О СХОДИМОСТИ И ЯВЛЕНИИ ГИББСА ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ – УОЛША ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИ- ЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

О. Г. Саргсян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 30, № 5, 1995

В статье доказывается, что если интегрируемая функция $f(x, y)$ имеет ограниченную гармоническую вариацию и непрерывна в каждой точке компакта K , то двойной ряд Фурье–Уолша функции $f(x, y)$ равномерно сходится на K . Применяя этот результат, исследуется явление Гиббса для двойных рядов Фурье–Уолша.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, 2π -периодическая, интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, и пусть

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx) \quad (1)$$

ее ряд Фурье. Следующая теорема хорошо известна (см. [1], стр. 121).

Теорема А. Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$ и непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то ряд (1) сходится к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

Аналог теоремы А имеет место также для рядов Фурье–Уолша (см. [2], стр. 58).

Напомним определение понятия ограниченной гармонической вариации, введенной А. Саакяном в [3]. Всюду ниже функция $f(x, y)$ считается измеримой. Пусть I –интервал или отрезок на $(-\infty, \infty)$ с концами a и b . Через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $I_n = (a_n, b_n)$, для которых $[a_n, b_n] \subset I$. При фиксированном y_0 положим

$f(I, y_0) = f(b, y_0) - f(a, y_0)$, и через $V_x(f(x, y_0), I)$ обозначим обычную гармоническую вариацию функции $f(x, y_0)$ на I относительно x :

$$V_x(f(x, y_0), I) = \sup_{\{I_n\} \in \Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n, y_0)|}{n}.$$

Аналогично, при фиксированном x_0 определяются $f(x_0, I)$ и $V_y(f(x_0, y), I)$.

Положим

$$f(I, \Delta) = f(a, \alpha) - f(a, \beta) - f(b, \alpha) + f(b, \beta),$$

$$V_{x,y}(f, I \times \Delta) \equiv \sup_{\substack{\{I_n\} \in \Omega(I) \\ \{\Delta_k\} \in \Omega(\Delta)}} \sum_{n,k} \frac{|f(I_n, \Delta_k)|}{nk},$$

где Δ — интервал с концами α и β .

Определение. Скажем, что функция $f(x, y)$ имеет *ограниченную гармоническую вариацию на прямоугольнике* $D = I \times \Delta$ ($f \in \text{BHV}(D)$), если

$$V_H(f, D) \equiv V_{x,y}(f, D) + V_x(f(x, \alpha), I) + V_y(f(a, y), \Delta) < \infty.$$

Теорема В. (А. Саакян [3]) Пусть $f(x, y)$ непрерывна в точках открытого множества $E \subset [-\pi, \pi]^2$ и $f(x, y) \in \text{BHV}([-\pi, \pi]^2)$. Тогда прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции $f(x, y)$ равномерно сходятся к $f(x, y)$ на каждом компакте $K \subset E$.

Эта теорема была усилена автором (см. [4]):

Теорема С. (см. [4]) Пусть интегрируемая функция $f(x, y)$ принадлежит классу $\text{BHV}([-\pi, \pi]^2)$. Если $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке некоторого компакта $K \subset [-\pi, \pi]^2$, то прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции $f(x, y)$ равномерно сходятся к $f(x, y)$ на компакте K .

Понятие функции Гиббса было введено в [6].

Определение. Пусть x_0 точка разрыва функции $g(x)$, имеющей ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки x_0 , причем $|g(x_0 + 0) - g(x_0 - 0)| = 2d$,

и пусть последовательность функций $\{g_n(x)\}$ сходится к g в каждой точке некоторой окрестности x_0 . Функция

$$G(x_0, g, \{g_n\}) = G(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{d} \left| g_n(x) - \frac{g(x_0 + 0) + g(x_0 - 0)}{2} \right|$$

называется *функцией Гиббса* для последовательности $\{g_n\}$. Если $G(x_0) > 1$, то скажем, что для последовательности $\{g_n\}$ в точке x_0 имеет место *явление Гиббса*.

Хорошо известно (см. [1], стр. 123 - 126), что для частичных сумм ряда Фурье (1) имеет место явление Гиббса, причем функция $G(x_0)$ не зависит от x_0 и равна

$$G(x_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.7,$$

называемой постоянной Гиббса. Для частичных сумм ряда Фурье-Уолша наличие явления Гиббса установлено А. М. Зубакиным в [5]. В работе [6] показано, что для частичных сумм ряда Фурье-Уолша функция $G(x_0)$ не является постоянной и найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции. Для кратных рядов Фурье функций из класса BVH явление Гиббса было установлено в [4].

В настоящей статье исследуются равномерная сходимость и явление Гиббса двойных рядов Фурье-Уолша функций из класса BVH.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через G множество последовательностей из нулей и единиц, т. е.

$$\{x_i\}_{i=0}^\infty = (x_0, x_1, \dots, x_j, \dots), \quad x_j = 0 \text{ или } 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Через G' обозначим подмножество G , которое получается, если из G исключить все последовательности, члены которых равны 1, начиная с некоторого места, за исключением последовательности, все члены которой равны 1. Если $x \in [0, 1]$, то $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i / 2^{i+1}$, где $\{x_i\}_{i=0}^\infty \in G'$.

Суммой двух последовательностей $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ и $\{y_i\}_{i=0}^\infty$ называется последовательность $\{z_i\}_{i=0}^\infty$:

$$\{z_i\}_{i=0}^\infty = \{x_i\}_{i=0}^\infty \oplus \{y_i\}_{i=0}^\infty = \{x_i \oplus y_i\}_{i=0}^\infty,$$

где

$$x_i \oplus y_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i + y_i = 0 \text{ или } 2, \\ 1, & \text{если } x_i + y_i = 1, \end{cases}$$

т.е. операция $\oplus$ представляет собой покоординатное сложение по модулю 2. Для

$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i/2^{i+1}$ и $y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i/2^{i+1}$ определим сумму

$$z = x \oplus y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i \oplus y_i}{2^{i+1}}, \quad \text{если } \{x_i\}_{i=0}^{\infty} \oplus \{y_i\}_{i=0}^{\infty} \in G'.$$

При фиксированном y сумма $x \oplus y$ определена всюду на $[0, 1]$, за исключением

некоторого счетного множества. Ниже полуинтервалы $\Delta_m^{(k)} = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k} \right)$ будем

называть *двоичными интервалами* ранга $k \geq 0$. Обозначим через $r_k(x)$ функции

Радемахера : при $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i/2^{i+1}$ с $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in G'$, $r_k(x) = (-1)^{x_k}$.

Напомним определение функций системы Уолша в нумерации Пэли. Поло-

жим $W_0(x) \equiv 1$. Чтобы определить $W_n(x)$ при $n \geq 1$, представим натураль-

ное число n в двоичной записи $n = \sum_{i=0}^k \epsilon_i 2^i$, где $\epsilon_k = 1$ и $\epsilon_i = 0$ или 1 , когда

$i = 0, 1, \dots, k-1$. Очевидно $2^k \leq n < 2^{k+1}$, где $k = k(n)$. Положим

$$W_n(x) = \prod_{i=0}^k (r_i(x))^{\epsilon_i} = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} (r_i(x))^{\epsilon_i}.$$

С системой Уолша, а также с операцией $\oplus$ подробно можно ознакомиться в книге

[2]. Нам нужны следующие свойства :

1) если $x \oplus y$ определена, то

$$W_n(x) \cdot W_n(y) = W_n(x \oplus y); \quad (2)$$

2) если $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, то

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} W_i(x) = D_{2^k}(x) + W_{2^k}(x) D_m(x); \quad (3)$$

3) для любого $x \in (0, 1)$

$$|D_n(x)| < \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset [0, 1]$ и для любого $x \in [0, 1]$ множество $E \oplus x = \{t \oplus x, t \in E\}$ измеримо и $\text{mes}(E \oplus x) = \text{mes } E$. Следовательно

$$\int_0^1 f(t \oplus x) dt = \int_0^1 f(t) dt. \quad (5)$$

Рассмотрим прямоугольную частичную сумму ряда Фурье-Уолша функции $f(x, y) \in L^1([0, 1]^2)$:

$$S_{N,M}(f, x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{n,m} W_n(x) W_m(y), \quad N, M = 1, 2, \dots,$$

где

$$c_{n,m} \equiv c_{n,m}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) W_n(x) W_m(y) dx dy$$

коэффициенты Фурье-Уолша функции $f(x, y)$. Положим

$$\overline{P}(f, x_0, y_0) = \overline{\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (N,M) \rightarrow \infty}} S_{N,M}(f, x, y)}, \quad \underline{P}(f, x_0, y_0) = \underline{\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (N,M) \rightarrow \infty}} S_{N,M}(f, x, y)}.$$

Скажем, что последовательность $S_{N,M}(f, x, y)$ сходится к s равномерно в точке (x_0, y_0) при $(N, M) \rightarrow \infty$, если $\overline{P}(f, x_0, y_0) = \underline{P}(f, x_0, y_0) = s$. Пусть $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет разрыв первого рода, т.е. существуют пределы

$$d_{++}(f, x_0, y_0) = f(x_0 + 0, y_0 + 0), \quad d_{+-}(f, x_0, y_0) = f(x_0 + 0, y_0 - 0),$$

$$d_{-+}(f, x_0, y_0) = f(x_0 - 0, y_0 + 0), \quad d_{--}(f, x_0, y_0) = f(x_0 - 0, y_0 - 0).$$

Точка (x_0, y_0) называется *точкой устранимого разрыва*, если

$$\overline{d}(f, x_0, y_0) \equiv \max \{d_{\pm\pm}(f, x_0, y_0)\} = \underline{d}(f, x_0, y_0) \equiv \min \{d_{\pm\pm}(f, x_0, y_0)\}.$$

В противном случае точка (x_0, y_0) называется *точкой неустранимого разрыва*.

Точка (x_0, y_0) называется *двоично-иррациональной*, если x_0 и y_0 - двоично-иррациональные числа.

Скажем, что для последовательности $S_{N,M}(f, x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет место явление Гиббса, если

$$\frac{\overline{d}(f, x_0, y_0) - \underline{d}(f, x_0, y_0)}{\overline{P}(f, x_0, y_0) - \underline{P}(f, x_0, y_0)} < 1.$$

Нам потребуются следующие леммы (см. [3], [4]).

Лемма 1. (см. [3]) Если $f(x, y) \in BV(D)$, $D = I \times \Delta$, то для произвольных $(x, y), (x', y') \in D$

$$a) \quad V_y(f(x, y), \Delta) \leq V_H(f, D), \quad V_x(f(x, y), I) \leq V_H(f, D),$$

$$b) \quad |f(x, y) - f(x', y')| \leq 2V_H(f, D).$$

Лемма 2. (см. [4]) Если функция $f(x, y) \in BV(D)$ и непрерывна в (x_0, y_0) , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_H(f, [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h]) = 0.$$

Теорема D. (см. [6]) В каждой двоично-иррациональной точке x_0 имеет место оценка

$$\frac{4}{3} \leq G(x_0, g, \{S_n(g)\}) \leq \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad G(x_0, g, \{S_n(g)\}) = \frac{3}{2} \quad \text{п. в.}$$

Вместе с тем, существуют двоично-иррациональные точки, для которых имеет место равенство $G(x_0, g, \{S_n(g)\}) = \frac{4}{3}$.

Обозначим

$$\chi_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{если } 0 \leq t \leq x_0, \end{cases}$$

$$\bar{a}(x_0) = \overline{\lim_{\substack{t \rightarrow x_0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n(\chi_{x_0}(t), t), \quad \underline{a}(x_0) = \underline{\lim_{\substack{t \rightarrow x_0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n(\chi_{x_0}(t), t),$$

где $S_n(\chi_{x_0}(t), t)$ - частичные суммы ряда Фурье-Уолша функции $\chi_{x_0}(t)$.

Лемма 3. Для частичных сумм ряда Фурье-Уолша функции $\chi_{x_0}(t)$ справедливы следующие равенства :

а) для двоично-иррациональных точек x_0 и x

$$S_n(\chi_{x_0}(t), x) + S_n(\chi_{1-x_0}(t), 1-x) = 1;$$

б) для $n \geq 2^{k+1}$ и $x, x_0 \in \Delta_0^{(k+1)}$

$$S_n(\chi_{x_0}(t), x) = S_n\left(\chi_{x_0+2^{-k-1}}(t), x + \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Доказательство. Так как

$$W_0(1-x) \int_0^1 \chi_{1-x_0}(t) W_0(t) dt + W_0(x) \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_0(t) dt = 1,$$

то для доказательства а) нужно убедиться, что для $k \geq 1$

$$A_k \equiv W_k(1-x) \int_0^1 \chi_{1-x_0}(t) W_k(t) dt + W_k(x) \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_k(t) dt = 0. \quad (6)$$

Согласно (2), (5) и $\int_0^1 W_k(t) dt = 0, k \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} A_k &= \int_0^1 \chi_{1-x_0}(t) W_k(t \oplus (1-x)) dt + \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_k(t \oplus x) dt = \\ &= \int_{1-x_0}^1 W_k(t \oplus (1-x)) dt + \int_{x_0}^1 W_k(t \oplus x) dt = \int_{1 \oplus [1-x_0, 1]} W_k(t \oplus x) dt + \\ &+ \int_{[x_0, 1]} W_k(t \oplus x) dt = \int_{[0, 1]} W_k(t \oplus x) dt = \int_0^1 W_k(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (6), а следовательно и утверждение а), доказаны.

Теперь докажем утверждение б). Нетрудно видеть, что функции Радемахера обладают следующими свойствами :

$$r_i \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) = r_i(x), \quad i \neq k, \quad r_k \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) = -r_k(x), \quad x \in \Delta_0^{(k+1)}. \quad (7)$$

Из определения функций Уолша и из (7) получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} B_i &= \sum_{i=0}^{2^k-1} B_i + \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} B_i = \sum_{i=0}^{2^k-1} \int_{x_0+2^{-k-1}}^{x_0+2^{-k-1}} W_i(t) dt - \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \int_0^{2^{-k-1}} 1 dt + \\ &+ \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \int_{2^{-k-1}}^{x_0+2^{-k-1}} 1 dt = 2^{k+1} x_0 = \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} W_i(x) \int_0^1 (1 - \chi_{x_0}(t)) W_i(t) dt, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$B_i = W_i \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \int_0^1 (1 - \chi_{x_0+2^{-k-1}}(t)) W_i(t) dt.$$

Из (8) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} B'_i &= \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} W_i(x) \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_i(t) dt, \\ B'_i &= W_i \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \int_0^1 \chi_{x_0+2^{-k-1}}(t) W_i(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно доказать, что при $i = 2^{k+1}, \dots, n-1$

$$B'_i = W_i(x) \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_i(t) dt.$$

Пусть $i \geq 2^{k+1}$ и $i = 2^m + \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j 2^j$, $\varepsilon_j = 0$ или 1. Тогда из (7) и из определения системы Уолша следует, что

$$\begin{aligned} B_i &= W_i \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \left[\int_{2^{-k-1}}^{x_0+2^{-k-1}} W_i(t) dt + \int_0^{2^{-k-1}} W_i(t) dt \right] = \\ &= W_i \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \int_{2^{-k-1}}^{x_0+2^{-k-1}} W_i(t) dt = W_i \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \int_0^{x_0} W_i \left(t + \frac{1}{2^{k+1}} \right) dt = \\ &= W_{i-\varepsilon_k 2^k} \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \left[r_k \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \right]^{\varepsilon_k} \int_0^{x_0} W_{i-\varepsilon_k 2^k} \left(t + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \times \\ &\times \left[r_k \left(t + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \right]^{\varepsilon_k} dt = W_{i-\varepsilon_k 2^k}(x) [-r_k(x)]^{\varepsilon_k} \int_0^{x_0} W_{i-\varepsilon_k 2^k}(t) [-r_k(t)]^{\varepsilon_k} dt = \\ &= W_i(x) \int_0^1 (1 - \chi_{x_0}(t)) W_i(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая $\int_0^1 W_j(t) dt = 0$, $j \geq 1$, получаем

$$-B'_i = B_i = -W_i(x) \int_0^1 \chi_{x_0}(t) W_i(t) dt, \quad i = 2^{k+1}, \dots, n-1.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для почти всех $x \in [0, 1]$, $\bar{a}(x) = 5/4$, $\underline{a}(x) = -1/4$.

Доказательство. Из теоремы D и из определения функции Гиббса следует, что

$$\bar{a}(x) \leq \frac{5}{4}, \quad \underline{a}(x) \geq -\frac{1}{4}, \quad \text{mes} \left\{ x \in [0, 1] : \bar{a}(x) = \frac{5}{4}, \text{ или } \underline{a}(x) = -\frac{1}{4} \right\} = 1. \quad (9)$$

Согласно лемме 3, для двоично-иррациональных точек

$$\bar{a}(x) + \underline{a}(1-x) = 1, \quad (10)$$

и для $x \in \Delta_0^{(k+1)}$ имеем

$$\bar{a}(x) = \bar{a} \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right), \quad \underline{a} \left(x + \frac{1}{2^{k+1}} \right) = \underline{a}(x). \quad (11)$$

Обозначим

$$E_1 = \left\{ x : \bar{a}(x) < \frac{5}{4} \text{ и } \underline{a}(x) = -\frac{1}{4} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ x : \bar{a}(x) = \frac{5}{4} \text{ и } \underline{a}(x) > -\frac{1}{4} \right\},$$

$$E_3 = \left\{ x : \bar{a}(x) = \frac{5}{4} \text{ и } \underline{a}(x) = -\frac{1}{4} \right\}.$$

Из (10) следует, что

$$\text{mes}(E_1) = \text{mes}(E_2). \quad (12)$$

Применяя индукцию по k докажем, что

$$\text{mes}(E_1 \cap \Delta_j^{(k)}) = 2^{-k} \text{mes}(E_1), \quad j = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad k \geq 1. \quad (13)$$

При $k = 1$ равенство (13) следует из (11). Предположим, что (13) имеет место при $k - 1$. Так как

$$\Delta_{2^j}^{(k)} = \Delta_0^{(k)} + 2j2^{-k}, \quad j = 1, \dots, 2^{k-1} - 1, \quad \Delta_1^{(k)} = \Delta_0^{(k)} + 2^{-k}, \quad j = \sum_{i=0}^{k-j} \varepsilon_i 2^i,$$

где $\varepsilon_j = 0$ или 1 , из (11) имеем

$$\bar{a}(x) = \bar{a} \left(x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_i 2^i}{2^{k-1}} \right), \quad \underline{a}(x) = \underline{a} \left(x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\varepsilon_i 2^i}{2^{k-1}} \right), \quad x \in \Delta_0^{(k)}.$$

Следовательно, для $j = 1, \dots, 2^{k-1} - 1$ имеем

$$\text{mes}(E_1 \cap \Delta_0^{(k)}) = \text{mes}(E_1 \cap \Delta_1^{(k)}) = \text{mes}(E_1 \cap \Delta_{2^j}^{(k)}). \quad (14)$$

Из этих соотношений и из индукционного предположения следует (13).

Из (13) следует, что в каждой точке множества E_1 для достаточно малых h имеет место равенство

$$\frac{1}{2h} \text{mes}((x - h, x + h) \cap E_1) = \text{mes}(E_1).$$

Так как почти все точки множества E_1 являются точками плотности множества E_1 , то $\text{mes}(E_1) = 0$ или $\text{mes}(E_1) = 1$. Согласно (9) и (12)

$$1 = \text{mes}(E_1) + \text{mes}(E_2) + \text{mes}(E_3) = \text{mes}(E_3) + 2 \text{mes}(E_1). \quad (15)$$

Поэтому $\text{mes}(E_1) \neq 1$. Следовательно, $\text{mes}(E_1) = 0$ и $\text{mes}(E_3) = 1$.

Лемма 4 доказана.

Для $A = (A_1, \dots, A_m) \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим норму

$$\omega(A) = \max \{ |A_i|, |A_i - A_j|, i, j = 1, \dots, m \}.$$

Норму матрицы B порядка $m \times m$ определим как

$$\|B\|_\omega = \sup_{A \neq 0} \frac{\omega(BA)}{\omega(A)}.$$

Обозначим через $\Delta_x^{(p)}$ замыкание множества $\Delta_j^{(p)}$, для которого $x \in \Delta_j^{(p)}$. Запись $A \subsetneq B$ будет означать, что $A \subset B$ и $A \neq B$.

Замечание 1. Мы будем использовать следующие простые свойства функции

$$\psi^*(x, y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 xy.$$

а) На прямоугольнике $I \times \Delta = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ функция $\psi^*(x, y)$ принимает свое максимальное и минимальное значения на вершинах прямоугольника $I \times \Delta$;

б) если функция ψ^* постоянная, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$;

в) если $I_1 \subsetneq I$ и $\Delta_1 \subsetneq \Delta$ и функция $\psi^*(x, y)$ непостоянная, то

$$\max_{(x,y) \in I \times \Delta} \psi^*(x, y) - \min_{(x,y) \in I \times \Delta} \psi^*(x, y) > \max_{(x,y) \in I_1 \times \Delta_1} \psi^*(x, y) - \min_{(x,y) \in I_1 \times \Delta_1} \psi^*(x, y).$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Теорема 1. Если $f(x, y) \in \text{BHV}([0, 1]^2)$ и $N, M > 2^{p+1}$, то

$$|f(x, y) - S_{N,M}(f, x, y)| \leq 8V_H(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)}) + 4 \cdot 2^p V_H(f, [0, 1]^2) \left(\frac{1}{\ln N} + \frac{1}{\ln M} \right).$$

Замечание 2. Из теоремы 1, в частности, следует, что для функций из класса

BHV имеет место принцип локализации, т. е. если $f(x, y) = 0$ на открытом

множестве $E \subset [0, 1]^2$, то $S_{N,M}(f, x, y) \rightarrow 0$ равномерно на каждом компакте

$K \subset E$ при $(N, M) \rightarrow \infty$. Принцип локализации для двойных рядов Фурье

функций из класса BHV по системе $\{e^{i(nx+my)}\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$ был доказан А. А.

Свакьяном [3].

Доказательство Теоремы 1. Из (2), (3) и (5) имеем

$$S_{N,M}(f, x, y) = \int_0^1 \int_0^1 f(x \oplus t, y \oplus s) D_N(t) D_M(s) dt ds, \quad (16)$$

где $D_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} W_i(t)$ — ядро Дирихле системы Уолша. Для $N = 2^n + N_1$, $1 \leq N_1 \leq 2^n$, $M = 2^m + M_1$, $1 \leq M_1 \leq 2^m$ имеем

$$\begin{aligned} f(x, y) - S_{N,M}(f, x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 F \cdot D_N(t) D_M(s) dt ds = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 F [D_{2^n}(t) + W_{2^n}(t) D_{N_1}(t)] [D_{2^m}(s) + W_{2^m}(s) D_{M_1}(s)] dt ds = \sum_{i=1}^4 I_i, \end{aligned}$$

где

$$F = f(x, y) - f(x \oplus t, y \oplus s),$$

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 F \cdot D_{2^n}(t) D_{2^m}(s) dt ds, \quad I_2 = \int_0^1 \int_0^1 F \cdot D_{2^n}(t) D_{M_1}(s) W_{2^m}(s) dt ds,$$

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^1 F \cdot D_{2^m}(s) W_{2^n}(t) D_{N_1}(t) dt ds,$$

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^1 F \cdot W_{2^n}(t) D_{N_1}(t) D_{M_1}(s) W_{2^m}(s) dt ds.$$

Достаточно доказать, что

$$|I_i| \leq 2V_H(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)}) + 2^p V_H(f, [0, 1]^2) \left(\frac{1}{\ln N} + \frac{1}{\ln M} \right). \quad (17)$$

При $i = 1$ неравенство (17) непосредственно следует из пункта б) леммы 1.

Выражение I_2 представим в виде

$$I_2 = \sum_{j=0}^{2^m-1} I_2^{(j)}, \quad I_2^{(j)} = \int_{\Delta_0^{(n)}} \int_{\Delta_j^{(m)}} F \cdot D_{2^n}(t) D_{M_1}(s) W_{2^m}(s) ds dt. \quad (18)$$

Очевидно $D_{M_1}(s)$ постоянна на каждом $\Delta_j^{(m)} = \Delta_{2j}^{(m+1)} \cup \Delta_{2j+1}^{(m+1)}$, и $W_{2^m}(s) = 1$, когда $s \in \Delta_{2j}^{(m+1)}$, и $W_{2^m}(s) = -1$, когда $s \in \Delta_{2j+1}^{(m+1)}$. Кроме того, если $s \in \Delta_{2j}^{(m+1)}$, то $s \oplus 2^{-m-1} \in \Delta_{2j+1}^{(m+1)}$. Поэтому

$$I_2^{(j)} = \int_{\Delta_0^{(n)}} \int_{\Delta_{2j}^{(m+1)}} F \cdot D_{M_1}(s) D_{2^n}(t) ds dt - \int_{\Delta_0^{(n)}} \int_{\Delta_{2j+1}^{(m+1)}} F \cdot D_{2^n}(t) D_{M_1}(s) ds dt =$$

$$= \int_{\Delta_0^{(n)}} \int_{\Delta_{2j}^{(m+1)}} \left[f \left(x \oplus t, y \oplus s \oplus \frac{1}{2^{m+1}} \right) - f(x \oplus t, y \oplus s) \right] D_{2^n}(t) D_{M_1}(s) ds dt.$$

Учитывая, что $D_{M_1}(s)$ постоянна на каждом $\Delta_j^{(m)}$, из (4) получим $|D_{M_1}(s)| \leq \frac{2^m}{j+1}$, при $s \in \Delta_j^{(m)}$. В каждом из интегралов сделаем замену переменной $s \mapsto s \oplus j2^{-m}$, тогда получим

$$|I_2| \leq \sum_{j=0}^{2^{m-p}-1} \int_{\Delta_0^{(n)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} |K_j| \frac{2^{m+n}}{j+1} ds dt + \sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} \int_{\Delta_0^{(n)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} |K_j| 2^{p+n} ds dt,$$

где

$$K_j = f \left(x \oplus t, y \oplus \frac{2j}{2^{m+1}} \oplus s \right) - f \left(x \oplus t, y \oplus \frac{2j+1}{2^{m+1}} \oplus s \right).$$

Легко видеть, что для различных j пары точек $\left\{ y \oplus \frac{2j}{2^{m+1}} \oplus s, y \oplus \frac{2j+1}{2^{m+1}} \oplus s \right\}$ принадлежат разным интервалам ранга m . Поэтому они образуют непересекающиеся интервалы. Следовательно, согласно пункта а) леммы 1 имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{2^m-2^{m-p}} i^{-1} \right) \sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} \int_{\Delta_0^{(n)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} |K_j| 2^{p+n} ds dt \leq 2^p (1 - 2^{-p}) V_H(f, [0, 1]^2).$$

Таким образом

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{2} V_H \left(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)} \right) + \frac{2^p (1 - 2^{-p}) V_H(f, [0, 1]^2)}{2 \ln(2^m - 2^{m-p})} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} V_H \left(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)} \right) + \frac{2^p}{\ln M} V_H(f, [0, 1]^2). \end{aligned}$$

Неравенство (17) при $i = 3$ доказывается аналогично. Остается рассмотреть случай $i = 4$. Имеем

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_i^{(n)}} \int_{\Delta_j^{(m)}} F \cdot W_{2^n}(t) D_{N_1}(t) D_{M_1}(s) W_{2^m}(s) ds dt = \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_{2i}^{(n+1)}} \int_{\Delta_j^{(m)}} \left[f \left(x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{n+1}}, y \oplus s \right) - f(x \oplus t, y \oplus s) \right] \times \\ &\times D_{N_1}(t) D_{M_1}(s) W_{2^m}(s) ds dt = \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_{2i}^{(n+1)}} \int_{\Delta_{2j}^{(m+1)}} \left[f \left(x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{n+1}}, y \oplus s \oplus \frac{1}{2^{m+1}} \right) - \right. \\ &- f \left(x \oplus t \oplus \frac{1}{2^{n+1}}, y \oplus s \right) - f \left(x \oplus t, y \oplus s \oplus \frac{1}{2^{m+1}} \right) + f(x \oplus t, y \oplus s) \left. \right] \times \\ &\times D_{N_1}(t) D_{M_1}(s) ds dt. \end{aligned}$$

Ниже мы будем использовать следующие обозначения :

$$F_{ij} = \Delta_{2^{-m-1}}^2 \Delta_{2^{-n-1}}^1 f \left(x \oplus t \oplus \frac{2i}{2^{n+1}}, y \oplus s \oplus \frac{2j}{2^{m+1}} \right),$$

$$\Delta_h^1 f(u, v) = f(u \oplus h, v) - f(u, v), \quad \Delta_h^2 f(u, v) = f(u, v \oplus h) - f(u, v).$$

Имеем

$$I_4 = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{\Delta_0^{(n+1)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} F_{ij} D_{M_1, j} D_{N_1, i} ds dt = \sum_{i=1}^3 J_i,$$

где $D_{M_1, j}$ - постоянное значение ядра $D_{M_1}(s)$ на интервале $\Delta_j^{(m)}$ и

$$J_1 = \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1} \sum_{j=0}^{2^{m-p}-1} T_{ij}, \quad J_2 = \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1} \sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} T_{ij}, \quad J_3 = \sum_{i=2^{n-p}}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^m-1} T_{ij},$$

$$T_{ij} = \int_{\Delta_0^{(n+1)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} F_{ij} D_{M_1, j} D_{N_1, i} ds dt.$$

Из определения гармонической вариации следует, что

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1} \sum_{j=0}^{2^{m-p}-1} \int_{\Delta_0^{(n+1)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} |F_{ij}| \frac{2^{n+m}}{(i+1)(j+1)} ds dt \leq \\ &\leq \frac{1}{4} V_H(f, \Delta_x^{(p)} \times \Delta_y^{(p)}), \\ \left(\sum_{k=1}^{2^m-2^{m-p}} k^{-1} \right) \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1} \sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} \int_{\Delta_0^{(n+1)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} |F_{ij}| \frac{2^{p+n}}{i+1} ds dt &\leq \\ &\leq 2^{p-2} (1 - 2^{-p}) V_H(f, [0, 1]^2), \\ |J_2| \leq \sum_{i=0}^{2^{n-p}-1} \sum_{j=2^{m-p}}^{2^m-1} \int_{\Delta_0^{(n+1)}} \int_{\Delta_0^{(m+1)}} |F_{ij}| \frac{2^{n+p}}{i+1} ds dt &\leq \frac{2^{p-1}}{\ln M} V_H(f, [0, 1]^2). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$|J_3| \leq \frac{2^{p-1}}{\ln N} V_H(f, [0, 1]^2).$$

Отсюда следует неравенство (17). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $f(x, y) \in BV([0, 1]^2)$. Если (x_0, y_0) - точка устранимого разрыва функции $f(x, y)$, то частичные суммы $S_{N, M}(f, x, y)$ равномерно сходятся к $f(x_0 + 0, y_0 + 0)$ в точке (x_0, y_0) .

Из теоремы 2 непосредственно следует

Теорема 3. Если $f(x, y) \in BV([0, 1]^2)$ и $f(x, y)$ непрерывна в точках некоторого компакта $K \subset [0, 1]^2$, то частичные суммы $S_{N,M}(f, x, y)$ равномерно сходятся к $f(x, y)$ на K .

Доказательство Теоремы 2. Пусть функция $\tilde{f}(x, y)$ равна $f(x_0 + 0, y_0 + 0)$ на множестве $\{x_0\} \times [0, 1]$ и $[0, 1] \times \{y_0\}$, и равна $f(x, y)$ - в остальных точках множества $[0, 1]^2$. Так как $S_{N,M}(f, x, y) = S_{N,M}(\tilde{f}, x, y)$ и $\tilde{f}(x_0 + 0, y_0 + 0) = f(x_0 + 0, y_0 + 0)$, то остается доказать, что $S_{N,M}(\tilde{f}, x, y) \rightarrow \tilde{f}(x_0 + 0, y_0 + 0)$ равномерно в точке (x_0, y_0) при $(N, M) \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Согласно лемме 2, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$V_H \left(\tilde{f}, [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \cap [0, 1]^2 \right) < \frac{\varepsilon}{48}.$$

Фиксируем натуральное число p , удовлетворяющее условию $2^{-p} < \delta/4$. Тогда из леммы 1 следует, что на множестве $Q = \{(x, y) : |x - x_0| < \frac{\delta}{2}, |y - y_0| < \frac{\delta}{2}\}$ выполняется

$$V_H \left(\tilde{f}, \Delta_{\pm}^{(p)} \times \Delta_{\pm}^{(p)} \right) < 3V_H \left(\tilde{f}, [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \cap [0, 1]^2 \right).$$

Если N и M достаточно большие, то согласно теореме 1, на множестве Q имеем

$$\left| \tilde{f}(x, y) - S_{N,M}(\tilde{f}, x, y) \right| \leq \varepsilon.$$

Теорема 2 доказана.

Определим верхнюю и нижнюю функции Гиббса в точке (x_0, y_0) равенствами

$$\overline{G}(x_0, y_0) = \sup_f G(f, x_0, y_0), \quad \text{и} \quad \underline{G}(x_0, y_0) = \inf_f G(f, x_0, y_0),$$

$$G(f, x_0, y_0) = \frac{\overline{d}(f, x_0, y_0) - \underline{d}(f, x_0, y_0)}{\overline{P}(f, x_0, y_0) - \underline{P}(f, x_0, y_0)},$$

где $\sup$ и $\inf$ берется по всем функциям из класса BV , для которых (x_0, y_0) является точкой неустранимого разрыва.

Теорема 4. В каждой двоично-иррациональной точке имеет место оценка

$$0 < \underline{G}(x_0, y_0) < \overline{G}(x_0, y_0) < 1,$$

и почти всюду $\underline{G}(x_0, y_0) = \frac{4}{9}$, $\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{2}{3}$.

Доказательство. Пусть функция $f(x, y) \in \text{BHV}([0, 1]^2)$ имеет неустранимый разрыв в точке (x_0, y_0) . Обозначим .

$$\begin{aligned} \psi(t, s) = & d_{++}(f, x_0, y_0)\chi_{y_0}(s)\chi_{x_0}(t) + d_{-+}(f, x_0, y_0)\chi_{y_0}(s)(1 - \chi_{x_0}(t)) + \\ & + d_{+-}(f, x_0, y_0)(1 - \chi_{y_0}(s))\chi_{x_0}(t) + d_{--}(f, x_0, y_0)(1 - \chi_{y_0}(s))(1 - \chi_{x_0}(t)). \end{aligned}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} A_0 = d_{--}(f, x_0, y_0), \\ A_1 = d_{+-}(f, x_0, y_0) - d_{--}(f, x_0, y_0), \\ A_2 = d_{-+}(f, x_0, y_0) - d_{--}(f, x_0, y_0), \\ A_3 = d_{++}(f, x_0, y_0) - d_{-+}(f, x_0, y_0) - d_{+-}(f, x_0, y_0) + d_{--}(f, x_0, y_0) \end{cases} \quad (19)$$

равносильна уравнению $A = Cd$, где

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_{--}(f, x_0, y_0) \\ d_{+-}(f, x_0, y_0) \\ d_{-+}(f, x_0, y_0) \\ d_{++}(f, x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Точка (x_0, y_0) является точкой устранимого разрыва для функции $f(x, y) - \psi(x, y)$. Согласно теореме 2, частичные суммы двойных рядов Фурье-Уолша функции $f(x, y) - \psi(x, y)$ равномерно сходятся к нулю в точке (x_0, y_0) . Следовательно

$$\overline{P}(f, x_0, y_0) = \overline{P}(\psi, x_0, y_0), \quad \underline{P}(f, x_0, y_0) = \underline{P}(\psi, x_0, y_0). \quad (20)$$

Согласно теореме D имеем

$$[0, 1] \subsetneq [\underline{a}(x_0), \overline{a}(x_0)], \quad [0, 1] \subsetneq [\underline{a}(y_0), \overline{a}(y_0)]. \quad (21)$$

Пусть $\psi^*(x, y) = A_3xy + A_2y + A_1x + A_0$ и $I(\cdot) = [\underline{a}(\cdot), \bar{a}(\cdot)]$. Тогда из пункта а) замечания 1 следует, что

$$\bar{P}(\psi, x_0, y_0) = \max_{(x,y) \in I(x_0) \times I(y_0)} \psi^*(x, y) = \max_{(x,y) \in \partial I(x_0) \times \partial I(y_0)} \psi^*(x, y), \quad (22)$$

$$\underline{P}(\psi, x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in I(x_0) \times I(y_0)} \psi^*(x, y) = \min_{(x,y) \in \partial I(x_0) \times \partial I(y_0)} \psi^*(x, y), \quad (23)$$

$$\bar{a}(\psi, x_0, y_0) = \max_{(x,y) \in [0,1]^2} \psi^*(x, y) = \max_{(x,y) \in \partial[0,1] \times \partial[0,1]} \psi^*(x, y), \quad (24)$$

$$\underline{a}(\psi, x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in [0,1]^2} \psi^*(x, y) = \min_{(x,y) \in \partial[0,1] \times \partial[0,1]} \psi^*(x, y), \quad (25)$$

где ∂I обозначает множество концевых точек интервала I . Обозначим

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \underline{a}(x_0) & \underline{a}(y_0) & \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ 1 & \bar{a}(x_0) & \underline{a}(y_0) & \bar{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ 1 & \underline{a}(x_0) & \bar{a}(y_0) & \underline{a}(x_0)\bar{a}(y_0) \\ 1 & \bar{a}(x_0) & \bar{a}(y_0) & \bar{a}(x_0)\bar{a}(y_0) \end{pmatrix}; \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \tilde{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \bar{a}(x_0) - \underline{a}(x_0) & 0 & \bar{a}(x_0)\underline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ 0 & \bar{a}(y_0) - \underline{a}(y_0) & \underline{a}(x_0)\bar{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ \bar{a}(x_0) - \underline{a}(x_0) & \bar{a}(y_0) - \underline{a}(y_0) & \bar{a}(x_0)\bar{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \end{pmatrix}; \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что матрицы D и $\tilde{D}$ обратимы. Допустим противное, тогда существуют действительные числа λ_i , $i = 0, 1, 2, 3$ такие, что $\sum_{i=0}^3 \lambda_i^2 \neq 0$ и

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \underline{a}(x_0) \\ \bar{a}(x_0) \\ \underline{a}(x_0) \\ \bar{a}(x_0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \underline{a}(y_0) \\ \underline{a}(y_0) \\ \bar{a}(y_0) \\ \bar{a}(y_0) \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ \bar{a}(x_0)\underline{a}(y_0) \\ \underline{a}(x_0)\bar{a}(y_0) \\ \bar{a}(x_0)\bar{a}(y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Следовательно, функция $\psi_1(x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 xy$ принимает значение нуль на вершинах прямоугольника $I(x_0) \times I(y_0)$. Из замечания 1 следует, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Это противоречие доказывает, что $\det(D) \neq 0$. Строки матрицы $\tilde{D}$ линейно независимы, так как в противном случае существовали бы действительные числа μ_i , $i = 1, 2, 3$ такие, что $\sum_{i=1}^3 \mu_i^2 \neq 0$ и

$$\begin{aligned} & \mu_1(\bar{a}(x_0) - \underline{a}(x_0), 0, \bar{a}(x_0)\underline{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) + \\ & + \mu_2(0, \bar{a}(y_0) - \underline{a}(y_0), \underline{a}(x_0)\bar{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) + \\ & + \mu_3(\bar{a}(x_0) - \underline{a}(x_0), \bar{a}(y_0) - \underline{a}(y_0), \bar{a}(x_0)\bar{a}(y_0) - \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

и следовательно

$$\begin{aligned}
 & -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(1, \underline{a}(x_0), \underline{a}(y_0), \underline{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) + \\
 & + \mu_1(1, \bar{a}(x_0), \underline{a}(y_0), \bar{a}(x_0)\underline{a}(y_0)) + \\
 & + \mu_2(1, \underline{a}(x_0), \bar{a}(y_0), \underline{a}(x_0)\bar{a}(y_0)) + \\
 & + \mu_3(1, \bar{a}(x_0), \bar{a}(y_0), \bar{a}(x_0)\bar{a}(y_0)) = (0, 0, 0, 0).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Из (27) следует, что строки матрицы D линейно независимы, что противоречит существованию обратной матрицы D^{-1} . Нетрудно видеть, что

$$\tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}(y_0)L^{-1} & \underline{a}(y_0)L^{-1} & -\underline{a}(y_0)L^{-1} \\ \underline{a}(x_0)L^{-1} & \bar{a}(x_0)L^{-1} & -\underline{a}(x_0)L^{-1} \\ -L^{-1} & -L^{-1} & L^{-1} \end{pmatrix},$$

где $L = \sqrt{\det \tilde{D}} = |I(x_0)| \cdot |I(y_0)|$. Из (20), (22) – (25) следует, что

$$\bar{P}(f, x_0, y_0) - \underline{P}(f, x_0, y_0) = \omega(\tilde{D}\tilde{A}), \tag{28}$$

$$\bar{d}(f, x_0, y_0) - \underline{d}(f, x_0, y_0) = \omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{A}). \tag{29}$$

В силу замечания 1 имеем $G(f, x_0, y_0) < 1$. Отсюда и из (28), (29) следует

$$G(f, x_0, y_0) = \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{A})}{\omega(\tilde{D}\tilde{A})} = \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{D}^{-1}z)}{\omega(z)} < 1, \tag{30}$$

где $z = \tilde{D}\tilde{A}$. Множество $\{z \in \mathbb{R}^3 : \omega(z) = 1\}$ компактно в $\mathbb{R}^3$ по норме $\omega(\cdot)$ и $\tilde{C}^{-1}\tilde{D}^{-1}$ является непрерывным оператором. Поэтому из (30) следует, что

$$\|\tilde{C}^{-1}\tilde{D}^{-1}\|_{\omega} < 1. \tag{31}$$

Из (19) вытекает, что (x_0, y_0) является точкой устранимого разрыва тогда и только тогда, когда $\tilde{A} = 0$. Согласно (30) имеем

$$\bar{G}(x_0, y_0) = \sup_{\tilde{A} \neq 0} \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{A})}{\omega(\tilde{D}\tilde{A})} = \sup_{z \neq 0} \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{D}^{-1}z)}{\omega(z)} = \|\tilde{C}^{-1}\tilde{D}^{-1}\|_{\omega}, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{G}(x_0, y_0) &= \left[\sup_f \frac{1}{G(f, x_0, y_0)} \right]^{-1} = \left[\sup_{\tilde{A} \neq 0} \frac{\omega(\tilde{D}\tilde{A})}{\omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{A})} \right]^{-1} = \\
 &= \left[\sup_{z \neq 0} \frac{\omega(\tilde{D}\tilde{C}z)}{\omega(z)} \right]^{-1} = \|\tilde{D}\tilde{C}\|_{\omega}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Из (31) - (33) следует, что

$$0 < \underline{G}(x_0, y_0), \quad \overline{G}(x_0, y_0) < 1.$$

Докажем неравенство $\underline{G}(x_0, y_0) < \overline{G}(x_0, y_0)$. Допустим противное: $\underline{G}(x_0, y_0) = \overline{G}(x_0, y_0)$. Тогда при

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

будем иметь

$$\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}A^1)}{\omega(\tilde{D}A^1)} = \frac{1}{\bar{a}(x_0) - \underline{a}(x_0)} = \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}A^2)}{\omega(\tilde{D}A^2)} = \frac{1}{\bar{a}(y_0) - \underline{a}(y_0)},$$

$$\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{1}{\max\{\bar{a}(x_0)[\bar{a}(y_0) - \underline{a}(y_0)]; \bar{a}(y_0)[\bar{a}(x_0) - \underline{a}(x_0)]\}} = \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}A^3)}{\omega(\tilde{D}A^3)}.$$

Отсюда следует, что $\bar{a}(y_0) = \bar{a}(x_0) = 1$, $\underline{a}(x_0) = \underline{a}(y_0)$. Из теоремы D имеем $|\underline{a}(x_0)| \leq \frac{1}{4}$, следовательно

$$\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{\omega(\tilde{C}^{-1}A^4)}{\omega(\tilde{D}A^4)} = \frac{3}{(1 - \underline{a}(x_0))(3 + \underline{a}(x_0))} \quad \text{и} \quad \underline{a}(x_0) = 0.$$

С другой стороны, имеем $\bar{a}(y_0) = \bar{a}(x_0) = 1$ и $\underline{a}(x_0) = \underline{a}(y_0) = 0$, которое противоречит (21).

Согласно лемме 4, для почти всех (x_0, y_0) имеем

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\omega(\tilde{D}\tilde{C}\tilde{A}) \leq \frac{9}{4}\omega(\tilde{A}), \quad \omega(\tilde{D}\tilde{C}(A^4 - A^3)) = \frac{9}{4}\omega(A^4 - A^3),$$

$$\omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{D}^{-1}\tilde{A}) \leq \frac{2}{3}\omega(\tilde{A}), \quad \omega(\tilde{C}^{-1}\tilde{D}^{-1}A^3) = \frac{2}{3}\omega(A^3).$$

Следовательно, $\overline{G}(x_0, y_0) = \frac{2}{3}$, $\underline{G}(x_0, y_0) = \frac{4}{9}$ для почти всех (x_0, y_0) .

Теорема 4 доказана.

Замечание 3. Если x_0 и y_0 двоично-рациональные, то в точке (x_0, y_0) отсутствует явление Гиббса.

В случае, когда только одна из точек x_0 и y_0 двоично-рациональна, явление Гиббса зависит от функции. Например, в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ для частичных сумм двойного ряда Фурье-Уолша функции

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } 1/2 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{при } 0 \leq x < 1/2, \end{cases}$$

отсутствует явление Гиббса, а для функции

$$f_2(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } \frac{1}{\sqrt{3}} < y \leq 1, \\ 0, & \text{при } 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

в той же точке имеет место явление Гиббса. Автор приносит благодарность профессору Г. Г. Геворкяну за постоянное внимание к работе.

ABSTRACT. In the paper is proved that if an integrable function $f(x, y)$ has bounded harmonic variation and is continuous at each point of a compact K , then the double Fourier-Walsh series of function $f(x, y)$ uniformly convergence on K . Applying this result the Gibbs phenomenon for double Fourier-Walsh series is investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, Москва, 1961.
2. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения, Наука, Москва, 1987.
3. А. А. Саакян, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 22, № 6, стр. 517 - 529, 1987.
4. О. Г. Саргсян, "О сходимости и явление Гиббса для кратных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 1 - 20, 1993.
5. А. М. Зубакин, "Явление Гиббса для мультипликативных систем типа Уолша и типа Виленкина-Джафарли", Сиб. Мат. Журнал, т. 12, № 1, стр. 147 - 157, 1971.
6. Л. А. Балашов, В. А. Скворцов, "Явление Гиббса для системы Уолша", ДАН СССР, т. 268, № 5, стр. 1033 - 1034, 1983.