ОБ ОДНОМ ЛИНЕЙНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. А. Талалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

В настоящей работе путем подходящего выбора последовательностей векторов $\overline{h} = (h_1, ..., h_m)$, $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$ определяется линейный метод суммирования, равномерно суммирующий кубические и сферические средние частных сумм рядов Фурье функции $f \in \mathbf{C}(T_m)$.. Дается оценка сверху отклонения этих частных сумм от $f(\overline{x})$ в терминах модуля непрерывности $\omega(f;\overline{\delta})$. Аналогичные результаты доказываютая для пространств $L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Введем следующие обозначения :

$\mathbb{R}^m$ – m–мерное вещественное евклидово пространство; $\overline{x} = (x_1, ..., x_m)$, $\overline{t} = (t_1, ..., t_m)$ – элементы пространства $\mathbb{R}^m$; $\overline{n} = (n_1, ..., n_m) \in \mathbb{R}^m$ обозначает векторы с целочисленными координатами; $T_m = [-\pi, \pi)^m$ – m–кратное декартово произведение интервала $[-\pi, \pi)$; $\overline{n} \cdot \overline{x} = n_1 x_1 + ... + n_m x_m$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$ векторов $\overline{n}$ и $\overline{x}$; $\overline{N} = (N_1, ..., N_m)$ – вектор с натуральными координатами; $\mathbf{C}(T_m)$ – класс 2π–периодических по каждой переменной, непрерывных на T_m функций $f(\overline{x})$; $L_q(T_m)$ – класс 2π–периодических по каждой переменной, интегрируемых на T_m в степени q $(1 \leq q < \infty)$ функций $f(\overline{x})$; $\|f\|_\infty$ и $\|f\|_q$ – нормы в пространствах $\mathbf{C}(T_m)$ и $L_q(T_m)$ соответственно.

Для заданного $\overline{\delta} = (\delta_1, ..., \delta_m)$, $\delta_j > 0$, $1 \leq j \leq m$, обозначим через $\omega(f;\overline{\delta})$ и $\omega^{(q)}(f;\overline{\delta})$ модули непрерывности в $\mathbf{C}(T_m)$ и $L_q(T_m)$, соответственно :

$$\omega(f;\overline{\delta}) = \sup_{\substack{\overline{x}, |h_j| \leq \delta_j \\ 1 \leq j \leq m}} |f(x_1 + h_1, ..., x_m + h_m) - f(x_1, ..., x_m)|,$$

$$\omega^{(q)}(f;\overline{\delta}) = \sup_{\substack{|h_j|\le\delta_j\\ 1\le j\le m}} \|f(x_1+h_1,...,x_m+h_m) - f(x_1,...,x_m)\|_q.$$

Ряд Фурье функции $f \in L_1(T_m)$ пишется в виде

$$\sum_{\overline{n}} c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} ... \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} c_{n_1...n_m} e^{in_1x_1} ... e^{in_mx_m}, \tag{1.1}$$

где

$$c_{\overline{n}} = c_{n_1...n_m} = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{T_m} f(\overline{x})\, e^{-i\overline{n}\,\overline{x}}\, d\overline{x} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\pi}^{\pi} ... \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1,..,x_m)\, e^{-in_1x_1} ... e^{-in_mx_m}\, dx_1...dx_m \tag{1.2}$$

- коэффициенты Фурье.

Для заданного натурального вектора $\overline{N}$ обозначим через $S_{\overline{N}}(f,\overline{x})$ прямоугольные частные суммы ряда (1.1) :

$$S_{\overline{N}}(f,\overline{x}) = \sum_{|\overline{n}|\le|\overline{N}|} c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} ... \sum_{n_m=-N_m}^{N_m} c_{n_1...n_m} e^{in_1x_1} ... e^{in_mx_m}. \tag{1.3}$$

Здесь и ниже запись $|\overline{n}| \le |\overline{N}|$ и $|\overline{n}| > |\overline{N}|$ означают $|n_j| \le |N_j|$ и $|n_j| > |N_j|$ для всех $1 \le j \le m$, соответственно.

В частности, если $\overline{N} = (N,...,N)$, где N - натуральное число, то кубические частные суммы $S_{\overline{N}}(f,\overline{x})$ будем обозначать через $S_N(f,\overline{x})$.

Пусть $\overline{p} = (p_1,...,p_m)$, $\overline{h} = (h_1,...,h_m)$, где p_j – натуральные числа, $h_j > 0$, $1 \le j \le m$ и

$$p_j \ge 2, \qquad p_jh_j \le \pi, \quad 1 \le j \le m. \tag{1.4}$$

Положим

$$\Delta(\overline{p},\overline{h}) = [-p_1h_1, p_1h_1] \times ... \times [-p_mh_m, p_mh_m], \tag{1.5}$$

$$R_{h_j}^{(p_j)}(x_j) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{n_j=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{\sin(n_jh_j)}{n_jh_j}\right)^{p_j} e^{in_jx_j}\right), \qquad 1 \le j \le m, \tag{1.6}$$

$$R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{x}) = \prod_{j=1}^{m} R_{h_j}^{(p_j)}(x_j), \tag{1.7}$$

где $\sum'$ означает отсутствие в сумме члена с $n_j = 0$.

Известно (см. [1], p. 364), что функция $R_{h_j}^{(p_j)}(x_j)$ обладает следующими свойствами :

$$R_{h_j}^{(p_j)}(x_j) \geq 0, \qquad x_j \in [-p_j h_j, p_j h_j], \tag{1.8}$$

$$R_{h_j}^{(p_j)}(x_j) = 0, \qquad x_j \in [-\pi, \pi] \setminus [-p_j h_j, p_j h_j]. \tag{1.9}$$

Следовательно, согласно (1.5) и (1.7) имеем

$$R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{x}) \geq 0, \quad \overline{x} \in \Delta(\overline{p}, \overline{h}) \quad \text{и} \quad R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{x}) = 0, \quad \overline{x} \in T_m \setminus \Delta(\overline{p}, \overline{h}). \tag{1.10}$$

Из (1.6) — (1.10) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_{h_j}^{(p_j)}(x_j)\, dx_j = \int_{-p_j h_j}^{p_j h_j} R_{h_j}^{(p_j)}(x_j)\, dx_j = 1, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{1.11}$$

$$\int_{T_m} R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x})\, d\overline{x} = \int_{\Delta(\overline{p}, \overline{h})} R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x})\, d\overline{x} = 1. \tag{1.12}$$

Обозначив через $a_{\overline{n}} = a_{n_1 \dots n_m}$ коэффициенты Фурье функции $R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x})$, из (1.6) и (1.7) будем иметь

$$a_{\overline{n}} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T_m} R_{\overline{h}}^{(\overline{P})}(\overline{x}) e^{-i\overline{n}\,\overline{x}}\, d\overline{x} = \frac{1}{(2\pi)^m} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} e^{i n_j x_j}, \tag{1.13}$$

где в правой части (1.13) сомножители с $n_j = 0$ считаются равным 1.

Рассмотрим интегральные средние

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \int_{T_m} f(\overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t} = \int_{\Delta(\overline{p}, \overline{h})} f(\overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t}, \tag{1.14}$$

$$F_{\overline{h}, \overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \int_{T_m} S_{\overline{N}}(f, \overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t} = \int_{\Delta(\overline{p}, \overline{h})} S_{\overline{N}}(f, \overline{x} - \overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t}. \tag{1.15}$$

Заметим, что вторые равенства в (1.14) и (1.15) следуют из (1.10).

В дальнейшем при $\overline{N} = (N, \dots, N)$ вместо $F_{\overline{h}, \overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x})$ будем использовать обозначение $F_{\overline{h}, N}^{(\overline{p})}(f, \overline{x})$.

Из (1.13) следует, что ряд Фурье функции $R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})$ сходится абсолютно и равномерно. Поэтому, в силу (1.14) имеем

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} \right] c_{n_1 \dots n_m} e^{i n_1 x_1} \dots e^{i n_m x_m}. \tag{1.16}$$

Правая часть (1.16) является рядом Фурье функции $\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$, который сходится абсолютно и равномерно, так как $p_j \geq 2$.

Аналогично имеем

$$F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x}) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \dots \sum_{n_m=-N_m}^{N_m} \left[\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j}\right)^{p_j}\right] c_{n_1 \dots n_m} e^{in_1x_1} \dots e^{in_mx_m}. \tag{1.17}$$

Из (1.10), (1.12), (1.14), (1.15) и теоремы о среднем значении интеграла от непрерывной функции получаем

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x}) = f(\overline{x}+\overline{\xi}(\overline{x})), \quad \overline{\xi}(\overline{x}) = (\xi_1(\overline{x}),\dots,\xi_m(\overline{x})) \in \Delta(\overline{p},\overline{h}), \tag{1.18}$$

$$F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x}) = S_{\overline{N}}(f,\overline{x}+\overline{\eta}(\overline{x})), \quad \overline{\eta}(\overline{x}) = (\eta_1(\overline{x}),\dots,\eta_m(\overline{x})) \in \Delta(\overline{p},\overline{h}). \tag{1.19}$$

В настоящей работе путем подходящего выбора последовательностей векторов $\overline{h} = (h_1,\dots,h_m)$, $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$ мы определяем линейный метод суммирования, равномерно суммирующий кубические и сферические средние частных сумм рядов Фурье функций $f \in \mathbf{C}(T_m)$.. Мы приводим оценку сверху отклонения этих частных сумм от $f(\overline{x})$ в терминах модуля непрерывности $\omega(f;\overline{\delta})$. Аналогичные результаты доказываютая также для пространств $L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $M = \{1,\dots,m\}$, и пусть B -подмножество M такое, что $B \neq \emptyset$ и $B \neq M$. Элементы множества B в возрастающем порядке обозначим через $j_\nu(B)$, $1 \leq \nu \leq$ $\leq |B|$, где $|B|$ – число элементов B. Через $j_\nu(B^c)$ обозначим также в возрастающем порядке, элементы множества $B^c = M \setminus B$. Для $B \subseteq M$ положим

$$\overline{x}(B) = (x_{j_1(B)},\dots,x_{j_{|B|}(B)}), \qquad \overline{x}(M) = (x_1,\dots,x_m) \tag{2.1}$$

и

$$a(\overline{n}(B),\overline{h}(B),\overline{p}(B)) = \prod_{j\in B} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j}\right)^{p_j} =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{|B|} \left(\frac{\sin(n_{j_\nu(B)} h_{j_\nu(B)})}{n_{j_\nu(B)} h_{j_\nu(B)}} \right)^{p_{j_\nu(B)}} . \tag{2.2}$$

В этих обозначениях, для любого $B \subset M$, $B \neq \emptyset$, $B \neq M$ имеем

$$a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p}) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\sin(n_j h_j)}{n_j h_j} \right)^{p_j} =$$

$$= a(\overline{n}(B), \overline{h}(B), \overline{p}(B)) \cdot a(\overline{n}(B^c), \overline{h}(B^c), \overline{p}(B^c)). \tag{2.3}$$

Для $B \subset M$ и $b_{\overline{n}} = b_{n_1 \dots n_m}$, будем обозначать

$$\sum_{|\overline{n}(B^c)| \leq \overline{N}(B^c)} \sum_{|\overline{n}(B)| > \overline{N}(B)} b_{\overline{n}} =$$
$$= \sum_{n_{j_1(B^c)} \leq N_{j_1(B^c)}} \dots \sum_{n_{j_{|B^c|}(B^c)} \leq N_{j_{|B^c|}(B^c)}} \sum_{n_{j_1(B)} > N_{j_1(B)}} \dots \sum_{n_{j_{|B|}(B)} \leq N_{j_{|B|}(B)}} b_{\overline{n}}. \tag{2.4}$$

Нетрудно убедиться, что из (1.16) и (1.17) следует

$$\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) - F_{\overline{h}, \overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) = \sum_{|\overline{n}| > \overline{N}} a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p}) c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}} +$$

$$+ \sum_{B \subset M} \sum_{|\overline{n}(B^c)| \leq \overline{N}(B^c)} \sum_{|\overline{n}(B)| > \overline{N}(B)} a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p}) c_{\overline{n}} e^{i\overline{n}\,\overline{x}}, \tag{2.5}$$

где сумма $\sum\limits_{B \subset M}$ распространяется на все непустые подмножества $B \subset M$, $B \neq M$.

Сначала мы докажем две леммы. Обозначим

$$\varepsilon_{\overline{N}(M)} = \sup\{|c_{\overline{n}}| : |\overline{n}| > \overline{N}\}, \qquad \varepsilon_{\overline{N}(B)} = \sup\{|c_{\overline{n}}| \colon |n_j| > N_j, j \in B\}. \tag{2.6}$$

Лемма 1. *Для всех $f \in L(T_m)$, $\overline{N}$, $\overline{h}$ и $\overline{p}$, удовлетворяющих условию (1.4), имеет место неравенство*

$$\|\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x}) - F_{\overline{h}, \overline{N}}^{(\overline{p})}(f, \overline{x})\| \leq \sum_{|\overline{n}| > \overline{N}} |a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p})| |c_{\overline{n}}| +$$

$$+ \sum_{B \subset M} \sum_{|\overline{n}(B^c)| \leq \overline{N}(B^c)} \sum_{|\overline{n}(B)| > \overline{N}(B)} |a(\overline{n}, \overline{h}, \overline{p})| |c_{\overline{n}}| \leq \tag{2.7}$$

$$\leq \frac{2^m \varepsilon_{\overline{N}(M)}}{\prod\limits_{j=1}^{m} \left[h_j^{p_j} N_j^{p_j - 1} (p_j - 1) \right]} + \sum_{B \subset M} 2^{|B|} \varepsilon_{\overline{N}(B)} \frac{\prod\limits_{j \in B^c} (2N_j + 1)}{\prod\limits_{j \in B} \left[h_j^{p_j} N_j^{p_j - 1} (p_j - 1) \right]}.$$

Доказательство. Первое неравенство в (2.7) немедленно следует из (2.5), поэтому нам нужно проверить только второе неравенство. Из (2.2), (2.3) и (2.6) следует

$$\sum_{|\overline{n}(B^c)|\le\overline{N}(B^c)}\ \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})|\,|c_{\overline{n}}| \le \varepsilon_{\overline{N}(B)}\times \tag{2.8}$$

$$\times \sum_{|\overline{n}(B^c)|\le\overline{N}(B^c)}\ \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n}(B),\overline{h}(B),\overline{p}(B))|\cdot|a(\overline{n}(B^c),\overline{h}(B^c),\overline{p}(B^c))|.$$

Очевидно

$$|a(\overline{n}(B^c),\overline{h}(B^c),\overline{p}(B^c))| = \prod_{j\in B^c}\left|\frac{\sin(n_jh_j)}{n_jh_j}\right|^{p_j} \le 1, \tag{2.9}$$

$$|a(\overline{n}(B),\overline{h}(B),\overline{p}(B))| = \prod_{j\in B}\left|\frac{\sin(n_jh_j)}{n_jh_j}\right|^{p_j} \le$$

$$\le \prod_{j\in B}\frac{1}{|n_j|^{p_j}h_j^{p_j}} = \prod_{\nu=1}^{|B|}\frac{1}{|n_{j_\nu(B)}h_{j_\nu(B)}|^{p_{j_\nu(B)}}}. \tag{2.10}$$

Поэтому

$$\sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})| \le \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n}(B),\overline{h}(B),\overline{p}(B))| \le$$

$$\le \sum_{n_{j_1(B)}>N_{j_1(B)}}\cdots\sum_{n_{j_{|B|}(B)}\le N_{j_{|B|}(B)}}\prod_{\nu=1}^{|B|}\frac{1}{|n_{j_\nu(B)}h_{j_\nu(B)}|^{p_j}}. \tag{2.11}$$

Для всех $h>0$, $p>1$ и для натурального N имеем

$$\sum_{|n|>N}\frac{1}{n^ph^p} \le \frac{2}{h^pN^{p-1}(p-1)}. \tag{2.12}$$

Применяя эту оценку поочередно к каждой сумме правой части (2.11), получим

$$\sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})| \le 2^{|B|}\prod_{j\in B}\frac{1}{h_j^{p_j}N_j^{p_j-1}(p_j-1)}. \tag{2.13}$$

Из (2.9) и (2.13) следует

$$\sum_{|\overline{n}(B^c)|\le\overline{N}(B^c)}\ \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}(B)} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})||c_{\overline{n}}| \le$$

$$\le 2^{|B|}\varepsilon_{\overline{N}(B)}\prod_{j\in B^c}(2N_j+1)\left(\prod_{j\in B}h_j^{p_j}N_j^{p_j-1}(p_j-1)\right)^{-1}. \tag{2.14}$$

Аналогично получаем

$$\sum_{|\overline{n}|>\overline{N}} |a(\overline{n},\overline{h},\overline{p})||c_{\overline{n}}| \le 2^{|M|}\varepsilon_{\overline{N}(M)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} h_j^{p_j} N_j^{p_j-1}(p_j-1)}. \tag{2.15}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $\overline{h}$ и $\overline{p}$ – натуральные числа, удовлетворяющие условию (1.4), то для всех $f(\overline{x}) \in \mathbf{C}(T_m)$ и $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$ имеют место, соответственно, неравенства*

$$\|f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})\| = \sup_{\overline{x}\in\mathbb{R}^m} |f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})| \le \omega(f;p_1h_1,...,p_mh_m), \tag{2.16}$$

$$\|f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})\|_q = \left(\int_{T_m} |f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})|^q \, d\overline{x}\right)^{1/q} \le$$

$$\le \omega^{(q)}(f;p_1h_1,...,p_mh_m). \tag{2.17}$$

Доказательство. Неравенство (2.16) следует из (1.5), (1.18) и из определения модуля непрерывности $\omega(f;\overline{\delta})$. Докажем, что неравенство (2.17) следует из свойств (1.10), (1.12) и (1.14) функции $\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$. Применяя обобщенное неравенство Минковского получаем

$$\|f(\overline{x}) - \Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})\|_q =$$

$$= \left(\int_{T_m} \left|\int_{T_m} f(\overline{x}) R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t} - \int_{T_m} f(\overline{x}-\overline{t})\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t}\right|^q d\overline{x}\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\int_{T_m} \left(\int_{\Delta(\overline{p},\overline{h})} |f(\overline{x}-\overline{t}) - f(\overline{x})|\, R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, d\overline{t}\right)^q d\overline{x}\right)^{1/q} \le$$

$$\le \int_{\Delta(\overline{p},\overline{h})} R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t}) \left(\int_{T_m} |f(\overline{x}-\overline{t}) - f(\overline{x})|^q \, d\overline{x}\right)^{1/q} d\overline{t} \le$$

$$\le \int_{\Delta(\overline{p},\overline{h})} R_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(\overline{t})\, \omega^{(q)}(f;p_1h_1,...,p_mh_m)\, d\overline{t} = \omega^{(q)}(f;p_1h_1,...,p_mh_m).$$

Лемма 2 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Пусть $\theta \ge m$, и пусть $Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})$, $T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})$ обозначают функции, полученные, соответственно, из $\Phi_{\overline{h}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$ и $F_{\overline{h},\overline{N}}^{(\overline{p})}(f,\overline{x})$, когда в них полагается

$$\overline{h} = (e^\theta/N_1,...,e^\theta/N_m), \qquad \overline{p} = ([\ln N_1],...,[\ln N_m]), \tag{3.1}$$

где $[a]$ -целая часть числа a. Условимся считать, что

$$\mathbf{C}(T_m)=L_\infty(T_m),\quad \|f\|_\infty=\|f\|=\max_{\overline{x}}|f(\overline{x})|,\quad \omega^{(\infty)}(f;\overline{\delta})=\omega(f;\overline{\delta})$$

и $1/q=0$ при $q=\infty$.

Теорема 1. *Пусть $f(\overline{x})\in L_q(T_m)$, $1\le q\le\infty$, $\theta\ge m$. Тогда для всех $\overline{N}$, удовлетворяющих условиям $\ln N_j>2$ и $e^\theta\ln N_j/N_j\le\pi$, $1\le j\le m$, имеет место неравенство*

$$\|f(\overline{x})-T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q\le$$

$$\le\omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta\ln N_1}{N_1},\dots,\frac{e^\theta\ln N_m}{N_m}\right)+\varepsilon_{\overline{N}(M)}\frac{2^m e^{\theta m}(2\pi)^{m/q}}{\prod\limits_{j=1}^m N_j^{\theta-1}(\ln N_j-2)}+$$

$$+\sum_{B\subset M}\varepsilon_{\overline{N}(B)}\frac{2^{|B|}e^{\theta|B|}(2\pi)^{m/q}\prod\limits_{j\in B^c}(2N_j+1)}{\prod\limits_{j\in B}N_j^{\theta-1}(\ln N_j-2)}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что для всех q, $1\le q\le\infty$ имеет место

$$\|f(\overline{x})-T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q\le\|f(\overline{x})-Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q+\|Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})-T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q\le$$

$$\le\omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta\ln N_1}{N_1},\dots,\frac{e^\theta\ln N_m}{N_m}\right)+\|Q_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})-T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})\|_q. \tag{3.3}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (3.3), мы применяем лемму 1 с векторами $\overline{h}$ и $\overline{p}$, определенными в (3.1). Подставляя эти значения $\overline{h}$ и $\overline{p}$ из (3.1) в (2.7), вычисляя $\|\cdot\|_q$ нормы обеих частей этого неравенства и используя следующие неравенства :

$$\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^m\left(\frac{e^\theta}{N_j}\right)^{[\ln N_j]}N_j^{[\ln N_j]-1}([\ln N_j]-1)}\le\frac{e^{\theta m}}{\prod\limits_{j=1}^m N_j^{\theta-1}(\ln N_j-2)},$$

$$\frac{1}{\prod\limits_{j\in B}\left(\frac{e^\theta}{N_j}\right)^{[\ln N_j]}N_j^{[\ln N_j]-1}([\ln N_j]-1)}\le\frac{e^{\theta|B|}}{\prod\limits_{j\in B}N_j^{\theta-1}(\ln N_j-2)},$$

получаем (3.2). Теорема 1 доказана.

Положим

$$\alpha(\theta,q,N)=\varepsilon_{N(M)}\frac{2^m e^{\theta m}(2\pi)^{m/q}}{N^{m(\theta-1)}(\ln N-2)^m}+$$
$$+\sum_{B\subset M}\varepsilon_{N(B)}\frac{2^{|B|}e^{\theta|B|}(2\pi)^{m/q}(2N+1)^{m-|B|}}{N^{|B|(\theta-1)}(\ln N-2)^{|B|}},$$

$$\beta(\theta,N)=\frac{2^m e^{\theta m}}{N^{m(\theta-1)}(\ln N-2)^m}+\sum_{B\subset M}\frac{2^{|B|}e^{\theta|B|}(2N+1)^{m-|B|}}{N^{|B|(\theta-1)}(\ln N-2)^{|B|}},\qquad(3.4)$$

где $\theta\geq m$, N -натуральное число, $\varepsilon_{N(M)}=\varepsilon_{\overline{N}(M)}$ и $\varepsilon_{N(B)}=\varepsilon_{\overline{N}(B)}$ при $N_j=N$ (см. (2.6)).

Полагая $\overline{N}=(N,...,N)$ в формулировке теоремы 1, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\theta\geq m$ и N – натуральное число такие, что $\ln N>2$, $e^\theta\ln N/N<\pi$. Тогда для любой функции $f(\overline{x})\in L_q(T_m)$, $1\leq q\leq\infty$ имеет место неравенство*

$$\|f(\overline{x})-T_{\theta,N}(f,\overline{x})\|_q\leq\omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta\ln N}{N},...,\frac{e^\theta\ln N}{N}\right)+\alpha(\theta,q,N),\qquad(3.5)$$

где $T_{\theta,N}(f,\overline{x})=T_{\theta,\overline{N}}(f,\overline{x})$ при $N_j=N$, $1\leq j\leq m$.

Теперь рассмотрим сферические частные суммы ряда (1.1)

$$\sigma_R(f,\overline{x})=\sum_{\|\overline{n}\|\leq R}c_{\overline{n}}e^{i\overline{n}\,\overline{x}},\quad \|\overline{n}\|=\left(\sum_{j=1}^m n_j^2\right)^{1/2},\quad R>0.\qquad(3.6)$$

$$N_R=\left[\frac{R}{\sqrt{m}}\right],\qquad \overline{N}_R=(N_R,...,N_R),\qquad(3.7)$$

$$a(\overline{n},\theta,N_R)=\prod_{j=1}^m\left(\frac{\sin(n_je^\theta/N_R)}{n_je^\theta/N_R}\right)^{[\ln N_R]},\qquad(3.8)$$

$$A_{\theta,R}(f,\overline{x})=\sum_{\|\overline{n}\|\leq R}a(\overline{n},\theta,N_R)\,c_{\overline{n}}e^{i\overline{n}\,\overline{x}}.\qquad(3.9)$$

Коэффициенты $a(\overline{n},\theta,N_R)$, $\|\overline{n}\|\leq R$ определяют линейный метод суммирования сферических частных сумм (3.6). Так как m–мерный куб $[-N_R,N_R]^m$ содержится в m–мерном шаре радиуса R, то в силу (1.16) с $\overline{N} = \overline{N}_R$ и (3.8), (3.9), имеем

$$\|Q^{(\overline{p})}_{\theta,\overline{N}_R}(f,\overline{x}) - A_{\theta,R}(f,\overline{x})\| \le \sum_{|\overline{n}|>\overline{N}_R} |a(\overline{n},\theta,N_R)||c_{\overline{n}}|+$$

$$+\sum_{B\subset M}\ \sum_{|\overline{n}(B^c)|\le\overline{N}_R(B^c)}\ \sum_{|\overline{n}(B)|>\overline{N}_R(B)} |a(\overline{n},\theta,N_R)||c_{\overline{n}}|. \tag{3.10}$$

Теорема 3. *Пусть* $\theta \ge m$ *и* $N_R = [R/\sqrt{m}]$ такие, что $\ln N_R > 2$, $\dfrac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}} < \pi$. *Тогда для любой функции* $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \le q \le \infty$ *имеет место неравенство*

$$\|f(\overline{x}) - A_{\theta,R}(f,\overline{x})\|_q \le$$
$$\le \omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1},\dots,\frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}\right) + \alpha(\theta,q,N_R). \tag{3.11}$$

Доказательство. Из (3.7) и леммы 2 следует

$$\|f(\overline{x}) - Q_{\theta,\overline{N}_R}(f,\overline{x})\|_q \le \omega^{(q)}\left(f;\frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1},\dots,\frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}\right). \tag{3.12}$$

С другой стороны, повторяя доказательство теоремы 2 с $N = N_R$ и учитывая (3.10), получаем

$$\|A_{\theta,R}(f,\overline{x}) - Q_{\theta,\overline{N}_R}(f,\overline{x})\|_q \le \alpha(\theta,q,N_R). \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следует (3.11). Теорема 3 доказана.

Используя подходящие замены переменных x_j в формуле коэффициентов Фурье, легко проверить, что для любого непустого подмножества $B \subset M$, $B \ne M$ и для любого натурального числа N имеет место неравенство

$$\varepsilon_{N(B)} \le \frac{1}{2}\omega^{(q)}\left(f;\frac{\pi}{N},\dots,\frac{\pi}{N}\right)\cdot(2\pi)^{-m/q}.$$

В условиях теорем 2 и 3 справедливы, соответствено, следующие оценки :

$$\frac{e^\theta \ln N}{N} > \frac{\pi}{N}, \qquad \frac{e^\theta \ln(R/\sqrt{m})}{R/\sqrt{m}-1} > \frac{\pi}{N_R}. \tag{3.14}$$

Поэтому из теорем 2 и 3 вытекают

Следствие 1. Пусть $\theta \geq m$, и пусть N -натуральное число такие, что $\ln N > 2$, $e^\theta \ln N/N < \pi$. Тогда для всех $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|f(\overline{x}) - T_{\theta,N}(f,\overline{x})\|_q \leq \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\theta, N)\right)\omega^{(q)}\left(f; \frac{e^\theta \ln N}{N}, \ldots, \frac{e^\theta \ln N}{N}\right).$$

Следствие 2. Пусть $\theta \geq m$, и пусть $N_R = [R/\sqrt{m}]$ такие, что $\ln N_R > 2$, $\dfrac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}} < \pi$. Тогда для всех $f(\overline{x}) \in L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|f(\overline{x}) - A_{\theta,R}(f,\overline{x})\|_q \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{2}\beta(\theta, [R/\sqrt{m}])\right)\omega^{(q)}\left(f; \frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}, \ldots, \frac{e^\theta \ln R/\sqrt{m}}{R/\sqrt{m}-1}\right).$$

Из (3.4) следует, что величины $\beta(\theta, N)$ и $\beta(\theta, [R/\sqrt{m}])$ не зависят от функции $f(\overline{x})$ и для всех $\theta \geq m$ стремятся к нулю, при $N \to \infty$ или $R \to \infty$. При этом чем больше θ тем быстрее они сходятся к нулю.

ABSTRACT. In the present paper by means of an appropriate choice of sequences of vectors $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ we define a linear summation method which sums the cubic and spherical means of partial sums of the Fourier series of $f \in \mathbf{C}(T_m)$ uniformly. We give an estimate from above for the deviation of these partial sums from $f(\overline{x})$ in terms of the modulus of continuity $\omega(f; \overline{\delta})$. We also prove similar results for the spaces $L_q(T_m)$, $1 \leq q \leq \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, М., Наука, 1965.

28 августа 1995

Ереванский государственный университет