О ПРИБЛИЖЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ РИМАНОВЫМИ СРЕДНИМИ ЧАСТНЫХ СУММ ИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

Для функций многих переменных оценивается разность между некоторыми римановыми интегральными средними и аналогичными средними для кубических частных сумм рядов Фурье этих функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье $\mathbb{R}^m$ обозначает m -мерное вещественное евклидово пространство, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^m$ определяются равенствами

$$\bar{x}\bar{y} = \sum_{j=1}^m x_j y_j, \quad \|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2}.$$

Через $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$ будем обозначать векторы с целочисленными координатами. Запись $|\bar{n}| \leq N$, где N — натуральное число, будет означать, что $|n_j| \leq N$, $1 \leq j \leq m$.

Через T_m обозначается m -кратное декартово произведение интервала $[0, 2\pi)$.

Пусть $f(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ — периодическая по каждой переменной, с периодом 2π функция, которая принимает действительные значения и интегрируема на T^m по Лебегу. Тогда ее ряд Фурье по m -кратной тригонометрической системе $e^{i\bar{n}\bar{x}} = e^{in_1x_1} \dots e^{in_mx_m}$ обозначается через

$$\sum_{\bar{n}} C_{\bar{n}} e^{i\bar{n}\bar{x}} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} C_{n_1 \dots n_m} e^{in_1x_1} \dots e^{in_mx_m}, \quad (1)$$

т. е. полагаем

$$\begin{aligned} C_{\bar{n}} &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} f(\bar{x}) e^{-i\bar{n}\bar{x}} d\bar{x} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(x_1, \dots, x_m) e^{-in_1 x_1} \dots e^{-in_m x_m} dx_1 \dots dx_m. \end{aligned} \quad (2)$$

Для натурального N через $S_N(\bar{x})$ обозначаются кубические частные суммы ряда Фурье функции $f(\bar{x})$. Кубические частные суммы ряда Фурье функции $f(\bar{i} + \bar{x})$, где $\bar{i} \in T_m$ рассматривается как параметр, обозначаются через $S_N(\bar{i}, \bar{x})$.

Имеем

$$\begin{aligned} S_N(\bar{i}, \bar{x}) &= \sum_{|\bar{n}| \leq N} C_{\bar{n}} e^{in(\bar{i} + \bar{x})} = S_N(\bar{i} + \bar{x}) = \\ &= \sum_{|n_1| \leq N} \dots \sum_{|n_m| \leq N} C_{n_1, \dots, n_m} e^{in_1(t_1 + x_1)} \dots e^{in_m(t_m + x_m)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для натурального числа k и вектора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, где $1 \leq \nu_j \leq k$, $j = 1, \dots, m$, натуральные числа, через Δ_k^ν обозначаются m -мерные интервалы

$$\Delta_k^\nu = \left[\frac{2\pi(\nu_1 - 1)}{k}, \frac{2\pi\nu_1}{k} \right) \times \dots \times \left[\frac{2\pi(\nu_m - 1)}{k}, \frac{2\pi\nu_m}{k} \right). \quad (4)$$

Для положительного h и натурального числа p , удовлетворяющих условиям $ph < \pi$, $h < 1$, $p \geq 1$, обозначим

$$R_p(h, x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\sin qh}{qh} \right)^p \cos qx \right). \quad (5)$$

Известно (см. [1], стр. 364), что $R_p(h, x)$ обращается в нуль на интервалах (ph, π) , $(-\pi, -ph)$, неотрицательна на $(-\pi, \pi)$, является полиномом степени $p - 1$ на каждом из интервалов $((p - 2)h, ph)$, $((p - 4)h, (p - 2)h)$, ..., и имеет непрерывные производные до порядка $p - 2$. Легко видеть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_p(h, x) dx = \int_{-ph}^{ph} R_p(h, x) dx = 1 \quad (6)$$

и

$$R_p(h, x) \leq \frac{C}{h}, \quad (7)$$

где $C > 0$ - абсолютная постоянная.

Неравенство (7) вытекает из следующих неравенств : для $h < 1$ имеем

$$\begin{aligned}
 |R_p(h, x)| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^{[\frac{1}{h}] + 1} \left| \frac{\sin qh}{qh} \right|^p + \sum_{q=[\frac{1}{h}] + 2}^{\infty} \left| \frac{\sin qh}{qh} \right|^p \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{h} \right] + 1 + \sum_{q=[\frac{1}{h}] + 2}^{\infty} \frac{1}{q^p h^p} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{h} + h^{-p} \frac{1}{\left(\left[\frac{1}{h} \right] + 1 \right)^{p-1}} \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{h} + 2 \frac{1}{h} + h^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{h} \right)^p \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Как обычно, $[a]$ обозначает целую часть числа a . Рассмотрим функции

$$R_p^k(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\sin q \frac{\pi}{kp}}{q \frac{\pi}{kp}} \right)^p \cos qx \right) = R_p \left(\frac{\pi}{kp}, x \right), \quad k = 2, 3, \dots \tag{9}$$

и

$$R_{pj}^{(k)}(x) = \begin{cases} R_p^{(k)} \left(x - \frac{\pi(2j-1)}{k} \right), & \text{при } x \in \left[\frac{2\pi(j-1)}{k}, \frac{2\pi j}{k} \right) \\ 0, & \text{при } x \in [0, 2\pi) \setminus \left[\frac{2\pi(j-1)}{k}, \frac{2\pi j}{k} \right). \end{cases} \tag{10}$$

Для $\bar{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $1 \leq \nu_j \leq k$, определим на T_m функцию m переменных

$R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x})$ равенством

$$R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j) = \prod_{j=1}^m R_p^{(k)} \left(x_j - \frac{\pi(2\nu_j-1)}{k} \right). \tag{11}$$

Определим также кусочно-постоянные функции

$$\Phi_k^{(p)}(\bar{x}) = \int_{\Delta_k^\nu} f(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u}, \quad \bar{x} \in \Delta_k^\nu, \tag{12}$$

$$\Psi_{k,N}^{(p)}(\bar{x}) = \int_{\Delta_k^\nu} S_N(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u}, \quad \bar{x} \in \Delta_k^\nu. \tag{13}$$

Так как

$$\bigcup_{\nu} \Delta_k^\nu = T_m, \tag{14}$$

то функции $\Phi_k^{(p)}(\bar{x})$ и $\Psi_{k,N}^{(p)}(\bar{x})$ определены на T_m и на каждом m -мерном интервале Δ_k^ν совпадают, соответственно, с интегральным средним Римана порядка p функции $f(\bar{x})$ и кубической частной суммой ряда Фурье функции $f(\bar{x})$.

Целью настоящей работы является оценивание сверху модуля разности $|\Phi_k^{(p)}(\bar{x}) - \Psi_{k,N}^{(p)}(\bar{x})|$ при различных $N = N(k)$. В случае $p = 1$ (случай обычных интегральных средних) мы доказываем некоторые вероятностные оценки для величины $\|\Phi_k^{(1)}(\bar{x}) - \Psi_{k,k^2}(\bar{x})\|_2$, где $\|\cdot\|_2$ - норма пространства $L_2(T_m)$.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Если $f(\bar{x})$ непрерывна, то для каждого натурального $p \geq 1$ последовательность $\{\Phi_k^{(p)}(\bar{x})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $f(\bar{x})$ равномерно и сходится к $f(\bar{x})$ в метрике $L_q(T_m)$, $q \geq 1$, если $|f(\bar{x})|^q$ интегрируема на T_m .

Доказательство. Если $f(\bar{x})$ - непрерывная периодическая функция с периодом 2π по каждой переменной, то она равномерно непрерывна.

Так как $R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) \geq 0$ при $\bar{u} \in \Delta_k^\nu$, то имеем

$$M_2 \int_{\Delta_k^\nu} R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} \leq \int_{\Delta_k^\nu} f(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} \leq M_1 \int_{\Delta_k^\nu} R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u}, \quad (15)$$

где M_1, M_2 - наибольшее и наименьшее значения $f(\bar{x})$ на Δ_k^ν , соответственно. Из (9) — (11) имеем

$$\int_{\Delta_k^\nu} R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} = 1.$$

Следовательно

$$\int_{\Delta_k^\nu} f(u) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} = f(\xi_\nu), \quad \xi_\nu \in \Delta_k^\nu. \quad (16)$$

Из (16) и из равномерной непрерывности $f(\bar{x})$ на T_m следует, что последовательность $\{\Phi_k^{(k)}(\bar{x})\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(\bar{x})$ на T_m .

Рассмотрим случай, когда $f(\bar{x}) \in L_q(T_m)$, $q > 1$. Сначала покажем, что

$$\|\Phi_k^{(p)}(\bar{x})\|_q \leq C \|f\|_q, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (17)$$

где $\|\cdot\|_q$ - норма в $L_q(T_m)$, а C - постоянная, зависящая от q и m .

Заметим, что согласно (7), (9), (10)

$$0 \leq R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j) \leq C \left(\frac{kp}{\pi} \right), \quad x_j \in \left[\frac{2\pi(\nu_j - 1)}{k}, \frac{2\pi\nu_j}{k} \right), \quad (18)$$

и, следовательно

$$0 \leq R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) \leq C^m \left(\frac{kp}{\pi} \right)^m, \quad \bar{x} \in \Delta_k^\nu. \quad (19)$$

Применяя неравенство Гельдера, из (12), (14) и (19) получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi_k^{(p)}(\bar{x})\|_q &= \left(\sum_\nu \int_{\Delta_k^\nu} |\Phi_k^{(p)}(\bar{x})|^q d\bar{x} \right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_\nu \left(\frac{2\pi}{k} \right)^m \left| \int_{\Delta_k^\nu} f(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} \right|^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq C^m \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{m/q} \left(\frac{kp}{\pi} \right)^m \left(\sum_\nu \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{m(q-1)} \int_{\Delta_k^\nu} |f(\bar{u})|^q d\bar{u} \right)^{1/q} = \\ &= C^m \left(\frac{2}{k} \right)^{m/q} (kp)^m \left(\frac{2}{k} \right)^{m(q-1)/q} \|f(\bar{x})\|_q = C(m, p) \|f(\bar{x})\|_q. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, неравенство (17) доказано.

Пусть $f(\bar{x}) \in L_q(T_m)$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем непрерывную функцию $\varphi(\bar{x})$ такую, что

$$\|f(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})\|_q < \varepsilon. \quad (21)$$

Для заданной функции $F(\bar{x})$ обозначим через $\Phi_k^{(p)}(F, \bar{x})$ средние, определенные (12) с $F(\bar{x})$ вместо $f(\bar{x})$. Имеем

$$\Phi_k^{(p)}(f - \varphi, \bar{x}) = \Phi_k^{(p)}(f, \bar{x}) - \Phi_k^{(p)}(\varphi, \bar{x}), \quad \|\Phi_k^{(p)}(f - \varphi, \bar{x})\|_q < C(m, p) \varepsilon \quad (22)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \|\Phi_k^{(p)}(f, \bar{x}) - f(\bar{x})\|_q &\leq \|\Phi_k^{(p)}(f, \bar{x}) - \Phi_k^{(p)}(\varphi, \bar{x})\|_q + \\ &+ \|\Phi_k^{(p)}(\varphi, \bar{x}) - \varphi(\bar{x})\|_q + \|\varphi(\bar{x}) - f(\bar{x})\|_q \leq \\ &\leq \varepsilon + C_q \varepsilon + \|\Phi_k^{(p)}(\varphi, \bar{x}) - \varphi(\bar{x})\|_q. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что третье слагаемое правой части (23) стремится к нулю, при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\Phi_k^{(p)}(\bar{x})$ сходится к $f(\bar{x})$ в метрике $L_q(T_m)$, когда $k \rightarrow \infty$.

Справедливость этого утверждения в случае $q = 1$ доказывается аналогично.

Лемма 2. Пусть $f(\bar{x})$ – интегрируемая на T_m функция и, пусть $k \geq 2$, $p \geq 2$ – натуральные числа. Тогда для любого интервала Δ_k^* имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k^*} S_N(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} = \int_{\Delta_k^*} f(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u}. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть

$$a_{\bar{n}} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) e^{-i\bar{n}\bar{u}} d\bar{u}, \quad (25)$$

где $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$, $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$ и

$$a_{n_j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{p\nu_j}^{(k)}(u_j) e^{-in_j u_j} du_j, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (26)$$

Для натурального N обозначим через $S'_N(\bar{x})$ кубические частные суммы ряда Фурье функции $R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x})$ и через $S'_N(x_j)$ – частные суммы ряда Фурье функции $R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j)$.

Из (11), (25) и (26) следует

$$S'_N(\bar{x}) = \sum_{|n_1| \leq N} \dots \sum_{|n_m| \leq N} a_{n_1} \dots a_{n_m} e^{in_1 x_1} \dots e^{in_m x_m} = \prod_{j=1}^m S'_N(x_j). \quad (27)$$

Каждая из последовательностей $\{S'_N(x_j)\}_{N=1}^{\infty}$, $1 \leq j \leq m$, равномерно сходится к $R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j)$, которая равна нулю на множестве $[0, 2\pi] \setminus \left[\frac{2\pi(\nu_j - 1)}{k}, \frac{2\pi\nu_j}{k} \right)$. Поэтому из (27) следует, что последовательность $\{S'_N(\bar{x})\}_{N=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x})$ на T_m . Последовательность $f(\bar{x})S'_N(\bar{x})$ сходится к $f(\bar{x})R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x})$ почти всюду и имеет интегрируемую мажоранту $M \cdot |f(\bar{x})|$, где $M > 0$ – постоянная. Следовательно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} f(\bar{x}) S'_N(\bar{x}) d\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k^*} f(\bar{x}) S'_N(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{\Delta_k^*} f(\bar{x}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (28)$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} f(\bar{x}) S'_N(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{|\bar{n}| \leq N} c_{-\bar{n}} a_{\bar{n}}, \quad (29)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} S_N(\bar{x}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) d\bar{x} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(\bar{x}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{|\bar{n}| \leq N} c_{\bar{n}} a_{-\bar{n}} \quad (30)$$

Правые части (29) и (30) - действительные числа, следовательно они равны.

Имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k^\nu} S_N(\bar{x}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) d\bar{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{T_m} f(\bar{x}) S'_N(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{\Delta_k^\nu} f(\bar{x}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (31)$$

Лемма 2 доказана.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное p такое, что для любой функции $f(\bar{x}) \in L_1(T_m)$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{\bar{x} \in T_m} |\Phi_k^{(p)}(\bar{x}) - \Psi_{k, [k(1+\varepsilon)]}^{(p)}(\bar{x})| = 0, \quad (32)$$

где функции $\Phi_k^{(p)}(\bar{x})$ и $\Psi_{k, [k(1+\varepsilon)]}^{(p)}(\bar{x})$ определены (12) и (13), соответственно.

Доказательство. Согласно (9) и (10) имеем

$$R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\sin q \frac{\pi}{kp}}{q \frac{\pi}{kp}} \right)^p \cos \left(x_j - \frac{\pi(2\nu_j - 1)}{k} q \right) \right), \quad (33)$$

или в комплексной форме

$$R_{p\nu_j}^{(k)}(x_j) = \frac{1}{2\pi} + \sum'_{n_j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin n_j \frac{\pi}{kp}}{n_j \frac{\pi}{kp}} \right)^p e^{in_j x_j} \exp \left(-in_j \frac{\pi(2\nu_j - 1)}{k} \right), \quad (34)$$

где $\sum'$ означает отсутствие члена с $n_j = 0$.

Пусть B - непустое подмножество множества $(1, 2, \dots, m)$, и пусть $\bar{n} = (n_1, \dots, n_m)$ - вектор с отличными от нуля целыми координатами. Определим вектор $\bar{n}_B = (n'_1, \dots, n'_m)$, где $n'_j = n_j$ при $j \in B$ и $n'_j = 0$ - в противном случае.

Для $B = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ обозначим

$$\alpha_{n(B)}(\Delta_k^\nu) = \prod_{j=1}^{|B|} \exp(-i\pi n_j (2\nu_j - 1) k^{-1}), \quad (35)$$

где $|B| = q$ - число элементов множества B .

Согласно (11) и (26) имеем

$$a_{\bar{n}} = \frac{1}{2\pi} \int_{T_m} R_{p\nu}^{(k)}(\bar{x}) e^{-i\bar{n}\bar{x}} d\bar{x} = \prod_{j=1}^m a_{n_j}, \quad (36)$$

$$a_{\bar{n}(B)} = \frac{1}{(2\pi)^{m-|B|}} \prod_{j \in B} a_{n_j}, \quad a_{\bar{0}} = \frac{1}{(2\pi)^m}, \quad (37)$$

где $\bar{0} = (0, \dots, 0)$.

При $n_j \neq 0$, в силу (34) имеем

$$a_{n_j} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \frac{\pi n_j}{kp}}{\frac{\pi n_j}{kp}} \right)^p \exp(-i\pi n_j(2\nu_j - 1)k^{-1}). \quad (38)$$

Из (30) и (35) - (38) получаем

$$\begin{aligned} \int_{T_m} S_N(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} &= (2\pi)^m \sum_{|\bar{n}| \leq N} c_{\bar{n}} a_{\bar{n}} = \\ &= c_{\bar{0}} + \sum_B (2\pi)^{|B|} \sum_{|\bar{n}_B| \leq N} \overline{\alpha_{\bar{n}(B)}(\Delta_k^v)} \prod_{j \in B} \left(\frac{\sin \frac{\pi |n_j|}{kp}}{\frac{\pi |n_j|}{kp}} \right)^p c_{\bar{n}(B)}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\sum_B$ - сумма, распространенная на все непустые множества $B \subset (1, 2, \dots, m)$.

Согласно лемме 2 получаем

$$\int_{\Delta_k^v} f(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} = c_{\bar{0}} + \sum_B (2\pi)^{|B|} \sum_{\bar{n}_B} \overline{\alpha_{\bar{n}(B)}(\Delta_k^v)} \prod_{j \in B} \left(\frac{\sin \frac{\pi |n_j|}{kp}}{\frac{\pi |n_j|}{kp}} \right)^p c_{\bar{n}(B)}. \quad (40)$$

Заметим, что при $p \geq 2$ все ряды правой части (40) абсолютно сходятся, так как

$|\overline{\alpha_{\bar{n}(B)}(\Delta_k^v)}| \leq 1$, коэффициенты Фурье $c_{\bar{n}(B)}$ равномерно ограничены и

$$\lim_{\max\{|n_j|, j \in B\} \rightarrow \infty} c_{\bar{n}(B)} = 0.$$

Для данного $B \subset (1, 2, \dots, m)$ обозначим через $Q(B)$ множество тех векторов $\bar{n}(B)$, для которых $|n_j| > N$ хотя бы для одного $j \in B$. Из (39) и (40) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k^v} f(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} - \int_{\Delta_k^v} S_N(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} = \\ = \sum_B (2\pi)^{|B|} \sum_{\bar{n}(B) \in Q_N(B)} c_{\bar{n}(B)} \overline{\alpha_{\bar{n}(B)}(\Delta_k^v)} \prod_{j \in B} \left(\frac{\sin \frac{\pi |n_j|}{kp}}{\frac{\pi |n_j|}{kp}} \right)^p. \end{aligned} \quad (41)$$

При оценке сверху модуля каждой из внутренних сумм, достаточно оценить соответствующую сумму для $B = (1, 2, \dots, q)$, $1 \leq q \leq m$. В этом случае $\bar{n}(B) = (n_1, n_2, \dots, n_q, 0, \dots, 0)$. Обозначив $c_{\bar{n}(B)} = c'_{n_1 n_2 \dots n_q}$, получим

$$\left| \sum_{\bar{n}(B) \in Q_N(B)} c_{\bar{n}(B)} \overline{\alpha_{\bar{n}(B)}(\Delta_k^N)} \prod_{j \in B} \left(\frac{\sin \frac{\pi |n_j|}{kp}}{\frac{\pi |n_j|}{kp}} \right)^p \right| \leq \leq \sum_{j=1}^q \left| \sum_{|n_j| > N} \sum_{l \neq j} \sum_{|n_l| \geq 1} |c'_{n_1 \dots n_q}| \frac{(kp)^{qp}}{\pi^{qp} |n_1^p| |n_2^p| \dots |n_q^p|} \right|. \quad (42)$$

Положим

$$\varepsilon_N = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{|n_j| > N} |c_{n_1 \dots n_m}|, \quad (43)$$

где внутренний максимум берется по всем n_l , $l \neq j$. Для оценки правой части (42) достаточно оценить модуль внутренней суммы при $j = 1$. Имеем

$$\left| \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=1}^{\infty} \dots \sum_{|n_q|=1}^{\infty} |c'_{n_1 \dots n_q}| \frac{(kp)^{qp}}{\pi^{qp} |n_1^p| \dots |n_q^p|} \right| \leq \frac{2C}{p-1} \varepsilon_N \frac{(kp)^{mp}}{\pi^{mp}} \frac{1}{N^{p-1}}, \quad (44)$$

где $p \geq 2$, $k \geq 2$

$$C = \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{2}{l^2} \right)^{m-1}.$$

Из (41) — (44) следует

$$\left| \int_{\Delta_k^N} f(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} - \int_{\Delta_k^N} S_N(\bar{u}) R_{p\nu}^{(k)}(\bar{u}) d\bar{u} \right| \leq M \frac{(kp)^{mp}}{(p-1)\pi^{mp}} \frac{1}{N^{p-1}} \varepsilon_N, \quad (45)$$

для всех $p \geq 2$, $k \geq 2$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$, где

$$M = m2^{m+1} \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l^2} \right)^m (2\pi)^m.$$

Следовательно (см. (12), (13)) имеем

$$\max_{\bar{x} \in T_m} |\Phi_k^{(p)}(\bar{x}) - \Psi_{k,N}^{(p)}(\bar{x})| \leq M \frac{(kp)^{mp}}{(p-1)\pi^{mp}} \frac{1}{N^{p-1}} \varepsilon_N, \quad (46)$$

для всех $p \geq 2$, $k \geq 2$, $N \geq 2$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Полагая $N = [k^{(1+\varepsilon)^m}]$ и учитывая неравенство $k^{(1+\varepsilon)^m} + 1 >$

$> k^{(1+\varepsilon)m}$, из (46) получаем

$$\begin{aligned} \max_{\bar{x} \in T_m} |\Phi_k^{(p)}(\bar{x}) - \Psi_{k,N}^{(p)}(\bar{x})| &\leq \frac{M(kp)^{mp} \varepsilon_{[k(1+\varepsilon)m]}}{(p-1)\pi^{mp} k^{(1+\varepsilon)m(p-1)}} \leq \\ &\leq \frac{M p^p}{(p-1)\pi^{mp}} \cdot \frac{1}{k^{(1+\varepsilon)m(p-1)-mp}} \cdot \varepsilon_{[k(1+\varepsilon)m]}. \end{aligned} \quad (47)$$

Пусть p такое, что $(1+\varepsilon)m(p-1) - mp > \alpha > 0$, тогда для целого $p \geq 2$, удовлетворяющего неравенству $p > 1 + \varepsilon^{-1} + \alpha/(m\varepsilon)$, имеем

$$\max_{\bar{x} \in T_m} |\Phi_k^{(p)}(\bar{x}) - \Psi_{k,[k(1+\varepsilon)m]}^{(p)}(\bar{x})| < \frac{M p^p}{(p-1)\pi^{mp}} \frac{1}{k^\alpha} \varepsilon_{[k(1+\varepsilon)m]}, \quad (48)$$

для всех $k \geq 2$.

Так как $\varepsilon_{[k(1+\varepsilon)m]} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то для указанных p правая часть (48) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает следующая теорема.

Пусть $L_\infty(T_m)$ – пространство 2π -периодических непрерывных функций.

Теорема 2. Для любых $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ и $p > 1 + \varepsilon^{-1} + \alpha/(m\varepsilon)$, где p – натуральное число, и для любой $f(\bar{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|f(\bar{x}) - \Psi_{k,[k(1+\varepsilon)m]}^{(p)}(\bar{x})\|_q \leq \frac{M \cdot p^p}{(p-1)\pi^{mp}} \frac{1}{k^\alpha} \varepsilon_{[k(1+\varepsilon)m+1]} + \|f(\bar{x}) - \Phi_k^{(p)}(\bar{x})\|_q \quad (49)$$

для всех k и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(\bar{x}) - \Psi_{k,[k(1+\varepsilon)m]}^{(p)}(\bar{x})\|_q = 0. \quad (50)$$

§3. СЛУЧАЙ $m = 2$, $p = 1$

Теперь докажем одну теорему о приближении обычных интегральных средних функций из L_2 интегральными средними частными сумм ее ряда Фурье. Обычные интегральные средние получаются из интегральных средних Римана порядка p при $p = 1$. Для простоты выкладок рассмотрим двумерный случай, а интегральные средние будем брать на интервалах

$$\Delta_k^y(\bar{t}) = \left[t_1 + \frac{2\pi(\nu_1 - 1)}{k}, t_1 + \frac{2\pi\nu_1}{k} \right) \times \left[t_2 + \frac{2\pi(\nu_2 - 1)}{k}, t_2 + \frac{2\pi\nu_2}{k} \right),$$

и $\Delta_k^v(\bar{0}) = \Delta_k^v$, где k - натуральное число, $v = (\nu_1, \nu_2)$, $1 \leq \nu_1 \leq k$, $1 \leq \nu_2 \leq k$, $t = (t_1, t_2) \in T_2$. Имеем

$$T_2(t) = [t_1, t_1 + 2\pi) \times [t_2, t_2 + 2\pi), \quad T_2(\bar{0}) = T_2.$$

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $f(\bar{x}) \in L_2(T_2)$ периодична с периодом 2π по каждой из переменных x_1, x_2 , и пусть ряд .

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{n}} c_{\bar{n}} e^{i\bar{n}\bar{x}} &= c_{00} + \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} c_{n_1 0} e^{in_1 x_1} + \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{0 n_2} e^{in_2 x_2} + \\ &+ \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} c_{n_1 n_2} e^{i(n_1 x_1 + n_2 x_2)} \end{aligned} \quad (51)$$

является рядом Фурье функции $f(\bar{x})$, т. е.

$$c_{\bar{n}} = c_{n_1 n_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) e^{-in_1 x_1} e^{-in_2 x_2} dx_1 dx_2. \quad (52)$$

Квадратичные частные суммы $S_N(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} S_N(x) = S_N(x_1, x_2) &= c_{00} + \sum_{n_1=-N}^N c_{n_1 0} e^{in_1 x_1} + \sum_{n_2=-N}^N c_{0 n_2} e^{in_2 x_2} + \\ &+ \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N c_{n_1 n_2} e^{in_1 x_1} \cdot e^{in_2 x_2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\Delta_k^v(t)|} \int_{\Delta_k^v(\bar{0})} S_N(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ &= \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{t_1 + \frac{2\pi(\nu_2-1)}{k}}^{t_1 + \frac{2\pi\nu_1}{k}} \int_{t_2 + \frac{2\pi(\nu_2-1)}{k}}^{t_2 + \frac{2\pi\nu_2}{k}} S_N(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ &= c_{00} + \frac{k}{2\pi} \sum_{n_1=-N}^N \frac{c_{n_1 0}}{in_1} \alpha(n_1, k, \nu_1) e^{in_1 t_1} + \frac{k}{2\pi} \sum_{n_2=-N}^N \frac{c_{0 n_2}}{in_2} \alpha(n_2, k, \nu_2) e^{in_2 t_2} + \\ &+ \frac{k^2}{4\pi^2} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \frac{c_{n_1 n_2}}{in_1 n_2} \alpha(n_1, k, \nu_1) \alpha(n_2, k, \nu_2) e^{in_1 t_1} e^{in_2 t_2} = \\ &= c_{00} + \sum_{n_1=-N}^N \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right) c_{n_1 0} \beta(n_1, \nu_1, k) e^{in_1 t_1} + \\ &+ \sum_{n_2=-N}^N \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right) c_{0 n_2} \beta(n_2, \nu_2, k) e^{in_2 t_2} + \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \gamma_{n_1 n_2} \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\alpha(n, k, j) = \exp\left(in \frac{2\pi j}{k}\right) - \exp\left(in \frac{2\pi(j-1)}{k}\right) = 2i \sin\left(n \frac{\pi}{k}\right) \exp\left(in \frac{\pi(2j-1)}{k}\right),$$

$$\beta(n, j, k) = \exp\left(in \frac{\pi(2j-1)}{k}\right),$$
(55)

и

$$\gamma(n_1, n_2) = c_{n_1 n_2} \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}}\right) \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}}\right) \beta(n_2, \nu_1, k) \beta(n_2, \nu_2, k) e^{in_1 t_1} e^{in_2 t_2}.$$

Легко проверить, что утверждение леммы 2 верно и для $p = 1$ (см. [2], стр. 4), т.

е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta_k^{\nu}(\bar{t})|} \int_{\Delta_k^{\nu}(\bar{t})} S_N(u_1, u_2) du_1 du_2 =$$

$$= \frac{1}{|\Delta_k^{\nu}(\bar{t})|} \int_{\Delta_k^{\nu}(\bar{t})} f(u_1, u_2) du_1 du_2 = c_{00} + \sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}}\right) c_{n_1 0} \beta(n_1, \nu_1, k) e^{in_1 t_1} +$$

$$+ \sum'_{n_2=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}}\right) c_{0 n_2} \beta(n_2, \nu_2, k) e^{in_2 t_2} + \sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum'_{n_2=-\infty}^{\infty} \gamma_{n_1 n_2}.$$
(56)

Заметим, что для каждого фиксированного k ряды правой части (56) абсолютно сходятся, так как $|\beta(n, j, k)| \leq 1$ и

$$\sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} |c_{n_1 0}|^2 < +\infty, \quad \sum'_{n_2=-\infty}^{\infty} |c_{0 n_2}|^2 < +\infty, \quad \sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum'_{n_2=-\infty}^{\infty} |c_{n_1 n_2}|^2 < +\infty.$$

Для $\bar{t} = (t_1, t_2)$ и $\bar{x} \in \Delta_k^{\nu}(\bar{t})$ на квадрате $T_2(\bar{t}) = [t_1, t_1 + 2\pi) \times [t_2, t_2 + 2\pi)$ определим кусочно-постоянные функции :

$$\Phi_k(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{1}{|\Delta_k^{\nu}(\bar{t})|} \int_{\Delta_k^{\nu}(\bar{t})} f(u_1, u_2) du_1 du_2 = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\Delta_k^{\nu}(\bar{t})} f(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (57)$$

$$\Psi_N(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{1}{|\Delta_k^{\nu}(\bar{t})|} \int_{\Delta_k^{\nu}(\bar{t})} S_N(u_1, u_2) du_1 du_2 = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{\Delta_k^{\nu}(\bar{t})} S_N(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (58)$$

Согласно (55) и (56) имеем для всех $\bar{x} \in \Delta_k^{\nu}(\bar{t})$

$$\Phi_k(\bar{t}, \bar{x}) - \Psi_N(\bar{t}, \bar{x}) = \sum_{|n_1| > N} \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}}\right) c_{n_1 0} \beta(n_1, \nu_1, k) e^{in_1 t_1} +$$

$$+ \sum_{|n_2| > N} \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}}\right) c_{0 n_2} \beta(n_2, \nu_2, k) e^{in_2 t_2} + \sum_{|n_1| > N} \sum_{|n_2| > N} \gamma(n_1, n_2) +$$

$$+ \sum_{|n_1|=1}^N \sum_{|n_2| > N} \gamma(n_1, n_2) + \sum_{|n_1| > N} \sum_{|n_2|=1}^N \gamma(n_1, n_2).$$
(59)

Теорема 3. Пусть $f(\bar{x}) \in L_2(T_2)$, и пусть (51) является рядом Фурье функции $f(\bar{x})$ по двойной системе $e^{im\bar{x}}$. Тогда

$$\int_{T_2} \left(\int_{T_2(i)} |\Phi_k(\bar{i}, \bar{x}) - \Psi_{k^2}(\bar{i}, \bar{x})|^2 d\bar{x} \right) dt \leq 16\pi^2 \left(\sum_{|n_1| > k^2} |c_{n_1 0}|^2 + \sum_{|n_2| > k^2} |c_{0 n_2}|^2 + \sum_{|n_1|=1}^{k^2} \sum_{|n_2| > k^2} |c_{n_1 n_2}|^2 + \sum_{|n_1| > k^2} \sum_{|n_2|=1}^{k^2} |c_{n_1 n_2}|^2 + \sum_{|n_1| > k^2} \sum_{|n_2| > k^2} |c_{n_1 n_2}|^2 \right) \quad (60)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T_2} \left(\int_{T_2(i)} |\Phi_k(\bar{i}, \bar{x}) - \Psi_{k^2}(\bar{i}, \bar{x})|^2 d\bar{x} \right) dt = 0, \quad (61)$$

где $\Phi_k(\bar{i}, \bar{x})$ определена равенством (57) и $\Psi_{k^2}(\bar{i}, \bar{x})$ определена (58) для $N = k^2$.

Доказательство. Обозначим через $Q_{N,k}^{(\nu)}(t)$ правую часть (59). Заметим, что модули чисел $\beta(n, \nu, k)$ равны 1 (см. (55)), а интервалы $\Delta_k^\nu(\bar{i})$ попарно непересекаются и $\bigcup_\nu \Delta_k^\nu(\bar{i}) = T_2(\bar{i})$. Следовательно, используя (59), получим

$$\begin{aligned} & \int_{T_2} \left(\int_{T_2(i)} |\Phi_k(\bar{i}, \bar{x}) - \Psi_N(\bar{i}, \bar{x})|^2 d\bar{x} \right) dt = \\ & = \int_{T_2} \left(\sum_\nu \int_{\Delta_k^\nu(\bar{i})} |\Phi_k(\bar{i}, \bar{x}) - \Psi_N(\bar{i}, \bar{x})|^2 d\bar{x} \right) dt = \\ & = \int_{T_2} \left(\sum_\nu \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 |Q_{N,k}^{(\nu)}(t)|^2 \right) dt = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^2 \sum_\nu \int_{T_2} |Q_{N,k}^{(\nu)}(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (62)$$

Так как сумма квадратов модулей коэффициентов

$$\left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right) c_{n_1 0}, \quad \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right) c_{0 n_2}, \quad \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right) \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right) c_{n_1 n_2}$$

сходится, получаем, что правая часть (59) является рядом Фурье функции $Q_{k,N}^\nu$ по системе $e^{im\bar{i}}$ и $Q_{k,N}^\nu \in L_2(T_2)$.

Используя равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4\pi^2} \int_{T_2} |Q_{N,k}^{(\nu)}(t)|^2 dt = \\
 & = \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right)^2 |c_{n_1 0}|^2 + \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right)^2 |c_{0 n_2}|^2 + \\
 & + \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right)^2 \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right)^2 |c_{n_1 n_2}|^2 + \\
 & + \sum_{|n_1|=1}^N \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right)^2 \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right)^2 |c_{n_1 n_2}|^2 + \\
 & + \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=1}^N \left(\frac{\sin n_1 \frac{\pi}{k}}{n_1 \frac{\pi}{k}} \right)^2 \left(\frac{\sin n_2 \frac{\pi}{k}}{n_2 \frac{\pi}{k}} \right)^2 |c_{n_1 n_2}|^2.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Обозначим через A_1 -- A_5 , соответственно, суммы в правой части (63) и оценим каждую из A_i сверху. Имеем

$$A_1 = \left(\frac{k}{\pi} \right)^2 \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \left(\sin n_1 \frac{\pi}{k} \right)^2 \frac{|c_{n_1 0}|^2}{|n_1|^2} \leq \left(\frac{k}{\pi} \right)^2 \frac{1}{N^2} \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} |c_{n_1 0}|^2, \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \left(\frac{k}{\pi} \right)^4 \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} \frac{(\sin n_1 \frac{\pi}{k})^2 (\sin n_2 \frac{\pi}{k})^2}{n_1^2 n_2^2} |c_{n_1 n_2}|^2 \leq \\
 &\leq \left(\frac{k}{\pi} \right)^4 \frac{1}{N^4} \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} |c_{n_1 n_2}|^2,
 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
 A_4 &= \left(\frac{k}{\pi} \right)^4 \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=1}^N \frac{(\sin n_1 \frac{\pi}{k})^2 (\sin n_2 \frac{\pi}{k})^2}{n_1^2 n_2^2} |c_{n_1 n_2}|^2 \leq \\
 &\leq \left(\frac{k}{\pi} \right)^4 \frac{1}{N^2} \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=1}^N |c_{n_1 n_2}|^2,
 \end{aligned} \tag{66}$$

$$A_5 \leq \left(\frac{k}{\pi} \right)^4 \frac{1}{N^2} \sum_{|n_1|=1}^N \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} |c_{n_1 n_2}|^2, \tag{67}$$

$$A_2 \leq \left(\frac{k}{\pi} \right)^2 \frac{1}{N^2} \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} |c_{0 n_2}|^2.$$

Из (62) и (63), учитывая (64) - (67), получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{T_2} \left(\int_{T_2(\bar{t})} |\Phi_k(\bar{t}, \bar{x}) - \Psi_k(\bar{t}, \bar{x})|^2 d\bar{x} \right) d\bar{t} \leq \\
 & \leq 16\pi^2 \frac{k^2}{N^2} \left(\sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} |c_{n_1 0}|^2 + \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} |c_{0 n_2}|^2 \right) + \frac{16k^4}{N^2} \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=1}^N |c_{n_1 n_2}|^2 +
 \end{aligned}$$

$$+\frac{16k^4}{N^2} \left(\sum_{|n_1|=1}^N \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} |c_{n_1 n_2}|^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{|n_1|=N+1}^{\infty} \sum_{|n_2|=N+1}^{\infty} |c_{n_1 n_2}|^2 \right). \quad (68)$$

Из (68) с $N = k^2$ следует (60). Теорема 3 доказана.

ABSTRACT. For functions of several variables we estimate the difference between certain Riemann integral means and similar means for cubic partial sums of their Fourier series.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., Наука, 1965.
2. Н. А. Талалаян, "О приближении случайных интегральных средних интегральными средними частных сумм рядов Фурье", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 1, стр. 24 - 37, 1993.

28 ноября 1994

Ереванский государственный университет