О ЗАКОНАХ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОБРАТНЫХ МАРТИНГАЛОВ, ИНДЕКСИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАМИ

А. Н. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 6, 1995

В статье мы описываем класс случайных полей, для которых нормированные суммы компонент образуют обратные мартингалы, ассоциированные с последовательностями возрастающих конечных множеств. При дополнительных ограничениях мы устанавливаем предельное поведение этих нормированных сумм, Результаты применяются к гиббсовским случайным полям.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Й. С. Чоу установил усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) для одномерных мартингал–разностей с конечным моментом порядка $2r$ ($r \geq 1$). Этот результат явился обобщением УЗБЧ, который получили К. Л. Чанг и Ю. В. Прохоров (см. [3] и [11]) для последовательностей независимых случайных величин. Настоящая работа описывает класс случайных полей, для которых нормированные суммы компонент образуют обратные мартингалы, ассоциированные с последовательностями конечных множеств. Изучается предельное поведение этих нормированных сумм, в частности, мы доказываем УЗБЧ. Результаты применяются к гиббсовским случайным полям.

§1. УСЛОВНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Пусть $\mathbb{Z}^d$ – d-мерная ($d \geq 1$) целочисленная решетка и $\mathbf{W}$ – семейство всех ее конечных подмножеств :

$$\mathbf{W} = \{V : \ V \subset \mathbb{Z}^d, \ |V| < \infty\}$$

(здесь и далее $|\cdot|$ означает число точек множества). Пусть $\{V_n\}_{n \geq 0}$ – последовательность возрастающих конечных подмножеств (п.в.к.п.) $\mathbb{Z}^d$: $V_n \in \mathbf{W}$, $V_n \subset V_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Определение 1. Случайный процесс Y_V, $V \in \mathbf{W}$ назовем ***обратным мартингалом***, ассоциированным с п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любого $n = 0, 1, \ldots$

$$\mathbf{E}(Y_{V_n} \;/\; Y_{V_{n+1}}, Y_{V_{n+2}}, \ldots) = Y_{V_{n+1}}, \quad \text{п.н.} \tag{1.1}$$

Приведем примеры обратных мартингалов.

Пример 1. Пусть η – случайная величина с $\mathbf{E}\,|\eta| < \infty$ и пусть $\mathcal{F}_V$, $V \in \mathbf{W}$ – семейство σ-алгебр такое, что $\mathcal{F}_V \supset \mathcal{F}_{\widetilde{V}}$ при $V \subset \widetilde{V}$, $V, \widetilde{V} \in \mathbf{W}$. Случайный процесс $Y_V = \mathbf{E}(\eta \;/\; \mathcal{F}_V)$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$. В частности, можно взять $\mathcal{F}_V = \sigma(\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}^d \setminus V)$, $V \in \mathbf{W}$, где ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$, – некоторое случайное поле.

Пример 2. Пусть $\{V_n\}_{n\geq 0}$ – п.в.к.п. и $\Delta_j = V_j \setminus V_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$. Предположим, что в случайном поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}\xi_t = 0$, $t \in \mathbb{Z}^d$ случайные величины ξ_t, ξ_s независимы при $t \in \Delta_j$, $s \in \Delta_k$, $j \neq k$. Тогда случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$.

Пример 3. Пусть случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}\,|\xi_t| < \infty$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}(\xi_s \;/\; \xi_t,\ t \in \mathbb{Z}^d \setminus \{s\}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

Тогда случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п.

Пример 4. Пусть $\mathbb{Z}^d = \cup_j T_j$, $T_j \cap T_k = \emptyset$, $j \neq k$, и пусть $\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d$ – случайное поле, для которого $Y_V = \sum\limits_{t \in T_j \setminus V} \xi_t$, $V \subset T_j$ – обратный мартингал относительно любой п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, $V_n \subset T_j$, $n = 1, 2, \ldots$ для любого фиксированного $j = 1, 2, \ldots$. Если Y_V и $Y_{\widetilde{V}}$ независимы при $V \subset T_j$ и $\widetilde{V} \subset T_k$, $j \neq k$, то случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п.

Пример 5. Пусть случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^2$ с $\mathbf{E}\,|\xi_t| < \infty$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}(\xi_{(k,l)} \;/\; \ldots \xi_{(k-1,l)}, \xi_{(k+1,l)}) = 0 \quad \text{п.н.}$$

при любых $k, l \in \mathbb{Z}^1$ и $\xi_{(k,l)}$, $\xi_{(i,j)}$ независимы при $l \neq j$. Тогда случайный процесс $Y_V = \sum\limits_{t \in \mathbb{Z}^2 \setminus V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом относительно любой п.в.к.п.

Определение 2. Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}|\xi_t| < \infty$ назовем *условно перестановочным* (по отношению к суммированию) относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любых $n = 0, 1, \ldots$ и $s, t \in V_n$

$$\mathbf{E}\left(\xi_s \,/\, \sum_{u\in V_n}\xi_u, \sum_{u\in V_{n+1}}\xi_u, \ldots\right) = \mathbf{E}\left(\xi_t \,/\, \sum_{u\in V_n}\xi_u, \sum_{u\in V_{n+1}}\xi_u, \ldots\right) \quad \text{п.н.} \tag{1.2}$$

Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ назовем *условно перестановочным*, если оно условно перестановочно относительно любой п.в.к.п.

Предложение 1. *Предположим, что случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ условно перестановочно относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$. Тогда случайный процесс $Y_V = \frac{1}{|V|}\sum_{t\in V}\xi_t$, $V \in \mathbf{W}$ образует обратный мартингал, ассоциированный с п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_{V_n}, Y_{V_{n+1}}, \ldots)$. Из условной перестановочности для любых $n = 1, 2, \ldots$ и $s, t \in V_n$

$$\mathbf{E}(\xi_s/\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\xi_t/\mathcal{F}_n) \quad \text{п.н.} \tag{1.3}$$

Поскольку $V_n \subset V_{n+1}$, то из (2.1)

$$\mathbf{E}(Y_{V_n}/\mathcal{F}_{n+1}) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in V_n}\xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}\right) = \frac{1}{|V_n|}\sum_{u\in V_n}\mathbf{E}(\xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{|V_{n+1}|}\sum_{u\in V_{n+1}}\mathbf{E}(\xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{|V_{n+1}|}\sum_{u\in V_{n+1}}\xi_u \,/\, \mathcal{F}_{n+1}\right) = Y_{n+1},$$

и поэтому имеем (1.2). Предложение 1 доказано.

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^1$ – измеримое множество с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ борелевских подмножеств и конечной мерой $\mu(X) > 0$. Предположим, что для любого $t \in \mathbb{Z}^d$ измеримое пространство $(X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t)$ является копией пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и для любого $V \in \mathbf{W}$

$$X_V = \otimes_{t\in V} X_t, \quad \mathcal{A}_V = \otimes_{t\in V}\mathcal{A}_t, \quad \mu_V = \otimes_{t\in V}\mu_t,$$

где $\otimes$ – символ картезианского произведения и $X_\emptyset = \emptyset$, $\mathcal{A}_\emptyset = \emptyset$. Предположим, что p_V, $V \in \mathbf{W}$ – последовательная система конечномерных плотностей относительно μ_V, $V \in \mathbf{W}$, т.е. для любого $V \in \mathbf{W}$ $\int_X p_V(x)\, d\mu(x) = 1$ и если $V \subset \widetilde{V}$, то

$$\int_{X_{\widetilde{V}\setminus V}} p_{\widetilde{V}}(z, x)\, d\mu_{\widetilde{V}\setminus V}(x) = p_V(z), \quad z \in X_V.$$

Пусть для любого $t \in \mathbb{Z}^d$

$$\int_X |x| p_t(x)\, d\mu(x) < \infty. \tag{1.4}$$

Определение 3. Будем говорить, что последовательная система конечномерных плотностей p_V, $V \in \mathbf{W}$, обладающая свойством (1.4), является *инвариантной относительно спиновых инверсий*, если для любых $s, t \in V$ и $x \in X_V$

$$p_V(x) = p_V(\widetilde{x}), \tag{1.5}$$

где $\widetilde{x} \in X_V$, $\widetilde{x}_u = x_u$ при $u \in V \setminus \{s,t\}$ и $\widetilde{x}_s = x_t$, $\widetilde{x}_t = x_s$.

Теорема 1. *Если случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантными относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями p_V, $V \in \mathbf{W}$, то оно условно перестановочно.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любых $V \in \mathbf{W}$ и $s, t \in V$

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_V) = \mathbf{E}(\xi_t/S_V) \quad \text{п.н.}, \tag{1.6}$$

где $S_V = \sum_{t \in V} \xi_t$, $V \in \mathbf{W}$. Условные математические ожидания в (1.6) существуют, поскольку согласно (1.4) $\mathbf{E}|\xi_t| < \infty$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Перепишем (1.6) в эквивалентной форме :

$$\int_\Omega \xi_s I_A \, d\mathrm{Pr} = \int_\Omega \xi_t I_A \, d\mathrm{Pr} \tag{1.7}$$

для любого $A \in \sigma(S_V) \subseteq \mathcal{F}$. Здесь I_A – индикатор множества A. Для проверки (1.7) достаточно показать, что

$$\int_\Omega \xi_s I_{S_V^{-1}(B)} \, d\mathrm{Pr} = \int_\Omega \xi_t I_{S_V^{-1}(B)} \, d\mathrm{Pr}$$

и поэтому

$$\int_{X_V} x_s I_B \left(\sum_{u \in V} x_u \right) p_V(x)\, d\mu_V(x) = \int_{X_V} x_t I_B \left(\sum_{u \in V} x_u \right) p_V(x)\, d\mu_V(x) \tag{1.8}$$

для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Заменяя x_s на x_t и x_t на x_s в правой части (1.8) и используя симметрию $\sum x_u$ и $\mu_V(x) = \prod_{u \in V} \mu(x_u)$ относительно x_u, $u \in V$, можем переписать (1.8) в виде

$$\int_{X_V} x_s I_B \left(\sum_{u \in V} x_u \right) [p_V(x) - p_V(\widetilde{x})]\, d\mu_V(x) = 0,$$

где $\tilde{x} \in X_V$; $\tilde{x}_u = x_u$ при $u \in V \setminus \{s,t\}$ и $\tilde{x}_s = x_t, \tilde{x}_t = x_s$. Согласно (1.5) последнее равенство выполняется для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. Следовательно, для соответствующего случайного поля имеет место (1.6).

Пусть теперь $\{V_n\}_{n\geq 1}$ – произвольная п.в.к.п. Из (1.6) получим

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_{V_n}) = \mathbf{E}(\xi_t/S_{V_n}) \quad \text{п.н.} \quad s,t \in V_n,\ n = 1,2,...$$

Аналогично можно показать, что для любых $s,t \in V_n$ и $l,n = 1,2,...$

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ..., S_{V_{n+l}}) = \mathbf{E}(\xi_t/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ..., S_{V_{n+l}}) \quad \text{п.н.} \tag{1.9}$$

Переходя к пределу под символом условного математического ожидания (см. [6]), получим

$$\mathbf{E}(\xi_s/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ...) = \mathbf{E}(\xi_t/S_{V_n}, S_{V_{n+1}}, ...) \quad \text{п.н.}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантными относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями p_V, $V \in \mathbf{W}$, то случайное поле $\phi(\xi_t)$, $t \in \mathbb{Z}^d$ условно перестановочно для любой интегрируемой на X функции ϕ.*

Замечание 1. Случайное поле $\phi(\xi_t)$, $t \in \mathbb{Z}^d$ в теореме 2 условно перестановочно относительно обоих суммирований $\sum \phi(\xi_t)$ и $\sum \xi_t$. Это означает, что случайный процесс $Y_V = \dfrac{1}{|V|}\sum\limits_{t\in V} \phi(\xi_t)$, $V \in \mathbf{W}$ является обратным мартингалом в смысле определения 2 и в классическом смысле (относительно σ-полей $\mathcal{F}_n = \sigma(\sum_{u\in V_n} \xi_u, \sum_{u\in V_{n+1}} \xi_u, ...))$.

§2. АСИМПТОТИЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

Ниже мы будем исследовать асимптотическое поведение нормированных сумм компонент случайного поля, образующего обратный мартингал. В частности, мы получаем достаточные условия для конечномерных плотностей, при которых выполняется УЗБЧ.

Будем говорить, что для случайного поля ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{E}\xi_t = 0$ имеет место УЗБЧ относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если п.н.

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \xi_t \to 0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Будем говорить, что для случайного поля ξ_t, $\mathbf{E}\xi_t = 0$, $t \in \mathbb{Z}^d$ имеет место УЗБЧ, если для ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ УЗБЧ имеет место относительно любой п.в.к.п.

Следующая теорема следует из предложения 1, теоремы 1 и из хорошо известной теоремы о сходимости обратных мартингалов (см. [6], [7]). Обозначим

$$\sigma_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\sum_{u\in V_n} \xi_u\,,\ \sum_{u\in V_{n+1}} \xi_u, \dots\right).$$

Теорема 3. *Предположим, что случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантыми относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями. Тогда для любойо п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$ имеет место сходимость*

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \xi_t \rightarrow \mathbf{E}(\xi_0/\sigma_\infty), \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

п.н. и в $\mathbf{L}^1$.

Теорема 4. *Пусть случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ обладает инвариантыми относительно спиновых инверсий конечномерными плотностями. Тогда для любой п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$ и любой интегрируемой функции ϕ имеет место сходимость*

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \phi(\xi_t) \rightarrow \mathbf{E}(\phi(\xi_0)/\sigma_\infty), \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

п.н. и в смысле $\mathbf{L}^1$.

Доказательство. Сходимость нормированных сумм $(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \phi(\xi_t)$ следует из предложения 1, теоремы 2 и из теоремы о сходимости обратных мартинглаов. Согласно замечанию 1, значение предела равно $\mathbf{E}(\phi(\xi_0)/\sigma_\infty)$.

Далее нам понадобятся следующие определения, введенные в [8], [9].

Будем говорить, что случайный процесс S_V, $V \in \mathbf{W}$ образует мартингал, ассоциированный с п.в..п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любого $n = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(S_{V_n}/S_{V_0}, S_{V_1}, \dots, S_{V_{n-1}}) = S_{V_{n-1}} \quad \text{п.н.} \tag{2.1}$$

Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ с $\mathbf{E}|\xi_t| < \infty$ называтеся ***мартингал-разностным случайным полем относительно п.в.к.п.*** $\{V_n\}_{n\geq 0}$, если для любых $s \in V_n \setminus V_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}(\xi_s/\xi_u,\ u \in V_{n-1}) = \mathbf{E}\xi_s \quad \text{п.н.} \tag{2.2}$$

Если случайное поле мартингал-разностно относительно любой п.в.к.п., то оно называется *мартингал-разностным* случайным полем. Нетрудно видеть ([9], [10]), что если ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ – мартингал-разностное случайное поле относительно некоторой п.в.к.п., то случайный процесс $S_V = \sum_{t\in V} \xi_t$, $V \in\mathbf{W}$ образует мартингал, ассоциированный с той же п.в.к.п.

Пусть теперь $X \subseteq \mathbb{R}^1$ – множество, симметричное относительно нуля (т.е. если $x \in X$, то $-x \in X$) и μ – симметричная относительно нуля мера (это означает, что $\mu(Y) = \mu(-Y)$, где $-Y = \{-x : x \in Y\}$, $Y \in \mathcal{A}$). Рассмотрим систему согласованных конечномерных плотностей p_V, $V \in\mathbf{W}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}^d} \int_X x^\gamma p_t(x)\, d\mu < \infty, \quad \gamma \geq 2. \tag{2.3}$$

Предположим, что p_V, $V \in\mathbf{W}$ четные. Это означает, что для любых $V \in\mathbf{W}$, $x \in X_V$ и $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_{|V|})$ таких, что $\theta_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, ..., |V|$

$$p_V(x_{\overline{\theta}}) = p_V(x), \quad x_{\overline{\theta}} = (\theta_1 x_{t_1}, ..., \theta_{|V|} x_{t_{|V|}}) \in X_V. \tag{2.4}$$

Теорема 5. *Если случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ имеет четные конечномерные плотности p_V, $V \in\mathbf{W}$, удовлетворяющие (2.3), то ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ подчиняется УЗБЧ относительно любых п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$ таких, что $|\Delta_n| \leq An^\delta$; $A > 0$, $0 \leq \delta < 1$; $\Delta_n = V_n \setminus V_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. При доказательстве существенно используется представление мартингал-разностного случайного поля четными плотностями ([9], [10]) и вышеотмеченная теорема Чоу ([1]). Из условия (2.4) следует мартигал–разностное свойство для случайного поля, соответствующего системе конечномерных плотностей p_V, $V \in\mathbf{W}$. Следовательно, $S_V = \sum_{t\in V} \xi_t$, $V \in\mathbf{W}$ образует мартингал, ассоциированный с произвольной п.в.к.п. Согласно теореме Чоу, для одномерного мартингала $S = \{S_n\}$ имеет место УЗБЧ, если

$$\mathbf{E}|S_n|^{2r} < \infty \tag{2.5}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}|S_n - S_{n-1}|^{2r}}{n^{1+r}} < \infty, \quad r \geq 1. \tag{2.6}$$

Проверим условия (2.5) и (2.6) для мартингала $S_{V_n} = \sum_{t\in V_n} \xi_t$ с $r = \gamma/2$. Из условия (2.3) следует существование $\mathbf{E}|S_{V_n}|^\gamma$. Из неравенств Буркхолдера (см. [2]) и Минковского имеем

$$(\mathbf{E}|S_{V_n}|^\gamma)^{1/\gamma} \le A_\gamma \left(\mathbf{E} \left(\sum_{t\in V_n} \mathbf{E}\xi_t^2 \right)^{\gamma/2} \right)^{1/\gamma} \le A_\gamma \left(\sum_{t\in V_n} (\mathbf{E}\xi_t^\gamma)^{2/\gamma} \right)^{1/2} \le$$

$$\le A_\gamma |V_n|^{1/2} \left(\sup_{t\in\mathbb{Z}^d} \left(\int_X x^\gamma p_t(x)\, d\mu_t(x) \right)^{2/\gamma} \right)^{1/2} < \infty,$$

где $A_\gamma \ge 0$ – некоторая константа. Это означает, что $\mathbf{E}|S_{V_n}|^\gamma < \infty$. Для последовательности $\{S_{V_n}\}$ условие (2.6) можно проверить аналогично :

$$(\mathbf{E}|S_{V_n} - S_{V_{n-1}}|^\gamma)^{1/\gamma} = \left(\mathbf{E} \left| \sum_{t\in\Delta_n} \xi_t \right|^\gamma \right)^{1/\gamma} \le B_\gamma |\Delta_n|^{1/2},$$

где $B_\gamma \ge 0$ – константа. Таким образом

$$\mathbf{E}|S_{V_n} - S_{V_{n-1}}|^\gamma \le B_\gamma^\gamma |\Delta_n|^{\gamma/2} \le C_\gamma n^{\gamma\delta/2}, \quad C_\gamma = A^{\gamma/2} B_\gamma^\gamma$$

и, тем самым, условие (2.6) выполняется. Теорема 5 доказана.

Теорема 5 представляет УЗБЧ относительно п.в.к.п., имеющей особую структуру. Тем не менее мы можем привести условия для конечномерных плотностей, при наличии которых УЗБЧ выполняется для любой п.в.к.п.

Теорема 6. *Пусть конечномерные плотности случайного поля ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ являются четными и инвариантны относительно спиновых инверсий. Тогда УЗБЧ имеет место относительно произвольной п.в.к.п.*

Доказательство. Доказательство теоремы 6 является следствием теорем 1, 3 и 5. Условие (2.4) обеспечивает УЗБЧ для случайного поля относительно п.в.к.п., имеющей особую структуру теоремы 5. Из условия (1.5) следует сходимость (п.н. и в смысле $\mathbf{L}^1$) нормированных сумм

$$(|V_n|)^{-1} \sum_{t\in V_n} \xi_t \to \mathbf{E}(\xi_0/\sigma_\infty), \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $\{V_n\}_{n\ge 0}$ – произвольная п.в.к.п. Из единственности предела следует, что это случайное поле должно быть нулем. Теорема 6 доказана.

§3. ГИББСОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И ОБРАТНЫЕ МАРТИНГАЛЫ

В этом параграфе мы приведем условия на потенциал Φ, при которых соответствующее гиббсовское случайное поле образует обратный мартингал. Ситема $\Phi = \{\Phi_V,\ V \in \mathbf{W}\}$ измеримых функций, каждая из которых определена в соответствующем пространстве $(X_V, \mathcal{A}_V, \mu_V)$, называется *потенциалом*. Норма потенциала Φ определяется по формуле

$$\|\Phi\| = \sup_{t\in\mathbb{Z}^d} \sum_{J:\, t\in J\in\mathbf{W}} \sup\{|\Phi_J(x)| :\ x \in X_J\}.$$

Для $V \in \mathbf{W}$ потенциальную энергию определим как

$$U_V(x) = \sum_{\substack{J\subset V\\ J\neq\emptyset}} \Phi_J(x_J), \quad x = (x_t,\ t\in V) \in X_V, \quad x_J = (x_t,\ t \in J), \quad J \subset V.$$

Потенциальная энергия конечна, если, например, условие $\|\Phi\| < \infty$ выполнено. Вероятностное распределение G_V на $(X_V, \mathcal{A}_V)$, абсолютно непрерывное относительно меры μ_V с плотностью

$$q_V^{\Phi}(x) = \frac{\exp[-U_V(x)]}{\int_{X_V} \exp[-U_V(x)]\, d\mu_V(x)}, \quad x \in X_V \tag{3.1}$$

называтеся *распределением Гиббса* в V, соответствующим потенциалу Φ. Случайное поле ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$ называется *гиббсовским случайным полем* (ГСП), если его конечномерные распределения P_V являются пределами распределений Гиббса в конечных множествах, т.е. существует п.в.к.п. $\{J_m\}_{m\geq 1}$, $\cup_m J_m = \mathbb{Z}^d$, такая, что равномерно по $A \in \mathcal{A}_V$

$$P_V(A) = \lim_{m\to\infty} (G_{J_m})_V(A), \tag{3.2}$$

где $(G_J)_V(A) = G_J(A \otimes X_{J\setminus V})$, $V \subset J$.

Будем говорить, что потенциал Φ инвариантен относительно спиновых инверсий, если для любых $V \in \mathbf{W}$, $s, t \in V$ и $x \in X_V$

$$\Phi_V(x) = \Phi_V(\widetilde{x}), \tag{3.3}$$

где $\widetilde{x} \in X_V$; $\widetilde{x}_u = x_u$, при $u \in V \setminus \{s,t\}$, и $\widetilde{x}_s = x_t$, $\widetilde{x}_t = x_s$.

Предложение 2. *Пусть потенциал Φ с конечной нормой инвариантен относительно спиновых инверсий. Если для любых $s,t \in \mathbb{Z}^d$ и $x,y \in X$, $z \in X_{\mathbb{Z}^d}$*

$$\sum_{J \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{s,t\}} [\Phi_{\{s\}\cup J}(x,z_J) - \Phi_{\{s\}\cup J}(y,z_J)] = \sum_{J \subset \mathbb{Z}^d \setminus \{s,t\}} [\Phi_{\{t\}\cup J}(x,z_J) - \Phi_{\{t\}\cup J}(y,z_J)], \tag{3.4}$$

то для соответствующего ГСП ξ_t, $t \in \mathbb{Z}^d$, процесс $Y_V = \dfrac{1}{|V|}\sum_{t\in V}\xi_t$, $V \in \mathbf{W}$, является обратным мартингалом, ассоциированным с произвольной п.в.к.п.

Доказательство. Существование ГСП следует из свойства финитности нормы потенциала (см., например, [4], [5]). Покажем, что конечномерные гиббсовские плотности обладают свойством (1.5). Поскольку плотности p_V, $V \in \mathbf{W}$ гиббсовские, то существует п.в.к.п. $\{J_m\}_{m\geq 1}$, $\cup J_m = \mathbb{Z}^d$ такая, что

$$p_V(x) = \lim_{m\to\infty} (q^{\Phi}_{J_m})_V(x)$$

для любых $V \in \mathbf{W}$ и $x \in X_V$. Пусть $\widetilde{x} \in X_V$ такое, что $\widetilde{x}_u = x_u$ для $u \in V\setminus\{s,t\}$, а $\widetilde{x}_s = x_t$, $\widetilde{x}_t = x_s$ для любых фиксированных точек $s,t \in V$, $s \neq t$ и $x \in X_V$. Тогда

$$p_V(x) - p_V(\widetilde{x}) = \lim_{m\to\infty} [(q^{\Phi}_{J_m})_V(x) - (q^{\Phi}_{J_m})_V(\widetilde{x})] = \tag{3.5}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\int_{X_{J_m\setminus V}} \exp\{-U_{J_m}(x,z)\}[1-\exp\{-U_{J_m}(x,z)+U_{J_m}(\widetilde{x},z)\}]\, d\mu_{J_m\setminus V}(z)}{\int_{X_{J_m}} \exp\{-U_{J_m}(z)\}\, d\mu_{J_m}(z)}.$$

Согласно (3.3) при достаточно больших m, для которых $J_m \supset V$, имеем

$$U_{J_m}(x,z) - U_{J_m}(\widetilde{x},z) = \sum_{J\subset J_m\setminus V} [\Phi_{\{V\setminus\{s\}\}\cup J}(x_{V\setminus\{s\}},z_J) - \Phi_{\{V\setminus\{s\}\}\cup J}(\widetilde{x}_{V\setminus\{s\}},z_J)] -$$

$$- \sum_{J\subset J_m\setminus V} [\Phi_{\{V\setminus\{t\}\}\cup J}(x_{V\setminus\{t\}},z_J) - \Phi_{\{V\setminus\{t\}\}\cup J}(\widetilde{x}_{V\setminus\{t\}},z_J)]. \tag{3.6}$$

Положив $\widetilde{J} = J \cup \{V\setminus\{s,t\}\}$ и $\widetilde{z}_{\widetilde{J}} = (x_{V\setminus\{s,t\}}, z_J)$ в правой части (3.6), получим

$$U_{J_m}(x,z) - U_{J_m}(\widetilde{x},z) = \sum_{\widetilde{J}\subset J_m\setminus\{s,t\}} [\Phi_{\{s\}\cup\widetilde{J}}(x_s,\widetilde{z}_{\widetilde{J}}) - \Phi_{\{s\}\cup\widetilde{J}}(x_t,\widetilde{z}_{\widetilde{J}})] -$$

$$- \sum_{\widetilde{J}\subset J_m\setminus\{s,t\}} [\Phi_{\{t\}\cup\widetilde{J}}(x_s,\widetilde{z}_{\widetilde{J}}) - \Phi_{\{t\}\cup\widetilde{J}}(x_t,\widetilde{z}_{\widetilde{J}})].$$

Поэтому из (3.4)

$$\lim_{m\to\infty} (U_{J_m}(x,z) - U_{J_m}(\widetilde{x},z)) = 0.$$

Отсюда, в силу (3.5), следует (1.5). Для завершения доказательства предложения 2 остается применить предложение 1 и теорему 1.

С помощью предложения 2 можно построить ГСП, образующие обратные мартингалы. Следующая теорема обобщает предыдущую.

Теорема 7. *Пусть потенциал Φ с конечной нормой инвариантен относительно спиновых инверсий и удовлетворяет условию (3.4). Тогда случайный процесс $Y_V = \frac{1}{|V|}\sum_{t\in V}\phi(\xi_t)$, $V \in \mathbf{W}$, является обратным мартингалом, ассоциированным с произвольной п.в.к.п. для любой функции ϕ, интегрируемой на X.*

Доказательство непосредственно следует из предложения 1, теоремы 2 и предложения 2.

Скажем, что потенциал Φ *четный*, если для любых $V \in \mathbf{W}$, $x \in X$ и $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_{|V|})$ такой, что $\theta_i \in \{-1; 1\}$, $i = 1, ..., |V|$, имеем

$$\Phi_V(x_{\overline{\theta}}) = \Phi_V(x), \quad x_{\overline{\theta}} = (\theta_1 x_{t_1}, ..., \theta_{|V|} x_{t_{|V|}}) \in X_V. \tag{3.7}$$

Теорема 8. *Если Φ – четный потенциал, то соответствующее ГСП удовлетворяет УЗБЧ относительно п.в.к.п. $\{V_n\}_{n\geq 0}$, для которой $|\Delta_n| \leq An^{\delta}$; $A > 0$, $0 \leq \delta < 1$; $\Delta_n = V_n \setminus V_{n-1}$, $n = 1, 2, ...$.*

Теорема 9. *Если потенциал Φ является четным и инвариантным относительно спиновых инверсий, то для соответствующего ГСП имеет место УЗБЧ относительно любой п.в.к.п.*

Для доказательства теорем 8 и 9 достаточно заметить, что из условия (3.7) следует свойство (2.4) для гиббсовских плотностей, и последовательно применить теоремы 5, 6 и предложение 2.

Автор выражает благодарность Б.С. Нахапетяну и С.К. Погосяну за ценные советы и обсуждения.

ABSTRACT. In the paper we discribe a class of random fields, for which the normalized sums of components form reverse martingales asssocciated with sequences of increasing finite sets. Under additional restrictions we establish the limiting behavior of these normalized sums. The results are applied to the Gibbs random fields.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. S. Chow, "On a strong law of large numbers for martingales", Ann. Math. Statist., vol. 38, № 2, p. 610, 1967.
2. Y. S. Chow, H. Teicher, Probability Theory, Springer-Verlag, New-York, 1978.
3. K. L. Chung, "The strong law of large numbers", Proc. Second Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Univ. of California Press, pp. 341 – 352, 1951.
4. R. L. Dobrushin, "Gibbsian random fields for lattice system with pairwise interactions", Funct. Anal. Appl., vol. 2, pp. 292 – 301, 1968.
5. R. L. Dobrushin, "Gibbsian random fields. General case", Funct. Anal. Appl., vol.3, № 1, pp. 27 – 35, 1969.
6. J. L. Doob, Stochastic Processes, J. Wiley & Sons, Chapman & Hall, 1953.
7. P. A. Meyer, Probability and Potentials, Massachusetts-Toronto-London, 1966.
8. Б. С. Нахапетян, А. Н. Петросян, "Центральная предельная теорема для мартингалов, ассоциированных с возрастающими множествами", Докл. АН АрмССР, т. 85, № 1, стр. 12 – 15, 1987.
9. B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian, "Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem", Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A.I.Math., vol. 17, pp. 105 – 107, 1992.
10. A. N. Petrosian, "On a martingale property of the Gibbs random fields", J. Int. Eq. Math. Phys., vol. 1, № 1, pp. 152 – 157, 1992.
11. Ю. В. Прохоров, "О сильном законе больших чисел", Изв. АН СССР , Мат., т. 14, № 6, стр. 523 – 536, 1950.

19 сентября 1995

Институт математики
НАН Армении