О ПОДСИСТЕМАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ПОЛНЫХ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

А. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

1. Пусть E–измеримое множесто, $\mu(E)$ – его лебегова мера. Обозначим через $L_2(E)$ пространство интегрируемых с квадратом на E функций, и пусть $\|\cdot\|_E$ – норма в $L_2(E)$.

Определение 1. Ортонормальная на $[a,b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной на измеримом множестве $E \subset [a,b]$, $\mu(E) > 0$, если для любой $f(x) \in$ $\in L_2(E)$ из равенств

$$\int_E f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

следует, что $f(x) = 0$ почти всюду на E.

Определение 2. Ортонормальная на $[a,b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной по рядам из L_2 на измеримом множестве $E \subset [a,b]$, $\mu(E) > 0$, если для любой $f(x) \in L_2(E)$ найдется сходящийся в метрике $\|\cdot\|_{[a,b]}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\varphi_n(x), \qquad \sum_n a_n^2 < +\infty, \tag{2}$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L_2(E)$.

Определение 3. Ортонормальная на $[a, b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется почти полной по рядам из L_2, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [a, b]$, $\mu(E) > b - a - \varepsilon$, на котором она полна по рядам из L_2.

Известно (см. [1], стр. 120), что существует ортонормальная на $[0, 1]$ система, которая полна на любом интервале $[0, 1 - \delta]$, $\delta > 0$, но не является полной по рядам из L_2 на $[0, 1 - \delta]$.

Пусть $p_1, ..., p_q$ –первые q простые числа, и пусть $n_i = \prod_{j=1}^{q} p_j^{\alpha_j(i)}$. В работе [2] В. Я. Козлов доказал, что если из тригонометрической системы $\{1, \cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx)\}$ удалить функции $\cos(2\pi n_i x)$, $\sin(2\pi n_i x)$, $i = 1, 2, ...$, то оставшаяся система будет полной (в смысле определения 1) на каждом измеримом множестве $E \subset [0,1]$, $\mu(E) < 1$. Нам неизвестно, следует ли из полноты подсистемы тригонометрической системы на множестве E ее полнота по рядам из L_2 на том же множестве E.

В работе [3] показано, что ряд важных свойств полных в $L_2[a, b]$ ортонормированных систем $\{\varphi_n(x)\}$ остается в силе и для тех подсистем, которые полны в смысле определений 2 и 3.

В настоящей заметке показывается, что некоторые системы, полученные из системы $\{\sin(2\pi nx)\}$ после удаления из нее бесконечного числа функций, являются полными по рядам из L_2 на любом множестве $[0, \pi] \setminus (a, b)$, $(a, b) \subset [0, \pi]$, $b - a < \pi$.

2. Верна следующая

Теорема. *Для каждой возрастающей последовательности натуральных чисел* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *таких, что*

$$\limsup_{n \to \infty}(k_{n+1} - k_n) = +\infty, \tag{3}$$

система $\{\sin n_j x\}_{j=1}^{\infty} = \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{\sin 2^{k_n} x\}_{n=1}^{\infty}$ *полна по рядам из* L_2 *на любом множестве* $[0, \pi] \setminus (a, b)$, $(a, b) \subset [0, \pi]$, $b - a < \pi$, *т. е. для любого интервала* $(a, b) \subset [0, \pi]$, $0 < b - a < \pi$ *и для любой функции* $f(x) \in L_2([0, \pi])$ *существует* *сходящийся в $L_2([0,\pi])$ ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin n_i x, \qquad \sum_i a_i^2 < +\infty, \tag{4}$$

сумма которого совпадает с $f(x)$ почти всюду на множестве $[0,\pi]\setminus[a,b]$.

Доказательство. Сперва докажем, что система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}\setminus\{\sin 2^k x\}_{k=n}^{\infty}$ полна по рядам из L_2 на множестве $[2^{-n}\pi,\pi]$. Пусть $f(x)\in L_2([0,\pi])$. Положим

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x\in[\pi/2,\pi] \\ f(\pi-x), & \text{если} \quad x\in[0,\pi/2]. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть a_{k1} – коэффициенты Фурье $f_1(x)$ относительно системы $\{\sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$. Так как $f_1(x)$ четна относительно точки $\pi/2$ и $\sin(2^n x)$, $n\geq 1$ нечетны относительно $\pi/2$, то имеем $a_{k1}=0$ для всех $k=2^n$, $n=1,2,\ldots$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k1}\sin kx$ сходится к $f(x)$ в метрике L_2 на множестве $[\pi/2,\pi]$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{k1}^2<+\infty$, $a_{2^n1}=0$, $n=1,2,\ldots$.

Далее, положим

$$f_2(x)=\begin{cases} f(x)-f_1(x), & \text{если} \quad x\in[\pi/4,\pi/2] \\ f(\pi/2-x)-f_1(\pi/2-x), & \text{если} \quad x\in[0,\pi/4] \\ 0, & \text{если} \quad x\in[\pi/2,\pi]. \end{cases} \tag{6}$$

Легко видеть, что $f_2(x)$ четна на $[0,\pi/2]$ относительно точки $\pi/4$, а функции $\sin 2^k x$, $k\geq 2$, нечетны. Поэтому, если a_{k2} – коэффициенты Фурье функции $f_2(x)$, то $a_{k2}=0$ при $k=2^n$, $n\geq 2$.

Пусть $b_{k2}=a_{k1}+a_{k2}$. Из определения a_{k1},a_{k2} следует, что $b_{k2}=0$ для всех $k=2^n$, $n\geq 2$ и $\sum\limits_k b_{k2}^2<+\infty$. С другой стороны, согласно (5) и (6) имеем

$$f_1(x)+f_2(x)=f(x), \qquad x\in[\pi/4,\pi]. \tag{7}$$

Из определения коэффициентов a_{k1},a_{k2},b_{k2} и (7) следует, что в метрике $L_2([0,\pi])$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{k2}\sin kx=\begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x\in[\pi/4,\pi] \\ f_1(x)+f_2(x), & \text{если} \quad x\in[0,\pi/4]. \end{cases} \tag{8}$$

Пусть для натурального $n \geq 2$ определены функции $f_i(x) \in L_2([0,\pi])$, $1 \leq i \leq n-1$ такие, что

$$F_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) = f(x), \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2^{n-1}}, \pi\right], \tag{9}$$

а коэффициенты Фурье a_{ki} этих функций удовлетворяют условиям

$$\sum_k a_{ki}^2 < +\infty, \qquad a_{2^j i} = 0, \quad j \geq i, \quad 1 \leq i \leq n-1. \tag{10}$$

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) - F_{n-1}(x), & \text{если} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2^n}, \frac{\pi}{2^{n-1}}\right] \\ f\left(\frac{\pi}{2^{n-1}} - x\right) - F_{n-1}\left(\frac{\pi}{2^{n-1}} - x\right), & \text{если} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2^n}\right] \\ 0, & \text{если} \quad x \in [\frac{\pi}{2^{n-1}}, \pi]. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что функция $f_n(x)$ четная на $[0, \pi 2^{1-n}]$ относительно $\pi 2^{-n}$, а функции $\sin 2^k x$, $k \geq 2^n$, нечетны. Поэтому, обозначив через a_{kn} коэффициенты Фурье функции $f_n(x)$, получим

$$\sum_k a_{kn}^2 < +\infty, \qquad a_{2^j n} = 0, \quad j \geq n. \tag{12}$$

Положим

$$b_{kn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (F_{n-1}(x) + f_n(x)) \sin kx\, dx, \qquad k \geq 1. \tag{13}$$

Из индукционных предположений (10) и из (12), (13) следует, что

$$b_{kn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}, \qquad b_{2^j n} = 0, \quad j \geq n, \quad \sum_k b_{kn}^2 < +\infty. \tag{14}$$

Из (9) и (11) следует, что

$$F_{n-1}(x) + f_n(x) = f(x), \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2^n}, \pi\right] \tag{15}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \sin kx = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2^n}, \pi\right] \\ F_{n-1}(x) + f(x), & \text{если} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2^n}\right] \end{cases} \tag{16}$$

в метрике $L_2([0,\pi])$. Следовательно, ряд в левой части (16) сходится в метрике $L_2([0,\pi])$ и его сумма совпадает с $f(x)$ на интервале $[\pi 2^{-n}, \pi]$. Таким образом, для любого $n \geq 1$ и для любой $f(x) \in L_2([0,\pi])$ мы построили ряд (16), который сходится в метрике $L_2([0,\pi])$ и сумма которого совпадает с $f(x)$ на множестве $[2^{-n}\pi, \pi]$.

Замечание 1. Используя вышеприведенные расуждения, легко проверить, что система $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty} \setminus \{\sin(2^j x)\}_{j=n}^{\infty}$ также полна по рядам из L_2 на всех множествах вида

$$[0,\pi] \setminus \left[\frac{(i-1)\pi}{2^n}, \frac{i\pi}{2^n}\right], \qquad 1 \le i \le 2^n. \tag{17}$$

Пусть $0 < \alpha < \pi/8$. Пользуясь (3)выберем натуральное ν такое, что

$$\pi 2^{[\gamma]+1} < \alpha, \tag{18}$$

где $\gamma = (k_{\nu+1} - k_\nu)/2$ и $[\gamma]$ означает целую часть числа γ. Положим $[\gamma] - 1 = m$. Заметим, что

$$k_{\nu+1} - (k_\nu + m) > 2. \tag{19}$$

Рассмотрим интервалы

$$\Delta_i = \left[(i-1)\pi 2^{-(k_\nu+m)}, i\pi 2^{-(k_\nu+m)}\right], \qquad 1 \le i \le 2^{k_\nu}, \tag{20}$$

полученные разбиением интервала $[0, \pi 2^{-m}]$ на 2^{k_ν} равные части.

Пусть $f(x) \in L_2([0,\pi])$. Как было установлено выше, существует сходящийся в метрике $L_2([0,\pi])$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_{2^j} = 0, \quad j \ge m \tag{21}$$

такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = f(x), \qquad x \in [\pi 2^{-m}, \pi].$$

Пусть $F(x)$ –сумма ряда (21) в метрике $L_2([0,\pi])$, т. е. b_k –коэффициенты Фурье функции $F(x)$. Согласно (19) имеем $k_{\nu+1} > m$. Поэтому из (21) следует $b_{2^{k_n}} = 0$, $n \ge \nu + 1$.

Докажем, что существуют действительные числа c_i, $1 \le i \le 2^{k_\nu}$ такие, что кусочно постоянная функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_i, & \text{если} \quad x \in \Delta_i, \quad 1 \le i \le 2^{k_\nu} \\ 0, & \text{если} \quad x \in [\pi 2^{-m}, \pi] \end{cases} \tag{22}$$

удовлетворяет условию

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin(kx)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\sin(kx)\,dx = -b_k, \qquad 1 \le k \le 2^{k_\nu}. \tag{23}$$

Для этого достаточно доказать, что следующая система линейных уравнений имеет решение :

$$c_1\int_{\Delta_1}\sin x\,dx + c_2\int_{\Delta_2}\sin x\,dx + \ldots + c_{2^{k_\nu}}\int_{\Delta_{2^{k_\nu}}}\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}b_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{24}$$

$$c_1\int_{\Delta_1}\sin 2^{k_\nu}x\,dx + c_2\int_{\Delta_2}\sin 2^{k_\nu}x\,dx + \ldots + c_{2^{k_\nu}}\int_{\Delta_{2^{k_\nu}}}\sin 2^{k_\nu}x\,dx = -\frac{\pi}{2}b_{2^{k_\nu}}.$$

Покажем, что строки матрицы системы (24)линейно независимы. Пусть α_j, $1 \le j \le 2^{k_\nu}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\alpha_j\int_{\Delta_i}\sin jx\,dx = 0, \qquad 1 \le i \le 2^{k_\nu}. \tag{25}$$

Пологая $x_0 = 0$, $x_i = i\pi 2^{-(k_\nu+m)}$, $1 \le i \le 2^{k_\nu}$ уравнения (25) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\frac{\alpha_j}{j}(\cos jx_i - \cos jx_{i-1}) = 0, \qquad 1 \le i \le 2^{k_\nu}. \tag{26}$$

Обозначим

$$T(x) = \sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\frac{\alpha_j}{j}\cos jx, \qquad c_0 = \sum_{j=1}^{2^{k_\nu}}\frac{\alpha_j}{j}.$$

Полином $T(x)$ – четный. Следовательно, из (26) следует, что $T(x)$ принимает значение c_0 в точках $\pm x_i$, $0 \le i \le 2^{k_\nu}$, лежащих на $[-\pi,\pi]$. Поэтому все числа α_j равны нулю. Таким образом, детерминант системы (24) отличен от нуля и (24) имеет решение. Если c_i, $1 \le i \le 2^{k_\nu}$ –решение системы (24), то функция $\varphi(x)$, определенная (22), удовлетворяет (23). Положим

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin(kx)\,dx, \qquad k \ge 1. \tag{27}$$

Если $j \ge k_{\nu+1}$, то в силу (19) имеем $j-(k_\nu+m) \ge 2$. Поэтому

$$\int_{\Delta_i}\sin 2^j x\,dx = -2^{-j}\left(\cos\left(i\pi 2^{j-(k_\nu+m)}\right) - \cos\left((i-1)\pi 2^{j-(k_\nu+m)}\right)\right) = 0. \tag{28}$$

Из (28) следует, что

$$a_{2^j} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2^{k_\nu}} c_i \int_{\Delta_i} \sin 2^j x \, dx = 0, \qquad j \geq k_{\nu+1}. \tag{29}$$

Пологая

$$\Psi(x) = F(x) + \varphi(x), \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Psi(x) \sin kx \, dx, \tag{30}$$

из (21) и (22) получаем

$$\Psi(x) = f(x), \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2^m}, \pi\right]. \tag{31}$$

В силу (30) и (23) имеем $c_k = 0$, $1 \leq k \leq 2^{k_\nu}$. С другой стороны, в силу (28) $c_{2^{k_n}} = 0$, $n \geq \nu + 1$. Следовательно

$$c_{2^{k_n}} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Из (18) и (19) следует, что $[\alpha, \pi] \subset [\pi 2^{-m}, \pi]$. Из (30)—(32) вытекает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx, \qquad c_{2^{k_n}} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

сходится в метрике $L_2([0,\pi])$ и на $[\alpha, \pi]$ его сумма совпадает с $f(x)$. Легко видеть (см. замечание 1), что в наших рассуждениях вместо интервала $(0, \alpha)$ можно взять любой интервал $(a, b) \subset (0, \pi)$, $b - a < \pi$ и построить сходящийся в метрике $L_2([0,\pi])$ ряд, сумма которого совпадает с $f(x)$ на $[0,\pi] \setminus (a, b)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., Наука, 1965.
2. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", УМН, т. 15, № 5, стр. 77 — 141, 1960.
3. В. Я. Козлов, "О полных системах ортогональных функций", Мат. сборник, т. 26, № 3, стр. 351 — 364, 1950.
4. А. А. Талалян, "О локальном характере некоторых свойств полных ортонормированных систем", Труды МИАН, т. CLXV, стр. 155 — 168, 1983.

28 октября 1995 Институт математики НАН Армении