bar{x}} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}})(x) &= \\ &= \int_{L(\Lambda \setminus s(x))} K_i^{\bar{x}}(x; y) \left[\rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(x' + y) - \int_{X_1} \rho_{\Lambda}^{\bar{x}}(u + x' + y) \mu_1(du) \right] m_{\Lambda \setminus s(x)}(dy). \end{aligned}$$

Пространство $\mathcal{E}$ комплекснозначных функций φ , определенных на L и таких, что

$$\|\varphi\| = \sup_{J \in \mathcal{C}} \int_{X_J} |\varphi(x)| \mu^J(dx) < \infty, \quad (4.8)$$

является комплексным банаховым пространством. В $\mathcal{E}$ будем рассматривать также норму

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{J \in \mathcal{C}} \sup_{x \in X^J} |\varphi(x)|. \quad (4.9)$$

Для любого $\bar{x} \in \tilde{L}$ определим операторы $G^{\bar{x}}, F^{\bar{x}}, K^{\bar{x}}$:

$$\begin{aligned} (G^{\bar{x}} \varphi)(x) &= \\ &= \int_{L(\mathbb{Z}^v \setminus s(x))} K_i^{\bar{x}}(x; y) \left[\varphi(x' + y) - \int_{X_1} \varphi(x' + u + y) \mu_1(du) \right] m_{\mathbb{Z}^v \setminus s(x)}(dy), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$(F^{\bar{x}} \varphi)(x) = \int_{X_1} z(u + x') \exp(-W_i^{\bar{x}}(u + x')) [(G^{\bar{x}} \varphi)(x) - (G^{\bar{x}} \varphi)(u + x')] \mu_1(du), \quad (4.11)$$

$$(K^{\bar{x}} \varphi)(x) = \begin{cases} \gamma_i^{\bar{x}}(x) \{ \varphi(x') + (G^{\bar{x}} \varphi)(x) + (F^{\bar{x}} \varphi)(x) \}, & \text{если } |s(x)| > 1, \\ \gamma_i^{\bar{x}}(x) \{ (G^{\bar{x}} \varphi)(x) + (F^{\bar{x}} \varphi)(x) \}, & \text{если } |s(x)| = 1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Ниже показано (см. формулы (4.18), (4.24), (4.15)), что при условии $\|\Phi\| < \infty$ эти три оператора отображают пространство $\mathcal{E}$ в себя.

Очевидно (4.7) можно переписать в операторной форме :

$$\rho_{\Lambda}^{\bar{\epsilon}} = \chi_{\Lambda} \epsilon \gamma^{\bar{\epsilon}} + \chi_{\Lambda} K^{\bar{\epsilon}} \rho_{\Lambda}^{\bar{\epsilon}}, \quad (4.13)$$

где $\epsilon(x) = 0$, если $|s(x)| > 1$ и $\epsilon(x) = 1$, если $|s(x)| = 1$.

Лемма 4.1. Пусть трансляционно-инвариантный потенциал Φ имеет конечную норму : $\|\Phi\| < \infty$. Тогда

$$(a) \quad \sum_{V \subset S(J, d/(n+1))} \hat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n}\right) \leq \frac{1}{2} C_{\Phi} r\left(\frac{d}{n+1}\right),$$

где O — произвольное подмножество $\mathbb{Z}^{\nu}$;

$$(b) \quad \sum_{V \in C: V \not\subset S(J, d/(n+1))} \hat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) \leq \frac{1}{2} C_{\Phi} r\left(\frac{d}{n+1}\right),$$

где $S(J, d) = \{t \in \mathbb{Z}^{\nu} : \delta(J, t) \leq d\}$.

Доказательство. Так как $V \subset S(J, d/(n+1))$, то $\delta(J \cup V, O) \geq \frac{nd}{n+1}$ и следовательно $r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n}\right) \leq r(d/(n+1))$. Теперь, используя оценку (см. [8]) :

$$\sum_{V \in C(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus J)} \hat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) \leq \frac{1}{2} C_{\Phi}, \quad (4.14)$$

получаем (a).

Используя (3.2) и (4.6), находим

$$\begin{aligned} \sum_{V \in C: V \not\subset S(J, d/(n+1))} \hat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left[\sum_{V \in C(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus J)} \left(\exp(\widehat{W}_i^{\bar{J}}(J; V)) - 1 \right) \right]^{n-1} \times \\ &\times \sum_{V \in C: V \not\subset S(J, d/(n+1))} \left(\exp(\widehat{W}_i^{\bar{J}}(J; V)) - 1 \right) \leq \\ &\leq \frac{e^{\|\Phi\|} - 1}{\|\Phi\|} \sum_{n \geq 1} \frac{(e^{\|\Phi\|} - 1)^{n-1}}{n} \sum_{V \in C: V \not\subset S(J, d/(n+1))} \widehat{W}_i^{\bar{J}}(J; V) \leq \frac{1}{2} C_{\Phi} r\left(\frac{d}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Лемма 4.1 доказана.

Пусть

$$M_i^{\bar{J}}(J; V) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1, \dots, V_n\}}^* \sum_{k=1}^n \left(\exp(\Psi_i^{\bar{J}}(J; V_k)) - 1 \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(\exp(\widehat{W}_i^{\bar{J}}(J; V_k)) - 1 \right)$$

при $J, V \in \mathcal{C}$, $J \cap V = \emptyset$, $\bar{J} \subset \mathbb{Z}^{\nu} \setminus (J \cup V)$, $t \in J$ и $M_t^{\bar{J}}(J; V) = 0$ — в противном случае, где

$$\Psi_t^{\bar{J}}(J; V_k) = \sum_{J_1 \in \mathcal{C}(J' \cup \bar{J})} \sup_{x \in X^{J_1 \cup V_k}} \sup_{u, v \in X_1} |\Phi(u+x) - \Phi(v+x)|,$$

$J' = J \setminus \{t\}$, $k = 1, \dots, n$. Положим далее

$$D_{\Phi} = \sum_{J \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus \{0\})} \sup_{x \in X^J} \sup_{u, v \in X_0} |\Phi(u+x) - \Phi(v+x)|.$$

Заметим, что

$$\Psi_t^{\bar{J}}(J, V) \leq D_{\Phi} \quad \text{и} \quad D_{\Phi} \leq 2\beta(X) \|\Phi\|.$$

Лемма 4.2. Пусть Φ — трансляционно-инвариантный потенциал с $\|\Phi\| < \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} (a) \quad & \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus (J \cup \bar{J}))} M_t^{\bar{J}}(J; V) \leq \\ & \leq (e^{D_{\Phi}} - 1) \exp(e^{\|\Phi\|} - 1) \leq \frac{\beta(X)}{2} (C_{\Phi} + 2) (e^{2\|\Phi\|} - 1), \\ (b) \quad & \sum_{V \subset S(J, d/(n+1))} M_t^{\bar{J}}(J; V) r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n}\right) \leq \\ & \leq \frac{\beta(X)}{2} (C_{\Phi} + 2) \cdot (e^{2\|\Phi\|} - 1) r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1}\right), \end{aligned}$$

где $O \subset \mathbb{Z}^{\nu}$, $d > 0$,

$$\begin{aligned} (c) \quad & \sum_{V \in \mathcal{C}: V \not\subset S(J, d/(n+1))} M_t^{\bar{J}}(J; V) \leq \\ & \leq \frac{\beta(X)}{2} (C_{\Phi} + 2) \cdot (e^{2\|\Phi\|} - 1) r\left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1}\right), \end{aligned}$$

$$(g) \quad |W_t^{\bar{J}}(u+x'; y) - W_t^{\bar{J}}(v+x'; y)| \leq \Psi_t^{\bar{J}}(s(x); s(y)), \quad u, v \in X_1.$$

Доказательство. Утверждения (а) — (в) можно доказать аналогично предыдущей лемме 4.1, используя формулу

$$\begin{aligned} & \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus J)} \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1, \dots, V_n\}}^* \sum_{k=1}^n g(V_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f(V_i) \leq \\ & \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus J)} g(V) \left(\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus J)} f(V) \right)^{n-1}, \end{aligned}$$

где g и f — неотрицательные функции на пространстве $\mathcal{C}(\mathbb{Z}^{\nu})$. Утверждение (г) очевидно.

Лемма 4.3. Пусть Φ — трансляционно-инвариантный потенциал с $\|\Phi\| < \infty$. Тогда для любого $\bar{x} \in \tilde{L}$

$$\|\mathcal{K}^{\bar{x}}\| \leq \gamma_{\Phi}(z) \left(1 + C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z)\right). \quad (4.15)$$

Доказательство. Сначала заметим, что если X — синглетон, т. е. $X = \{*\}$, то оценка (4.15) совпадает с хорошо известной оценкой из [8]. Согласно (4.2) и (4.12)

$$\|\mathcal{K}^{\bar{x}}\| \leq \gamma_{\Phi}(z) \left(1 + \|G^{\bar{x}}\| + \|F^{\bar{x}}\|\right). \quad (4.16)$$

Оценим $G^{\bar{x}}$. Для любого $\varphi \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} & |(G^{\bar{x}}\varphi)(x)| \leq \\ & \leq \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^V \setminus J)} \hat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) \int_{X^V} \left[|\varphi(x' + y)| + \int_{X_1} |\varphi(u + x' + y)| \mu_1(du) \right] \mu^V(dy), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $J = s(x)$, $\bar{J} = s(\bar{x})$. Отсюда и из (4.14) получаем оценки

$$\|G^{\bar{x}}\varphi\| \leq C_{\Phi} \|\varphi\| \quad \text{и} \quad \|G^{\bar{x}}\varphi\|_1 \leq C_{\Phi} \|\varphi\|_1. \quad (4.18)$$

Теперь оценим $F^{\bar{x}}$. Имеем

$$\begin{aligned} & |(F^{\bar{x}}\varphi)(x)| \leq z e^{\|\Phi\|} \int_{X_1} |(G^{\bar{x}}\varphi)(x) - (G^{\bar{x}}\varphi)(v + x')| \mu_1(dv) \leq \\ & \leq z e^{\|\Phi\|} \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^V \setminus J)} \int_{X_1} \sup_{y \in X^V} |K_i^{\bar{x}}(x; y) - K_i^{\bar{x}}(v + x'; y)| \cdot \int_{X^V} [|\varphi(x' + y)| + \\ & + \int_{X_1} |\varphi(w + x' + y)| \mu_1(dw)] \mu^V(dy) \mu_1(dv), \end{aligned} \quad (4.19)$$

Осталось оценить величину $\sup_{y \in X^V} |K_i^{\bar{x}}(x; y) - K_i^{\bar{x}}(v + x'; y)|$ для любого $v \in X$.

Из (4.3) — (4.6) имеем

$$\begin{aligned} & |K_i^{\bar{x}}(x; y) - K_i^{\bar{x}}(v + x'; y)| \leq \\ & \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1, \dots, V_n\}}^* \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(e^{\hat{W}_i^{\bar{J}}(J; V_i)} - 1 \right) \cdot \left| e^{-W_i^{\bar{x}}(x; y_{V_k})} - e^{-W_i^{\bar{x}}(v + x'; y_{V_k})} \right|. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \prod_{i=1}^{k-1} a_i \prod_{i=k+1}^n b_i.$$

Учитывая утверждение (г) леммы 4.2, получим

$$|\exp(-W_i^{\bar{x}}(x; y)) - \exp(-W_i^{\bar{x}}(v + x'; y))| \leq e^{\|\Phi\|} \left(\exp(\Psi_i^{\bar{J}}(J; V)) - 1 \right). \quad (4.21)$$

Подставляя (4.20) в (4.19), получим

$$\sup_{y \in X^V} |K_i^{\bar{x}}(x; y) - K_i^{\bar{x}}(v + x'; y)| \leq M_i^{\bar{J}}(J; V) e^{\|\Phi\|}. \quad (4.22)$$

Из (4.19) — (4.22) находим

$$\begin{aligned} |(F^{\bar{x}}\varphi)(x)| &\leq ze^{2\|\Phi\|} \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^V \setminus J)} M_i^{\bar{J}}(J; V) \times \\ &\times \int_{X^V} \left[|\varphi(x' + y)| + \int_{X_i} |\varphi(w + x' + y)| \mu_i(dw) \right] \mu^V(dy). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Согласно утверждению (а) леммы 4.2 это означает, что

$$\|F^{\bar{x}}\varphi\| \leq \tilde{C}_{\Phi}(z) \|\varphi\| \quad \text{и} \quad \|F^{\bar{x}}\varphi\|_1 \leq \tilde{C}_{\Phi}(z) \|\varphi\|_1. \quad (4.24)$$

Теперь оценка (4.15) является следствием (4.16), (4.18) и (4.24). Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. Пусть Φ — трансляционно-инвариантный потенциал с $\|\Phi\| < \infty$. Пусть $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{Z}^V$ и $\varphi \in \mathcal{E}$ с $\|\varphi\|_1 < 1$. Тогда для любых $\bar{x}_2 \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^V \setminus \Lambda_2)$ и $x \in L$

$$|(\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \varphi)(x)| \leq \gamma_{\Phi}(z) \left(C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z) \right) r(\delta(J, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)),$$

где $J = s(x)$.

Доказательство. Так как $(\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \varphi)(x) = 0$ при $x \notin L(\Lambda_1)$, то

$$\begin{aligned} &|(\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \varphi)(x)| \leq \\ &\leq \gamma_{\Phi}(z) \{ |(G^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \varphi)(x)| + |(F^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \varphi)(x)| \}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Для оценки величины $|(G^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \varphi)(x)|$ используем (4.3) и утверждение (в) леммы 4.2. Имеем

$$|(G^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \varphi)(x)| \leq 2 \sum_{\substack{V \subset \Lambda_2 \setminus J \\ V \cap (\Lambda_2 \setminus \Lambda_1) \neq \emptyset}} \hat{K}_i^{\bar{J}_2}(J; V) \leq C_{\Phi} r(\delta(J, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)), \quad (4.26)$$

где $\bar{J}_2 = s(\bar{x}_2)$.

Теперь оценим $|(F^{\bar{x}_2}(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2})\varphi)(x)|$. Заметим, что интеграл

$$\int_{X^V} |((\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2})\varphi)(x+y)| \mu^V(dy)$$

равен 0, если $V \cap (\Lambda_2 \setminus \Lambda_1) = \emptyset$ и ограничен сверху величиной $\|\varphi\|_1$. Согласно утверждению (в) леммы 4.2

$$\begin{aligned} |(F^{\bar{x}_2}(\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2})\varphi)(x)| &\leq 2ze^{2\|\Phi\|} \sum_{V \subset \Lambda_2 \setminus J: V \cap (\Lambda_2 \setminus \Lambda_1) \neq \emptyset} M_i^{\bar{J}_2}(J; V) \leq \\ &\leq \tilde{C}_\Phi(z) r(\delta(J, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Теперь утверждение леммы 4.4 следует из (4.25) — (4.27).

Лемма 4.5. Пусть $\varphi \in \mathcal{E}$, $\|\varphi\|_1 \leq 1$ и $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \tilde{L}$. Тогда

$$|(\chi_{\Lambda_1}(\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2})\varphi)(x)| \leq \bar{B}_\Phi r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)), \quad x \in L,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{B}_\Phi &= \gamma_\Phi(z) e^{\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) \times \\ &\times \left\{ \frac{(1 + 2ze^{\|\Phi\|}) (1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z))}{\hat{x} + e^{\|\Phi\|}} + (C_\Phi + 2) (1 + 2ze^{\|\Phi\|}) + 2zC_\Phi \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &|(\chi_{\Lambda_1}(\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2})\varphi)(x)| \leq \\ &\leq |\gamma_i^{\bar{x}_1}(x) - \gamma_i^{\bar{x}_2}(x)| [|\varphi(x')| + |(G^{\bar{x}_1}\varphi)(x)| + |(F^{\bar{x}_1}\varphi)(x)|] + \\ &+ \gamma_\Phi(z) [|(G^{\bar{x}_1} - G^{\bar{x}_2})\varphi)(x)| + |(F^{\bar{x}_1} - F^{\bar{x}_2})\varphi)(x)|]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Затем

$$\begin{aligned}
 |\gamma_i^{\bar{x}_1}(x) - \gamma_i^{\bar{x}_2}(x)| &= \frac{z(x) \left(\exp(-W_i^{\bar{x}_1}(x)) - \exp(-W_i^{\bar{x}_2}(x)) \right)}{1 + \int_{X_i} z(u+x') \exp(-W_i^{\bar{x}_1}(u+x')) \mu_i(du)} + \\
 &+ \frac{z(x) \exp(-W_i^{\bar{x}_2}(x))}{\left(1 + \int_{X_i} z(u+x') \exp(-W_i^{\bar{x}_1}(u+x')) \mu_i(du) \right)^x} \times \\
 &\times \frac{\int_{X_i} z(u+x') \left[\exp(-W_i^{\bar{x}_2}(u+x')) - \exp(-W_i^{\bar{x}_1}(u+x')) \right] \mu_i(du)}{\left(1 + \int_{X_i} z(u+x') \exp(-W_i^{\bar{x}_2}(u+x')) \mu_i(du) \right)} \leq \quad (4.29) \\
 &\leq \frac{ze^{\|\Phi\|}}{1 + \hat{z}e^{-\|\Phi\|}} \left\{ \exp\left(\left|W_i^{\bar{x}_1}(x) - W_i^{\bar{x}_2}(x)\right|\right) - 1 + \right. \\
 &+ \left. \frac{\int_{X_i} z(y) \exp(-W_i^{\bar{x}_1}(y)) \left(\exp\left(\left|W_i^{\bar{x}_1}(y) - W_i^{\bar{x}_2}(y)\right|\right) - 1 \right) \mu_i(du)}{1 + \int_{X_i} z(y) \exp(-W_i^{\bar{x}_2}(y)) \mu_i(du)} \right\},
 \end{aligned}$$

где $y = u + x'$, а $\hat{z}$ определено в теореме 1.

Заметим, что для $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

$$\begin{aligned}
 &\left| W_i^{\bar{x}_1}(x) - W_i^{\bar{x}_2}(x) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{I: i \in I \subset J} \left| \sum_{\bar{I}_1 \in C(\bar{J}_1)} \Phi(x_I + (\bar{x}_1)_{\bar{I}_1}) - \sum_{\bar{I}_2 \in C(\bar{J}_2)} \Phi(x_I + (\bar{x}_2)_{\bar{I}_2}) \right| = \\
 &= \sum_{I: i \in I \subset J} \left| \sum_{\substack{\bar{I}_1 \in C(\bar{J}_1), \\ \bar{I}_1 \cap (\bar{J}_1 \setminus B) \neq \emptyset}} \Phi(x_I + (\bar{x}_1)_{\bar{I}_1}) - \sum_{\substack{\bar{I}_2 \in C(\bar{J}_2), \\ \bar{I}_2 \cap (\bar{J}_2 \setminus B) \neq \emptyset}} \Phi(x_I + (\bar{x}_2)_{\bar{I}_2}) \right| \leq \\
 &\leq 2 \sum_{I: i \in I \subset J} \sum_{\substack{\bar{I} \in C(\bar{J}_1 \cup \bar{J}_2), \\ \bar{I} \cap (\bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2) \neq \emptyset}} \sup_{s \in X^I} \sup_{\bar{x} \in X^{\bar{I}}} |\Phi(x + \bar{x})| \leq 2 \|\Phi\| r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)).
 \end{aligned}$$

Поэтому для любых $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \tilde{L}$

$$\exp\left(\left|W_i^{\bar{x}_1}(x) - W_i^{\bar{x}_2}(x)\right|\right) - 1 \leq (e^{2\|\Phi\|} - 1) r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)). \quad (4.30)$$

Подставляя (4.30) в (4.29), получаем

$$\begin{aligned}
 |\gamma_i^{\bar{x}_1}(x) - \gamma_i^{\bar{x}_2}(x)| &\leq \frac{ze^{\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1)}{1 + \hat{z}e^{-\|\Phi\|}} \left(1 + \frac{ze^{\|\Phi\|}}{1 + ze^{\|\Phi\|}} \right) r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)) = \\
 &= B_{\Phi}^{(1)} \cdot r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)), \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

где

$$B_{\Phi}^{(1)} = \frac{ze^{2\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) (1 + 2ze^{\|\Phi\|})}{(\bar{z} + e^{\|\Phi\|}) (1 + ze^{\|\Phi\|})}. \quad (4.32)$$

Для $J, V \in \mathcal{C}$, $J \cap V = \emptyset$ положим

$$N_i(J; V) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\{V_1, \dots, V_n\}}^* \sum_{k=1}^n (\exp(2\varphi_i(J; V_k)) - 1) \times \\ \times \prod_{i=1}^{k-1} \left(e^{\widehat{W}_i^{J_1}(J; V_i)} - 1 \right) \prod_{i=k+1}^n \left(e^{\widehat{W}_i^{J_2}(J; V_i)} - 1 \right), \quad (4.33)$$

где

$$\varphi_i(J; V) = \sum_{I: i \in I \subset J} \sum_{\substack{\bar{I} \in \mathcal{C}(\bar{J}_1 \cup \bar{J}_2), \\ I \cap (\bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2) \neq \emptyset}} \sup_{x \in X^{I \cup V \cup \bar{I}}} \|\Phi(x)\|,$$

если множества J, V и $\bar{J}_1 \cup \bar{J}_2$ попарно не пересекаются и $\varphi_i(J; V) = 0$ - в противном случае.

Как и при выводе (4.19) можно показать, что

$$|((G^{\bar{x}_1} - G^{\bar{x}_2}) \varphi)(x)| \leq \sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^v \setminus \{x\})} \sup_{y \in X^V} |K_i^{\bar{x}_1}(x; y) - K_i^{\bar{x}_2}(x; y)| \times \\ \times \int_{X^V} [|\varphi(x' + y)| + \int_{X_1} |\varphi(w + x' + y)| \mu_1(dw)] \mu^V(dy). \quad (4.34)$$

Поскольку

$$\left| \exp(-W_i^{\bar{x}_1}(x; y)) - \exp(-W_i^{\bar{x}_2}(x; y)) \right| \leq e^{\|\Phi\|} (e^{2\varphi_i(s(x); s(y))} - 1),$$

то сравнивая с (4.22) и полагая $J = s(x)$, получим

$$\sup_{y \in X^V} |K_i^{\bar{x}_1}(x; y) - K_i^{\bar{x}_2}(x; y)| \leq e^{\|\Phi\|} N_i(J; V). \quad (4.35)$$

Поскольку

$$\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^v \setminus J)} \varphi_i(J; V) \leq \|\Phi\| r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)),$$

то с помощью пункта (а) Леммы 4.2 получим

$$\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^v \setminus J)} N_i(J; V) \leq \exp(e^{\|\Phi\|} - 1) [\exp(2\|\Phi\| r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2))) - 1]. \quad (4.36)$$

Из (4.35) и (4.36) следует, что

$$\sum_{V \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^v \setminus J)} \sup_{y \in X^V} |K_i^{\bar{x}_1}(x; y) - K_i^{\bar{x}_2}(x; y)| \leq$$

$$\leq e^{\|\Phi\|} \exp(e^{\|\Phi\|} - 1) (e^{2\|\Phi\|} - 1) r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)).$$

Поэтому из (4.34) имеем

$$|((G^{\bar{x}_1} - G^{\bar{x}_2}) \varphi)(x)| \leq B_{\Phi}^{(2)} r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)), \quad (4.37)$$

где

$$B_{\Phi}^{(2)} = e^{\|\Phi\|} (C_{\Phi} + 2) (e^{2\|\Phi\|} - 1).$$

Теперь оценим $|((F^{\bar{x}_1} - F^{\bar{x}_2}) \varphi)(x)|$. Согласно (4.11), (4.18), (4.30) и (4.37) имеем

$$\begin{aligned} & |((F^{\bar{x}_1} - F^{\bar{x}_2}) \varphi)(x)| \leq \\ & \leq z \int_{X_1} \left| \exp(-W_i^{\bar{x}_1}(u + x')) - \exp(-W_i^{\bar{x}_2}(u + x')) \right| \mu_1(du) |(G^{\bar{x}_1} \varphi)(x)| + \\ & + z e^{\|\Phi\|} \int_{X_1} |((G^{\bar{x}_1} - G^{\bar{x}_2}) \varphi)(u + x')| \mu_1(du) + z e^{\|\Phi\|} |((G^{\bar{x}_1} - G^{\bar{x}_2}) \varphi)(x)| + \\ & + z \int_{X_1} \left| \exp(-W_i^{\bar{x}_1}(u + x')) - \exp(-W_i^{\bar{x}_2}(u + x')) \right| |(G^{\bar{x}_2} \varphi)(u + x')| \mu_1(du) \leq \\ & \leq 2z C_{\Phi} e^{\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)) + \\ & + 2z e^{2\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) (C_{\Phi} + 2) r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)) = B_{\Phi}^{(3)} \cdot r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)), \quad (4.38) \end{aligned}$$

где

$$B_{\Phi}^{(3)} = 2z e^{\|\Phi\|} (e^{2\|\Phi\|} - 1) [C_{\Phi} + e^{\|\Phi\|} (C_{\Phi} + 2)].$$

Комбинируя (4.18), (4.24), (4.28), (4.32), (4.37) и (4.38), получим

$$|(\chi_{\Lambda_1} (\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2}) \varphi)(x)| \leq \bar{B}_{\Phi} r(\delta(J, \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)),$$

где

$$\bar{B}_{\Phi} = B_{\Phi}^{(1)} (1 + C_{\Phi} + \tilde{C}_{\Phi}(z)) + \gamma_{\Phi}(z) (B_{\Phi}^{(2)} + B_{\Phi}^{(3)}).$$

Лемма 4.5 доказана.

5°. Этот параграф содержит доказательства теорем 1 — 4.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\Delta_1(x) = \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_1}(x) - \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_2}(x), \quad \Delta_2(x) = \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_2}(x) - \chi_{\Lambda_1}(x) \rho_{\Lambda_2}^{\bar{x}_2}(x). \quad (5.1)$$

Тогда

$$\rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_1}(x) - \chi_{\Lambda_1}(x) \rho_{\Lambda_2}^{\bar{x}_2}(x) = \Delta_1(x) + \Delta_2(x). \quad (5.2)$$

Рассмотрим первую величину Δ_1 . Согласно (4.13) имеем

$$\Delta_1 = \chi_{\Lambda_1} \varepsilon \left(\gamma_i^{\bar{x}_1} - \gamma_i^{\bar{x}_2} \right) + \chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_1} \Delta_1 + \chi_{\Lambda_1} (\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2}) \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_2}.$$

Отсюда следует, что Δ_1 удовлетворяет соотношению

$$\Delta_1 = \chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_1} \Delta_1 + g, \quad (5.3)$$

где

$$g(x) = (\chi_{\Lambda_1} \varepsilon)(x) \left(\gamma_i^{\bar{x}_1} - \gamma_i^{\bar{x}_2} \right)(x) + \left[\chi_{\Lambda_1} (\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2}) \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_2} \right](x). \quad (5.4)$$

В условиях теоремы 1 $\|\mathcal{K}^{\bar{x}_1}\| < 1$ и мы можем переписать (5.3) в виде

$$\Delta_1 = \sum_{n \geq 0} (\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_1})^n g. \quad (5.5)$$

Теперь рассмотрим Δ_2 . Снова используя (4.13), получим

$$\Delta_2 = \chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} \Delta_2 + \chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \rho_{\Lambda_2}^{\bar{x}_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_2 = \sum_{n \geq 1} (\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2})^n \chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \rho_{\Lambda_2}^{\bar{x}_2}. \quad (5.6)$$

Для оценки величин Δ_1 и Δ_2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1. Пусть $\Phi \in \mathcal{A}$, и пусть $f \in \mathcal{E}$ удовлетворяет оценке

$$|f(x)| \leq A_\Phi r(\delta(s(x), O)), \quad (5.7)$$

где O — подмножество $\mathbb{Z}^\nu$, а $A_\Phi > 0$ — постоянная, зависящая от потенциала Φ .

Тогда для любых $\Lambda \in \mathcal{C}$, $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda)$, $x \in L(\Lambda)$ и неотрицательного целого n

$$\left| \left((\chi_\Lambda \mathcal{K}^{\bar{x}})^n f \right)(x) \right| \leq (n+1) A_\Phi \left[\gamma_\Phi(x) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(x) \right) \right]^n r \left(\frac{\delta(s(x), O)}{n+1} \right). \quad (5.8)$$

Доказательство по индукции. При $n = 0$ оценка (4.9) совпадает с (4.8).

Предположим, что (4.9) верна для некоторого натурального n . Тогда, полагая $f_n = (\chi_\Lambda \mathcal{K}^{\bar{x}})^n f$, будем иметь

$$|f_{n+1}(x)| \leq \gamma_\Phi(x) \{ |f_n(x')| + |(G^{\bar{x}} f_n)(x)| + |(F^{\bar{x}} f_n)(x)| \}. \quad (5.9)$$

Поскольку согласно (4.8) $\|f\|_1 \leq A_\Phi$, то из леммы 4.3 следует, что

$$\|f_n\|_1 \leq A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n. \quad (5.10)$$

Пусть $d_0 = \delta(J, O)$, где $J = s(x)$. Используя (4.17), (5.8), (5.10) и пункт (б) леммы 4.1, находим

$$\begin{aligned} |(G^\Phi f_n)(x)| &\leq 2A_\Phi(n+1) \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n \times \\ &\times \sum_{V: V \subset S(J, d_0/(n+2))} \hat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) r \left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1} \right) + \\ &+ 2A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n \sum_{V \in C: V \not\subset S(J, d_0/(n+2))} \hat{K}_i^{\bar{J}}(J; V) \leq \\ &\leq A_\Phi \cdot C_\Phi(n+2) \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n r \left(\frac{d_0}{n+2} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Аналогично из (4.23), (5.8) и (5.10) имеем

$$\begin{aligned} |(F^\Phi f_n)(x)| &\leq 2ze^{2\|\Phi\|}(n+1) A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n \times \\ &\times \sum_{V: V \subset S(J, d_0/(n+2))} M_i^{\bar{J}}(J; V) r \left(\frac{\delta(J \cup V, O)}{n+1} \right) + \\ &+ 2ze^{2\|\Phi\|} A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n \sum_{V \in C: V \not\subset S(J, d_0/(n+2))} M_i^{\bar{J}}(J; V). \end{aligned}$$

Согласно пунктам (б) и (в) леммы 4.2 отсюда получаем

$$\begin{aligned} |(F^\Phi f_n)(x)| &\leq \beta(X)ze^{2\|\Phi\|} A_\Phi (C_\Phi + 2)(n+2) \left(e^{2\|\Phi\|} - 1 \right) \times \\ &\times \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n r \left(\frac{d_0}{n+2} \right) = \\ &= (n+2)\tilde{C}_\Phi(z) A_\Phi \cdot \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n r \left(\frac{d_0}{n+2} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Теперь, комбинируя (5.9), (5.11) и (5.12), получаем

$$|f_{n+1}(x)| \leq (n+2)A_\Phi \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^{n+1} r \left(\frac{d_0}{n+2} \right).$$

Лемма 5.1 доказана.

Оценим Δ_2 . Применяя лемму 4.4, получим

$$\left| (\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \rho_{\Lambda_2}^{\bar{x}_2})(x) \right| \leq \gamma_\Phi(z) \left(C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) r(\delta(J, \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)).$$

Согласно лемме 5.1 отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\left| ((\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2})^n \chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_2} (\chi_{\Lambda_1} - \chi_{\Lambda_2}) \rho_{\Lambda_2}^{\bar{x}_2})(x) \right| \leq \\ &\leq (n+1) \gamma_\Phi(z) \left(C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \left[\gamma_\Phi(z) \left(1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z) \right) \right]^n r \left(\frac{\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Поэтому из (5.6)

$$|\Delta_2(x)| \leq \gamma_\Phi(z) (C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z)) \sum_{n \geq 1} (n+1) \left[\gamma_\Phi(z) (1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z)) \right]^n \times \\ \times r \left(\frac{\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)}{n+1} \right) = \gamma_\Phi(z) (C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z)) \alpha(\delta(s(x), \Lambda_2 \setminus \Lambda_1)), \quad (5.13)$$

где величина α определена в (3.1).

Теперь рассмотрим Δ_1 . Из леммы 4.5

$$\left| \left(\chi_{\Lambda_1} (\mathcal{K}^{\bar{x}_1} - \mathcal{K}^{\bar{x}_2}) \rho_{\Lambda_1}^{\bar{x}_2} \right) (x) \right| \leq \bar{B}_\Phi r(\delta(s(x), \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)).$$

Отсюда, в силу (5.4) и (4.31), получаем

$$|g(x)| \leq (B_\Phi^{(1)} + \bar{B}_\Phi) r(\delta(s(x), \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)).$$

Применение леммы 5.1 дает

$$\left| \left((\chi_{\Lambda_1} \mathcal{K}^{\bar{x}_1})^n g \right) (x) \right| \leq \\ \leq (B_\Phi^{(1)} + \bar{B}_\Phi) (n+1) \left[\gamma_\Phi(z) (1 + C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z)) \right]^n r \left(\frac{\delta(s(x), \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)}{n+1} \right).$$

Следовательно

$$|\Delta_1| \leq B_\Phi \cdot \alpha(\delta(s(x), \bar{x}_1 \Delta \bar{x}_2)), \quad (5.14)$$

где

$$B_\Phi = B_\Phi^{(1)} + \bar{B}_\Phi.$$

Остается применить (5.2), (5.13) и (5.14). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{\Lambda_n \in \mathcal{C}, n = 1, 2, \dots\}$ – возрастающая последовательность конечных множеств, $\Lambda_n \uparrow T$, где T – бесконечное подмножество $\mathbb{Z}^\nu$. Пусть $\bar{x}_n \in \tilde{L}(T \setminus \Lambda_n)$, $n = 1, 2, \dots$ и $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^\nu \setminus T)$ – произвольные граничные условия. Тогда из теоремы 1 следует, что

$$\left| \rho_{\Lambda_n}^{\bar{x} + \bar{x}_n}(x) - \chi_{\Lambda_n}(x) \rho_{\Lambda_{n+k}}^{\bar{x} + \bar{x}_n + \bar{x}_k}(x) \right| \leq B_\Phi \alpha(\delta(s(x), \bar{x}_n \Delta \bar{x}_{n+k})) + \\ + \gamma_\Phi(z) (C_\Phi + \tilde{C}_\Phi(z)) \alpha(\delta(s(x), \Lambda_{n+k} \setminus \Lambda_n)). \quad (5.15)$$

Ясно, что для всех n и k достаточно больших, правая часть (5.15) сколь угодно мала, откуда следует существование предела (3.6) и его независимость от выбора Λ_n и $\bar{x}_n$. Неравенство (3.7) следует из теоремы 1 и (3.6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, для $f \in \mathcal{E}$, $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{C}$ $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$,

$$\int_{L(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)} f(x) m_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}(dx) = \int_{L(\Lambda_1)} \int_{L(\Lambda_2)} f(x_1 + x_2) m_{\Lambda_1}(dx_1) m_{\Lambda_2}(dx_2). \quad (5.16)$$

Напомним фундаментальное свойство гиббсовских плотностей $q_{\Lambda}^{\bar{x}}$:

$$(q_{\Lambda}^{\bar{x}})_{I/V}(x/y) = (q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+y})_I(x), \quad x \in L(I), \quad y \in L(V), \quad (5.17)$$

которое выполняется при $\Lambda \in \mathcal{C}$, $I, V \subset \Lambda$, $I \cap V = \emptyset$ и $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus \Lambda)$. Согласно следствию 2, (5.17) выполняется для любого $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{\nu}$.

Используя (5.16) и (5.17) для $\Lambda \in \mathcal{C}$ находим

$$\begin{aligned} (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_I(x) &= \int_{L(\Lambda \setminus I)} q_{\Lambda}^{\bar{x}}(x+y) m_{\Lambda \setminus I}(dy) = \\ &= \int_{L(\Lambda \setminus (I \cup V))} \int_{L(V)} q_{\Lambda}^{\bar{x}}(x+y+z) m_{\Lambda \setminus (I \cup V)}(dy) m_V(dz) = \\ &= \int_{L(\Lambda \setminus (I \cup V))} \int_{L(V)} q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+z}(x+y) (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_V(z) m_{\Lambda \setminus (I \cup V)}(dy) m_V(dz) = \\ &= \int_{L(V)} (q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+z})_I(x) (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_V(z) m_{\Lambda \setminus (I \cup V)}(dy) m_V(dz). \end{aligned} \quad (5.18)$$

С другой стороны, из (5.17) имеем

$$(q_{\Lambda}^{\bar{x}})_{I/V}(x/y) = \int_{L(V)} (q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+y})_I(x) (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_V(z) m_V(dz).$$

Следовательно, для $\Lambda \in \mathcal{C}$

$$\left| (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_{I/V}(x/y) - (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_I(x) \right| \leq \int_{L(V)} (q_{\Lambda}^{\bar{x}})_V(z) \left| (q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+z})_I(x) - (q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+y})_I(x) \right| m_V(dz). \quad (5.19)$$

Теперь, применяя теорему 1 и формулу (3.9), получим

$$\begin{aligned} &\left| (q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+z})_I(x) - (q_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+y})_I(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{L(I \setminus \{x\})} \left| \rho_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+z}(x+u) - \rho_{\Lambda \setminus V}^{\bar{x}+y}(x+u) \right| m_{I \setminus \{x\}}(du) \leq 2^{|I|} B_{\Phi} \alpha(\delta(I, V)). \end{aligned}$$

В силу (5.19) отсюда следует (3.10) для случая конечного Λ . Для доказательства (3.10) с бесконечным Λ достаточно применить (3.8). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 Для любого подмножества $T \subset \mathbb{Z}^{\nu}$ и граничного условия $\bar{x} \in \tilde{L}(\mathbb{Z}^{\nu} \setminus T)$

$$\begin{aligned} &\left| (P_T^{\bar{x}})_{I/V}(A/B) - (P_T^{\bar{x}})_I(A) \right| \leq \left(\int_B (q_T^{\bar{x}})_V(y) m_V(dy) \right)^{-1} \times \\ &\times \int_A \int_B \left| (q_T^{\bar{x}})_{I/V}(x/y) - (q_T^{\bar{x}})_I(x) \right| (q_T^{\bar{x}})_V(y) m_V(dy) m_I(dx). \end{aligned}$$

Это неравенство выполняется для любых $I, V \in \mathcal{C}(T)$, $I \cap V = \emptyset$ и $A \in \mathcal{B}(I)$, $B \in \mathcal{B}(V)$. Поэтому из теоремы 3 находим

$$\left| (P_T^\pi)_{I/V}(A/B) - (P_T^\pi)_I(A) \right| \leq 4^{|I|} B_* \alpha(\delta(I, V)).$$

Теорема 4 доказана.

ABSTRACT. In the present paper we consider lattice spin systems with general vacuum potential and standard spin space. These systems naturally generalize the so-called configurational systems, which correspond to the special case, where the spin space is a singleton. We show that under certain conditions on the potential, Gibbs distributions in large volumes satisfy uniformly strong mixing condition. It turns out that the finite-volume Gibbs distributions and the corresponding limiting fields have essentially different expressions for the bound of the mixing coefficient. In the former case it is a sum of two terms: one term is responsible for the rate of decay of correlations and the other for the rate of convergence to the limiting Gibbs field as the volume increases.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. A. Ibragimov, V. V. Linnik, Independent and Stationary Sequences of Random Variables, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.
2. А. В. Булинский, Предельные Теоремы для Случайных Процессов и Полей, Мос. Унив., 1981.
3. B. S. Nahapetian, Limit Theorems and Some Applications in Statistical Physics, Teubner-Texte zur Mathematik, Stuttgart-Leipzig, 1991.
4. R. L. Dobrushin, "The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity", Theory Prob. Appl., vol. 13, pp. 197 — 224, 1968.
5. R. L. Dobrushin, "Gibbs random fields for lattice systems with pair-wise interactions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 292 — 301, 1968.
6. R. L. Dobrushin, "The problem of uniqueness of a Gibbsian random field and the problem of phase transitions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 302 — 312, 1968.
7. Б. С. Нахпетян, "Условие сильного перемешивания для гиббсовских случайных полей с дискретным параметром и некоторые применения", Изв. АН АрмССР, т. 10, № 2, стр. 242 — 254, 1975.
8. D. Ruelle, Statistical Mechanics. Rigorous Results, Benjamin, New York, 1969.
9. K. R. Parthasarathy, Introduction to Probability and Measure, New Delhi, 1980.

12 августа 1995

Институт математики
НАН Армении