УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

К. А. Навасардян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
том 30, № 5, 1995

В статье доказывается следующая теорема : пусть $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$–последовательность, удовлетворяющая условию $0 < \varepsilon_{\overline{m}} \le \varepsilon_{\overline{n}}$, если $\overline{m} \ge \overline{n}$ и $\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} \varepsilon_{\overline{n}}^2 = \infty$ для любого $\overline{M}$, то существует функция $f(\overline{x}) \in \bigcap_{p<2} L_p[0,1]^k$ с коэффициентами Фурье–Уолша $|\hat{f}(\overline{n})| \le \varepsilon_{\overline{n}}$, ряд Фурье–Уолша которой является универсальным относительно знаков в классе п.в. конечных измеримых функций, а для некоторого набора знаков $\{\lambda_{\overline{n}}\}$, $\lambda_{\overline{n}} = \pm 1$ ряд $\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} \lambda_{\overline{n}} \hat{f}(\overline{n}) W_{\overline{n}}(\overline{x})$ является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть S – некоторый класс измеримых функций. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

называется *универсальным в S относительно знаков*, если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность знаков $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = \pm 1$, для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится почти всюду (п. в.) к $F(x)$.

Ряд (1) называется *универсальным относительно подрядов в классе S*, если для любой функции $F(x) \in S$ существует последовательность чисел $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n = 0$ или 1, для которой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n f_n(x)$ сходится п. в. к $F(x)$.

Ряд (1) называется *универсальным относительно перестановок в классе S*, если для лйюбой функции $F(x) \in S$ члены ряда (1) можно переставить так, чтобы полученный ряд сходился к $F(x)$ п. в.

Первые примеры (в выше указанных смыслах) универсальных тригонометрических рядов были построены в работах [1] – [5]. Отметим некоторые из них.

Теорема A. *(А. А. Талалян [3]) Существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \tag{2}$$

обладающий следующим свойством : для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $[0,2\pi]$ ($f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры) и для любого натурального N найдется подряд этого ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}\cos n_kx+b_{n_k}\sin n_kx),\quad N<n_1<n_2<\cdots,$$

сходящийся к $f(x)$ п.в. на том множестве, где $f(x)$ конечна и сходящийся к $f(x)$ по мере на $[0,2\pi]$.

В работе [4] Г. М. Мушегяном описан некоторый класс ортогональных систем, для которых существуют универсальные ряды относительно перестановок в классе всех измеримых функций. В частности, в этот класс входят системы Уолша, Хаара и тригонометрическая система.

Теорема B. *(Н. Б. Погосян [8]) Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ -последовательность чисел, удовлетворяющая условиям $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$ и $\{\varepsilon_n\}\notin l_2$. Тогда существует функция $f(x)\in\cap_{p<2}L_p[0,2\pi]$ с коэффициентами Фурье a_n,b_n, $|a_n|+|b_n|\le\varepsilon_n$, $n\ge 1$, для которой тригонометрический ряд (2) является универсальным в классе п.в. конечных измеримых функций, одновременно относительно знаков, перестановок и подрядов.*

Об универсальных ортогональных рядах подробно можно узнать из [6] и [7].

§2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем некоторые обозначения. Пусть $\overline{m}=(m_1,...,m_k)$ и $\overline{n}=(n_1,...,n_k)$- векторы из $\mathbb{N}_0^k$, где $\mathbb{N}_0$ -множество целых неотрицательных чисел. Обозначим через $|\overline{n}|$ сумму $n_1+\cdots+n_k$, а символом $2^{\overline{n}}$ вектор $(2^{n_1},...,2^{n_k})$. Сумму и разность двух векторов, как обычно, будем определять покоординатно, т. е.

$\overline{m} \pm \overline{n} = (m_1 \pm n_1, ..., m_k \pm n_k)$. Если M –неотрицательное целое число, то $\overline{M} = (M, ..., M) \in \mathbb{N}_0^k$. Запись $\overline{m} \leq \overline{n}$ $(\overline{m} < \overline{n})$ будет означать $m_i \leq n_i$ $(m_i < n_i)$ для всех $i = 1, ..., k$. Для $\overline{x} = (x_1, ..., x_k) \in [0,1]^k$ обозначим через $W_{\overline{n}}(\overline{x})$ функцию $W_{n_1}(x_1) \cdots W_{n_k}(x_k)$, где $W_n(x)$ –система Уолша. Положим

$$\sum_{\overline{p}=\overline{n}}^{\overline{m}} \varphi_{\overline{p}}(\overline{x}) = \sum_{p_1=n_1}^{m_1} \cdots \sum_{p_k=n_k}^{m_k} \varphi_{\overline{p}}(\overline{x}).$$

Мы будем рассматривать мажоранту

$$S^*(f, \overline{x}) = \sup_{\overline{n}} \left| \sum_{\overline{p}=\overline{0}}^{\overline{n}} \hat{f}(\overline{p}) W_{\overline{p}}(\overline{x}) \right|,$$

где

$$\hat{f}(\overline{p}) = \int_{[0,1]^k} f(\overline{x}) W_{\overline{p}}(\overline{x})\, d\overline{x}.$$

В настоящей статье мы докажем следующий неполный аналог Теоремы B для кратных рядов по системе Уолша.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\varepsilon_{\overline{n}}\} = \{\varepsilon_{n_1,...,n_k}\}$ *удовлетворяет следующим условиям :* $0 < \varepsilon_{\overline{m}} \leq \varepsilon_{\overline{n}}$ *при* $\overline{m} \geq \overline{n}$ *и* $\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} \varepsilon_{\overline{n}}^2 = \infty$ *для любого* M. *Тогда существует функция* $f(\overline{x}) \in \cap_{p<2} L_p[0,1]^k$, *с коэффициентами Фурье* $|\hat{f}(\overline{n})| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$, *ряд Фурье которой является универсальным относительно знаков в классе п.в. конечных измеримых функций, а для некоторого набора знаков* $\{\gamma_{\overline{n}}\}$, $\gamma_{\overline{n}} = \pm 1$, *ряд*

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} \gamma_{\overline{n}} \hat{f}(\overline{n}) W_{\overline{n}}(\overline{x})$$

является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

Непосредсдственным следствием этой теоремы является следующая теорема, доказанная в работе [9].

Теорема C. *Пусть последовательность* $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ *удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда существует нуль–ряд* $\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} a_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ *с коэффициентами* $|a_{\overline{n}}| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим

$$H = \{\overline{n} \in \mathbb{N}_0^k : n_1 \geq \cdots \geq n_k\}, \quad B(\overline{n}) = 2^{|\overline{n}|}\varepsilon_{2^{\overline{n}}}^2.$$

Для любого M имеем $\sum\limits_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty$. Без ограничения общности можно считать, что для любого M

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ \overline{n}\in H}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty. \tag{3}$$

Рассмотрим следующее подмножество $H_1 = \left\{\overline{n} \in H : B(\overline{n}) > 2^{-|\overline{n}|/(2k)}\right\}$. Ясно, что

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{0} \\ \overline{n}\in H\setminus H_1}}^{\infty} B(\overline{n}) \leq \sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} 2^{-\frac{|\overline{n}|}{2k}} = \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{-\frac{n_1}{2k}} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} 2^{-\frac{n_k}{2k}} < \infty.$$

Поэтому для любого M (см. также (3)) $\sum\limits_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ \overline{n}\in H_1}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty$. Нетрудно убедиться, что существует последовательность $\{\alpha_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in H_1}$, $0 < \alpha_{\overline{n}} \leq 1$, удовлетворяющая следующим условиям :

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ \overline{n}\in H_1}}^{\infty} \alpha_{\overline{n}} B(\overline{n}) = \infty \quad \text{для каждого} M, \tag{4}$$

$$\lim_{\substack{\overline{n}\to\infty \\ \overline{n}\in H_1}} \alpha_{\overline{n}} B(\overline{n}) = 0, \quad \alpha_{\overline{n}} B(\overline{n}) \geq 2^{-\frac{|\overline{n}|}{2k}}, \quad \overline{n} \in H_1.$$

Для $2^{\overline{n}-\overline{1}} \leq \overline{m} < 2^{\overline{n}}$, $\overline{n} \in H_1$ обозначим

$$\sigma_{\overline{m}} = \sqrt{\alpha_{\overline{n}}}\varepsilon_{2^{\overline{n}}}. \tag{5}$$

Очевидно, что $\sigma_{\overline{m}} \leq \varepsilon_{\overline{m}}$ (при условии, что $\sigma_{\overline{m}}$ существует) и для любого M (см. (4) и (5))

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ (\overline{n}+\overline{1})\in H_1}}^{\infty} 2^{|\overline{n}|}\sigma_{2^{\overline{n}}}^2 = \sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ (\overline{n}+\overline{1})\in H_1}}^{\infty} 2^{|\overline{n}|}\alpha_{\overline{n}+\overline{1}}\varepsilon_{2^{\overline{n}+\overline{1}}}^2 = \infty.$$

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что для последовательности $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ существует множество $G \subset H$, для которого выполняются следующие условия :

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M} \\ \overline{n}\in G}}^{\infty} B(\overline{n}) = \infty \quad \text{для любого} M, \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{\overline{n}\to\infty\\ \overline{n}\in G}} B(\overline{n})=0,\quad B(\overline{n})\geq 2^{-\frac{|\overline{n}|}{2k}},\quad \text{когда}\quad \overline{n}\in G, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{\overline{m}}=\varepsilon_{2^{\overline{n}}},\quad \text{если}\quad 2^{\overline{n}}\leq\overline{m}<2^{\overline{n}+\overline{1}},\ \overline{n}\in G. \tag{8}$$

(Если одно из условий (6) – (8) не выполняется, то вместо $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ можно взять последовательность $\{\sigma_{\overline{m}}\}$, а $G=\{\overline{n}\in\mathbb{N}_0^k:(\overline{n}+\overline{1})\in H_1\}$).

Существуют натуральные числа $\{r_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in G}$, $r_{\overline{n}}\to\infty$ такие, что

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{2^{\overline{n}}}<2^{-r_{\overline{n}}}\leq\varepsilon_{2^{\overline{n}}},\quad \overline{n}\in G.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\varepsilon_{\overline{0}}=1,\quad \varepsilon_{2^{\overline{n}}}=2^{-r_{\overline{n}}},\quad \overline{n}\in G. \tag{9}$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ \overline{n}\in G}}^{\infty} 2^{-2r_{\overline{n}}+|\overline{n}|}=\infty\quad \text{для любого} M, \tag{10}$$

$$\lim_{\substack{\overline{n}\to\infty\\ \overline{n}\in G}}\left[|\overline{n}|-2r_{\overline{n}}\right]=-\infty, \tag{11}$$

$$|\overline{n}|-2r_{\overline{n}}\geq-\frac{|\overline{n}|}{2k}\geq-\frac{n_1}{2},\quad \overline{n}\in G. \tag{12}$$

Мы будем предполагать также, что

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ \overline{n}\in B}}^{\infty} 2^{-2r_{\overline{n}}+|\overline{n}|}=\infty\quad \text{для любого} M, \tag{13}$$

где $B=\{\overline{n}\in G:n_1\ -\text{четное}\ \}$. В случае, когда ряд (13) сходится, для любого M ряд

$$\sum_{\substack{\overline{n}=\overline{M}\\ \overline{n}\in G\setminus B}}^{\infty} 2^{|\overline{n}|-2r_{\overline{n}}-1}$$

расходится, и всегда вместо (13) мы можем рассматривать этот ряд.

Следующая лемма доказана в [9].

Лемма 1. *Для любого интервала* $I = \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}\right]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \le i < 2^\sigma$ *и для любого натурального* $n > \sigma$, *где* $n - \sigma$ *-четное число, существует полином по системе Уолша* $P(x) = \sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} W_n^{(k)}(x)$ *такой, что*

1. $|a_n^{(k)}| = 2^{-(n+\sigma)/2} = (2^{-n}\mu I)^{1/2}, \quad 1 \le k \le 2^n,$
2. $P(x) = 1, \quad$ *если* $\quad x \in E_1 \subset I, \quad \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu I,$
3. $P(x) = -1, \quad$ *если* $\quad x \in E_2 \subset I, \quad \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu I,$
4. $P(x) = 0, \quad$ *если* $\quad x \notin I,$
5. $S^*(P, x) \le (2^n \mu I)^{-1/2}, \quad$ *если* $\quad x \notin I,$
6. $S^*(P, x) \le C, \quad$ *если* $\quad x \in I,$

причем множества E_1 *и* E_2 *являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а* C *– абсолютная постоянная.*

Пусть множество B, $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ и $\{r_{\overline{n}}\}$ удовлетворяют условиям (8) – (13), тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Для любых неотрицательных целых чисел* i, M, *для любых положительных* η, p, $1 \le p < 2$ *и для любого* k*-мерного куба типа Хаара* Δ, $\mu\Delta = 2^{-k\gamma}$ *существует полином* $P(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ *и числа* $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ *такие, что*

1. $|c_{\overline{n}}| \le 2^{-i}\varepsilon_{\overline{n}}, \quad \overline{M} \le \overline{n} \le \overline{N},$
2. $P(\overline{x}) = 1, \quad$ *когда* $\quad \overline{x} \in E_1 \subset \Delta, \quad \mu E_1 = \frac{1}{2}\mu\Delta,$
3. $P(\overline{x}) = -1, \quad$ *когда* $\quad \overline{x} \in E_2 \subset \Delta, \quad \mu E_2 = \frac{1}{2}\mu\Delta,$
4. $P(\overline{x}) = 0, \quad$ *когда* $\quad \overline{x} \notin \Delta,$
5. $S^*(P, \overline{x}) \le C, \quad$ *когда* $\quad \overline{x} \in \Delta,$
6. $S^*(P, \overline{x}) \le \eta, \quad$ *когда* $\quad \overline{x} \notin \Delta,$
7. $P'(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = 0,$ *когда* $\min_{1 \le i \le k}\{x_i\} > \frac{1}{M},$
8. $S^*(P', \overline{x}) \le \eta, \quad$ *когда* $\quad \min_{1 \le i \le k}\{x_i\} > \frac{2}{M},$
9. $||P'(\overline{x})||_p \le \eta,$

где E_1 и E_2 являются конечными объединениями кубов типа Хаара, а C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Из (12) следует, что существует M_0 такое, что

$$n_1 + |\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i + (k-1)\gamma > 0, \quad \text{когда} \quad \overline{n} \in B,\ \overline{n} > \overline{M}_0. \tag{14}$$

Пусть $1 \le p < 2$ –произвольное число. Выберем M_0 так, чтобы выполнялись и следующие условя (см. (11)) :

$$(Cn_1)^{k-1} 2^{-n_1/4+[2i-(k-1)\gamma]/2} < \frac{\delta}{4}, \quad \text{когда} \overline{n} > \overline{M}_0, \tag{15}$$

$$(2C)^{k-1} 2^{-[n_j-\gamma-1]/2} < \frac{\delta}{4}, \quad \text{когда} \quad \overline{n} > \overline{M}_0,\ j = 2, 3, ..., k, \tag{16}$$

$$|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i < 0, \quad \text{когда}\ \overline{n} > \overline{M}_0, \tag{17}$$

$$\sum_{\overline{n}=\overline{M}_0}^{\infty} 2^{\frac{(p-2)|\overline{n}|}{2p}} < \frac{\eta}{M^k}, \tag{18}$$

где C – постоянная из леммы 1. Из (11) и (13) следует, что существует конечное подмножество $D \subset B$ такое, что

$$\sum_{\overline{n} \in D} 2^{|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i} = \mu\Delta = 2^{-k\gamma} \tag{19}$$

и

$$\min\{n_k : \overline{n} = (n_1, ..., n_k) \in D\} > \max\{\log_2 M,\ \gamma + 1,\ M_0\}. \tag{20}$$

Из (19) следует, что куб Δ является конечным объединением k–мерных прямоугольников типа Хаара

$$\Delta = \bigcup_{\overline{n} \in D} I_{\overline{n}} = \bigcup_{\overline{n} \in D} \left(I_{\overline{n}}^{(1)} \times \cdots \times I_{\overline{n}}^{(k)} \right),$$

где $I_{\overline{n}}^{(j)}$, $j = 1, ..., k$ –интервалы типа Хаара, $\mu I_{\overline{n}} = 2^{|\overline{n}| - 2r_{\overline{n}} - 2i}$, $\mu I_{\overline{n}}^{(j)} = 2^{-\gamma}$, если $n_j - \gamma$ –четное и $\mu I_{\overline{n}}^{(j)} = 2^{-\gamma-1}$, если $n_j - \gamma$ –нечетное, $j = 2, ..., k$ и

$$\mu I_{\overline{n}}^{(1)} = \mu I_{\overline{n}} \left(\prod_{j=2}^{k} \mu I_{\overline{n}}^{(j)} \right)^{-1}.$$

Пусть $\overline{n} \in D$ фиксировано. Из (20) и (14) следует, что для $j = 1, ..., k$ к $I_{\overline{n}}^{(j)}$ и n_j (напомним, что n_1 – четное, так как $\overline{n} \in D \subset B$) применима лемма 1. В итоге получаем полиномы

$$P_{j\overline{n}}(x_j) = \sum_{m=1}^{2^{n_j}} a_{j\overline{n}}^{(m)} W_{n_j}^{(m)}(x_j), \quad j = 1, ..., k,$$

которые удовлетворяют условиям

a) $|a_{j\overline{n}}^{(m)}| = \left[2^{-n_j} \mu I_{\overline{n}}^{(j)}\right]^{1/2}, \quad 1 \leq m \leq 2^{n_j}, \quad j = 1, ..., k,$

b) $P_{j\overline{n}}(x_j) = 1, \quad$ когда $\quad x_j \in E'_{j\overline{n}} \subset I_{\overline{n}}^{(j)}, \quad \mu E'_{j\overline{n}} = \frac{1}{2} \mu I_{\overline{n}}^{(j)},$

c) $P_{j\overline{n}}(x_j) = -1, \quad$ когда $\quad x_j \in E''_{j\overline{n}} \subset I_{\overline{n}}^{(j)}, \quad \mu E''_{j\overline{n}} = \frac{1}{2} \mu I_{\overline{n}}^{(j)},$

d) $P_{j\overline{n}}(x_j) = 0, \quad$ когда $\quad x_j \notin I_{\overline{n}}^{(j)},$

e) $S^*(P_{j\overline{n}}, x_j) \leq \left[2^{n_j} \mu I_{\overline{n}}^{(j)}\right]^{-1/2}, \quad$ когда $\quad x_j \notin I_{\overline{n}}^{(j)},$

f) $S^*(P_{j\overline{n}}, x_j) \leq C, \quad$ когда $\quad x_j \in I_{\overline{n}}^{(j)},$

где $E'_{\overline{n}}$ и $E''_{\overline{n}}$, $j = 1, ..., k$ являются конечными объединениями интервалов типа Хаара, а C – абсолютная постоянная. Рассмотрим следующий полином

$$P(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{\overline{n} \in D} \left(\prod_{j=1}^{k} P_{j\overline{n}}(x_j) \right). \tag{21}$$

Из (8), (9), (21) и a) следует, что $|c_{\overline{n}}| \leq 2^{-i} \varepsilon_{\overline{n}}$, $\overline{M} \leq \overline{n} \leq \overline{N}$. Из b) – d) и (21) получаем, что $P(\overline{x})$ удовлетворяет условиям 2 – 4 леммы 2.

Пусть $\overline{q} = (q_1, ..., q_k) \in \mathbb{N}_0^k$. Обозначим $\alpha_{j\overline{n}} = \min\{2^{n_j}, q_j - 2^{n_j} + 1\}$, $j = 1, ..., k$, тогда

$$\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{q}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = J_1(\overline{x}) + J_2(\overline{x}) + J_3(\overline{x}), \tag{22}$$

где

$$J_1(\overline{x}) = \sum_{\substack{\overline{n} \in D \\ 2^{\overline{n}+\overline{1}} \leq \overline{q}}} \sum_{m_1=1}^{2^{n_1}} \cdots \sum_{m_k=1}^{2^{n_k}} \Omega, \quad J_2(\overline{x}) = \sum_{\substack{\overline{n} \in D, 2^{\overline{n}+\overline{1}} \nleq \overline{q} \\ 2^{n_1+1} \leq q_1, 2^{\overline{n}} \leq \overline{q}}} \sum_{m_1=1}^{2^{n_1}} \sum_{m_2=1}^{\alpha_{2\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{\alpha_{k\overline{n}}} \Omega,$$

$$J_3(\overline{x}) = \sum_{\substack{\overline{n} \in D, 2^{\overline{n}} \leq \overline{q} \\ 2^{n_1+1} > q_1 \geq 2^{n_1}}} \sum_{m_1=1}^{\alpha_{1\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{\alpha_{k\overline{n}}} \Omega,$$

$$\Omega = \left(a_{1\overline{n}}^{(m_1)} \cdots a_{k\overline{n}}^{(m_k)} W_{n_1}^{(m_1)}(x_1) \cdots W_{n_k}^{(m_k)}(x_k)\right).$$

Пусть $\overline{x} \notin \Delta$. Очевидно (см. d)), что $J_1(\overline{x}) = 0$. Так как x_1 может принадлежать не более, чем 2^{k-1} интервалам $I_{\overline{n}}^{(1)}, \overline{n} \in D$ (это следует из способа дробления куба Δ), то количество ненулевых слагаемых в J_2 не превосходит 2^{k-1}. Для таких $\overline{n}$ из $\overline{x} \notin \Delta$ следует, что для некоторого g, $1 < g \le k$, $x_g \notin I_{\overline{n}}^{(g)}$. Поэтому из b) и c) (если $j = 1$), e) (если $j = g$) и f) получаем

$$|J_2(\overline{x})| \le 2^{k-1} C^{k-2} \left(2^{n_g} \mu I_{\overline{n}}^{(g)}\right)^{-1/2} \le C^{k-2} 2^{-(n_g - \gamma - 1)/2 + k - 1}. \tag{23}$$

Из (16), (20) и (23) следует, что

$$|J_2(\overline{x})| \le \frac{\eta}{4}. \tag{24}$$

Разобьем J_3 на две части

$$J_3(\overline{x}) = J_3'(\overline{x}) + J_3''(\overline{x}), \tag{25}$$

где

$$J_3'(\overline{x}) = \sum_{T} \sum_{m_1=1}^{a_{1\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{a_{k\overline{n}}} \Omega, \quad T = \left\{\overline{n} \in D,\ 2^{\overline{n}} \le \overline{q},\ 2^{n_1} \le q_1 < 2^{n_1+1},\ x_1 \in I_{\overline{n}}^{(1)}\right\},$$

$$J_3''(\overline{x}) = \sum_{\overline{T}} \sum_{m_1=1}^{a_{1\overline{n}}} \cdots \sum_{m_k=1}^{a_{k\overline{n}}} \Omega, \quad \overline{T} = \left\{\overline{n} \in D,\ 2^{\overline{n}} \le \overline{q},\ 2^{n_1} \le q_1 < 2^{n_1+1},\ x_1 \notin I_{\overline{n}}^{(1)}\right\}.$$

Так как $\overline{x} \notin \Delta$, то из $x_1 \in I_{\overline{n}}^{(1)}$ следует, что для некоторого $g = 2, ..., k$, $x_g \notin I_{\overline{n}}^{(g)}$. Но число таких $\overline{n} \in D$, для которых $x_1 \in I_{\overline{n}}^{(1)}$ не более чем 2^{k-1}. Поэтому из (16), (20), (25), e) ($j = g$) и f) получаем

$$|J_3'(\overline{x})| \le 2^{k-1} C^{k-1} \left(2^{n_g} \mu I_{\overline{n}}^{(g)}\right)^{-1/2} \le (2C)^{k-1} 2^{-(n_g - \gamma - 1)/2} < \frac{\eta}{4}. \tag{26}$$

Поскольку $n_1 \ge \cdots \ge n_k$ при $\overline{n} \in D \subset B$, то количество слагаемых в J_3'' не превосходит n_1^{k-1} (заметим, что при фиксированном $\overline{q}$ число n_1 тоже фиксировано). Следовательно (см. e) (j=1) и f))

$$|J_3''(\overline{x})| \le n_1^{k-1} C^{k-1} \left(2^{n_1} \mu I_{\overline{n}}^{(1)}\right)^{-1/2} \le (n_1 C)^{k-1} 2^{-[n_1 + (k-1)\gamma + |\overline{n}|]/2 + r_{\overline{n}} + i}. \tag{27}$$

Из (12), (15), (20) и (27) получаем

$$|J_3''(\overline{x})| \leq (n_1 C)^{k-1} 2^{-\frac{n_1}{4}+\frac{2i-(k-1)\gamma}{2}} < \frac{\eta}{4}. \tag{28}$$

Из (22), (24) – (26) и (28) следует, что $S^*(P,\overline{x}) < \eta$, есл $\overline{x} \notin \Delta$.

Пусть теперь $\overline{x} \in \Delta$. Из b) – d) следует, что

$$J_1(\overline{x}) = 1 \quad \text{или} \quad J_1(\overline{x}) = 0. \tag{29}$$

Из b) – d) (для $j = 1$) и f) получаем

$$|J_2(\overline{x})| \leq (2C)^{k-1}, \tag{30}$$

так как x_1 может принадлежать не более чем 2^{k-1} интервалам $I_{\overline{n}}^{(1)}$, $\overline{n} \in D$. Следовательно, из b) – d), e) (для $j = 1$) и f) имеем

$$|J_3(\overline{x})| \leq |J_3'(\overline{x})| + |J_3''(\overline{x})| \leq (2C)^{k-1} + \sum_{\substack{\overline{n}\in D \\ 2^{n_1} \leq q_1 < 2^{n_1+1}}} \left(2^{n_1}\mu I_{\overline{n}}^{(1)}\right)^{-1/2} C^{k-1}. \tag{31}$$

Поскольку $n_1 \geq \cdots \geq n_k$ при $\overline{n} \in D \subset B$, то количество слагаемых в правой части (31) не превосходит n_1^{k-1}. Следовательно, из (12), (15), (20) и (31) получаем

$$\begin{aligned} |J_3(\overline{x})| &\leq (2C)^{k-1} + (n_1 C)^{k-1} 2^{-[n_1+(k-1)\gamma+|\overline{n}|]/2+r_{\overline{n}}+i} \leq \\ &\leq (2C)^{k-1} + (n_1 C)^{k-1} 2^{-\frac{n_1}{4}+\frac{2i-(k-1)\gamma}{2}} \leq C_1, \end{aligned} \tag{32}$$

где C_1 – абсолютная постоянная.

Известно, что функции системы Хаара выражаются функциями системы Уолша : $\chi_0^{(0)}(t) = W_0^{(0)}(t)$, а для $n = 0, 1, ..., 1 \leq k \leq 2^n$,

$$\chi_n^{(k)}(t) = 2^{-n/2} \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_n^{(m)}(t), \quad \varepsilon_{k,m}^{(n)} = \pm 1. \tag{33}$$

Из a), (21) и (33) следует, что существуют $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что

$$P'(\overline{x}) \equiv \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in D} \left(\prod_{j=1}^{k} |a_{j\overline{n}}^{(1)}| 2^{n_j/2} \chi_{n_j}^{(1)}(x_j) \right). \tag{34}$$

Ясно, что $P'(\overline{x}) = 0$, когда $\min\limits_{1\leq j\leq k}\{x_j\} > \frac{1}{M}$. Из a), (17), (18), (20) и (34) получаем

$$\|P'(\overline{x})\|_p \leq \sum_{\overline{n}\in D} 2^{-r_{\overline{n}}-i+|\overline{n}|/2} \left\| \prod_{j=1}^{k} \chi_{n_j}^{(1)}(x_j) \right\|_p \leq \sum_{\overline{n}\in D} 2^{\frac{|\overline{n}|(p-2)}{2p}} < \frac{\eta}{M^k} \leq \eta. \tag{35}$$

Для доказательства утверждения 8 будем пользоваться следующей теоремой.

Теорема D. *(см. [10]) Пусть $f \in L_1[0,1]^k$ и $f(\overline{x}) = 0$ вне некоторого k-мерного прямоугольника $\Delta = \prod_{j=1}^{k} \Delta_j$. Тогда*

$$S^*(f,\overline{x}) \le C\frac{\|f(\overline{x})\|_1}{d(\overline{x},\Delta)}, \quad d(\overline{x},\Delta) = \prod_{j=1}^{k} \rho(x_j,\Delta_j),$$

где C–абсолютная постоянная и $\rho(x_j,\Delta_j)$–расстояние точки x_i до интервала Δ_i.

В силу монотонности L_p-норм ($\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2}$ если $p_1 \le p_2$), из (35) и теоремы D получаем утверждение 8. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого натурального числа M, для любых чисел $l,\eta > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $1 \le p \le 2$ и для любого k-мерного куба типа Хаара Δ существуют полином $P(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}} b_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$, множество $E \subset \Delta$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что*

1. $|b_{\overline{n}}| \le \varepsilon_{\overline{n}}, \quad \overline{M} \le \overline{n} \le \overline{N}$,
2. $P(\overline{x}) = l$, когда $\overline{x} \in E$, $\mu E > (1-\varepsilon)\mu\Delta$,
3. $P(\overline{x}) = 0$, когда $\overline{x} \notin \Delta$,
4. $S^*(P,\overline{x}) \le C\dfrac{|l|}{\varepsilon}$, когда $\overline{x} \in \Delta$, где C –абсолютная постоянная,

и утверждения 6 – 9 леммы 2 имеют место.

Доказательство. Обозначим $\alpha = [\log_2 \varepsilon^{-1}] + 1$. В силу леммы 2 существуют полином $P_1(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\overline{N}_1} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что

1. $|c_{\overline{n}}| \le \dfrac{1}{|l|}\varepsilon_{\overline{n}}, \quad \overline{M} \le \overline{n} \le \overline{N}_1$,
2. $P_1(\overline{x}) = 1$, когда $\overline{x} \in E_1' \subset \Delta$, $\mu E_1' = \dfrac{1}{2}\mu\Delta$,
3. $P_1(\overline{x}) = -1$, когда $\overline{x} \in E_1 \subset \Delta$, $\mu E_1 = \dfrac{1}{2}\mu\Delta$,

и соответствующие утверждения 4 – 9 леммы 2 с $\eta = \frac{\varepsilon}{\alpha|l|}$ имеют место.

Пусть полиномы $P_1(\overline{x}),..., P_{m-1}(\overline{x})$ и множества $E_1,..., E_{m-1}$ уже построены и $E_{m-1} = \cup_{i=1}^{\nu_m}\Delta_{im}$, где Δ_{im} – k-мерный куб типа Хаара, $i = 1,...,\nu_m$. В силу леммы 2, для каждого i, $i = 1,...,\nu_m$ существуют полином $P_{im}(\overline{x}) =$
$= \sum_{\overline{n}=\overline{M}_{im}}^{\overline{N}_{im}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$, $\overline{M}_{im} \le \overline{n} \le \overline{N}_{im}$, $M_{im} > N_{i-1,m}$, $N_{0m} = N_{m-1}$ такие, что

1'. $|c_{\overline{n}}| \le \dfrac{1}{2^{m-1}|l|}\varepsilon_{\overline{n}}$,

2'. $P_{im}(\overline{x}) = 1$, когда $\overline{x} \in E'_{im} \subset \Delta_{im}$, $\mu E'_{im} = \dfrac{1}{2}\mu\Delta_{im}$,

3'. $P_{im}(\overline{x}) = -1$, когда $\overline{x} \in E_{im} \subset \Delta_{im}$, $\mu E_{im} = \dfrac{1}{2}\mu\Delta_{im}$,

4'. $P_{im}(\overline{x}) = 0$, когда $\overline{x} \notin \Delta_{im}$,

5'. $S^*(P_{im}, \overline{x}) \le C$, когда $\overline{x} \in \Delta_{im}$,

6'. $S^*(P_{im}, \overline{x}) < \min\left\{\dfrac{C}{\nu_m}, \dfrac{\eta}{2^{m-1}\alpha|l|\nu_m}\right\}$, когда $\overline{x} \notin \Delta_{im}$,

7'. $P'_{im}(\overline{x}) \equiv \displaystyle\sum_{\overline{n}=\overline{M}_{im}}^{\overline{N}_{im}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = 0$, когда $\displaystyle\min_{1\le j\le k}\{x_j\} > \dfrac{1}{M_{im}}$,

8'. $S^*(P'_{im}, \overline{x}) < \dfrac{\eta}{2^{m-1}\alpha|l|\nu_m}$, когда $\displaystyle\min_{1\le j\le k}\{x_j\} > \dfrac{2}{M_{im}}$,

9'. $||P'_{im}(\overline{x})||_p < \dfrac{\eta}{2^{m-1}\alpha|l|\nu_m}$.

Обозначим

$$P_m(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu_m} P_{im}(\overline{x}), \quad P'_m(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{\nu_m} P'_{im}(\overline{x}), \quad E_m = \bigcup_{i=1}^{\nu_m} E_{im}.$$

Нетрудно убедиться, что полиномы

$$P(\overline{x}) = \sum_{m=1}^{\alpha} 2^{m-1} l P_m(\overline{x}), \quad P'(\overline{x}) = \sum_{m=1}^{\alpha} 2^{m-1} l P'_m(\overline{x})$$

и множество $E = \Delta \setminus E_\alpha$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.

Лемма 3 доказана.

Рассмотрим множество $\{(\Delta, l, \varepsilon)\}$, зависящее от трех параметров : Δ пробегает все k-мерные кубы типа Хаара, l пробегает множество всех рациональных чисел, а ε – множество положительных рациональных чисел. Пронумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности

$$(\Delta_1, l_1, \varepsilon_1), ..., (\Delta_m, l_m, \varepsilon_m), ... \tag{36}$$

Возьмем последовательности положительных чисел $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$, где

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \cdots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \infty, \tag{37}$$

$$1 \le q_1 < q_2 < \cdots, \quad \lim_{m\to\infty} q_m = 2. \tag{38}$$

В силу леммы 3, для любого $m = 1, 2, ...$ существуют полином $P_m(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}_m+\overline{1}}^{\overline{M}_{m+1}} b_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x})$, множество $E_m \subset \Delta_m$ и числа $\delta_{\overline{n}} = \pm 1$ такие, что

A) $|b_{\overline{n}}| \le \varepsilon_{\overline{n}}, \quad \overline{M}_m \le \overline{n} \le \overline{M}_{m+1},$

B) $P_m(\overline{x}) = l_m, \quad$ когда $\quad \overline{x} \in E_m, \quad \mu E_m > (1-\varepsilon_m)\mu\Delta_m,$

C) $P_m(\overline{x}) = 0, \quad$ когда $\quad \overline{x} \notin \Delta_m,$

D) $S^*(P_m, \overline{x}) \le C\dfrac{|l_m|}{\varepsilon_m}, \quad$ когда $\quad \overline{x} \in \Delta_m,$

E) $S^*(P_m, \overline{x}) < \eta_m, \quad$ когда $\quad \overline{x} \notin \Delta_m,$

F) $P'_m(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}_m+\overline{1}}^{\overline{M}_{m+1}} \delta_{\overline{n}} c_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) = 0$, когда $\min\limits_{1\le i\le k}\{x_i\} > \dfrac{1}{M_m+1},$

G) $S^*(P'_m, \overline{x}) < \eta_m, \quad$ когда $\quad \min\limits_{1\le i\le k}\{x_i\} > \dfrac{2}{M_m+1},$

H) $||P'_m(\overline{x})||_{q_m} < \eta_m.$

Положим

$$G_m = \left\{\overline{x} \in [0,1]^k : \min_{1\le i\le k}\{x_i\} > \frac{2}{M_m}\right\}, \quad m = 1, 2, ... \tag{39}$$

Поскольку $M_{m+1} > M_m$, $m = 1, 2, ...$, то, очевидно, что

$$G_{m-1} \subset G_m, \quad \mu G_m \to 1 \quad \text{при } m \to \infty \tag{40}$$

и

$$P'_n(\overline{x}) = 0 \quad \text{при} \quad n \ge m, \ \overline{x} \in G_m. \tag{41}$$

Лемма 4. *Пусть $\varphi(x)$ –п.в.конечная измеримая функция, определенная на $[0,1]^k$. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$, $\delta > 0$ –произвольные числа, а m –произвольное натуральное число. Тогда существуют натуральные числа $m_1, ..., m_j$, $m < m_1 < \cdots < m_j$ и множество E, удовлетворяющие условиям :*

a) $E \subset [0,1]^k, \quad \mu E > 1 - 2\varepsilon,$

b) $\left|\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}(\overline{x}) - \varphi(\overline{x})\right| < \delta \quad$ *для всех* $\quad \overline{x} \in E,$

c) $S^*\left(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, \overline{x}\right) \le C\dfrac{|\varphi(\overline{x})|}{\varepsilon} + \varepsilon$ *для всех* $\overline{x} \in E$, *где* C *–абсолютная постоянная.*

Доказательство. Легко видеть, что существуют конечное разбиение куба $[0,1]^k$ на попарно непересекающиеся кубы типа Хаара $\Delta'_1, ..., \Delta'_j$ и множество E_0 такие, что

$$E_0 \subset [0,1]^k, \quad \mu E_0 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{42}$$

$$|\varphi(\overline{x})| \ge |l'_i| \quad \text{при} \quad \overline{x} \in \Delta'_i \cap E_0, \ i = 1, ..., j, \tag{43}$$

$$|\varphi(\overline{x}) - l'_i| < \delta \quad \text{при} \quad \overline{x} \in \Delta'_i \cap E_0, \ i = 1, ..., j. \tag{44}$$

Для фиксированного i, $1 \le i \le j$ существует подпоследовательность $(\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_1})$, ..., $(\Delta'_i, l'_i, \varepsilon_{k_n})$, ..., последовательности (36) такая, что

$$\varepsilon_{k_n} \ge \varepsilon, \quad n = 1, 2, ... \quad \text{и} \quad \varepsilon_{k_n} \to \varepsilon \text{ при } \quad n \to \infty. \tag{45}$$

Применяя условия B) – E) для $m = k_n$ с достаточно большим индексом n, в силу (37) (43) и (45) для $m_i = k_n > m_{i-1}$ получаем

$$P_{m_i}(\overline{x}) = l'_i \quad \text{когда} \quad \overline{x} \in E_{m_i}, \tag{46}$$

где

$$E_{m_i} \subset \Delta'_i, \quad \mu E_{m_i} > (1 - \varepsilon_{k_n})\mu\Delta'_i > (1 - \varepsilon)\mu\Delta'_i - \frac{\varepsilon}{2j}, \tag{47}$$

$$P_{m_i}(\overline{x}) = 0, \quad \text{когда} \quad \overline{x} \notin \Delta'_i, \tag{48}$$

$$S^*(P_{m_i}, \overline{x}) < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad \overline{x} \notin \Delta'_i, \tag{49}$$

$$S^*(P_{m_i}, \overline{x}) \le C\frac{|l'_i|}{\varepsilon_{k_n}} \le C\frac{|\varphi(\overline{x})|}{\varepsilon}, \quad \text{когда} \quad \overline{x} \in \Delta'_i \cap E_0. \tag{50}$$

Обозначим

$$E = E_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{j} E_{m_i}\right). \tag{51}$$

Из (47) следует, что

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{j} E_{m_i}\right) = \sum_{i=1}^{j} \mu E_{m_i} > (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{j} \mu\Delta_i' - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Поэтому, с учетом (42) и (51), получаем $\mu E > 1 - 2\varepsilon$. Из (46) – (48), (44) и (51) следует утверждение b).

Поскольку $\overline{M}_{m_i} < \overline{n} \leq \overline{M}_{m_{i+1}}$ как только $\hat{P}_{m_i}(\overline{n}) \neq 0$, то для любого $\overline{x} \in E$ существуют $i_0 \in \mathbb{N}$ и $\overline{Q} \in \mathbb{N}_0^k$ такие, что

$$S^*\left(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, \overline{x}\right) = J_1(\overline{x}) + J_2(\overline{x}), \tag{52}$$

где

$$J_1(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{i_0-1} P_{m_i}(\overline{x}), \quad J_2(\overline{x}) = \sum_{\overline{n}=\overline{M}_{m_{i_0}}}^{\overline{Q}} b_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}).$$

Пусть $\overline{x} \in \Delta_{j_0}'$. В силу (48) – (50), при $j_0 < i_0$

$$|J_1(\overline{x})| \leq S^*(P_{m_{j_0}}, \overline{x}) \leq C\frac{|\varphi(\overline{x})|}{\varepsilon}, \tag{53}$$

$$|J_2(\overline{x})| \leq S^*(P_{m_{i_0}}, \overline{x}) < \varepsilon.$$

Отсюда следует c).

Если $j_0 \geq i_0$, то (см. (48)) $J_1(\overline{x}) = 0$. В этом случае неравенство c) следует из (49), (50) и (52). Лемма 4 доказана.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} a_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m'(\overline{x}) \tag{54}$$

и докажем, что он удовлетворяет теореме 1. Из (54), A) и F) следует, что $|a_{\overline{n}}| \leq \varepsilon_{\overline{n}}$ для любого $\overline{n} \in \mathbb{N}_0^k$. Из (37), (38), H) и из монотонности L_p-норм следует, что ряд (54) является рядом Фурье некоторой функции из $\cap_{q<2} L_q[0,1]^k$. Выберем последовательность положительных чисел $\{\gamma_m\}$ и i_0 таких, что (см. (40))

$$1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < \infty, \quad \mu G_{i_0} > 1 - \frac{\gamma_1}{4}. \tag{55}$$

Пусть $f(\overline{x})$ – п.в. конечная измеримая функция, определенная на $[0,1]^k$. Тогда $f(\overline{x})-\sum\limits_{m=1}^{i_0} P'_m(\overline{x})$ также п.в. конечна. В силу леммы 4 для

$$\varphi(\overline{x})=f(\overline{x})-\sum_{m=1}^{i_0} P'_m(\overline{x}),\quad \varepsilon=\frac{\gamma_1}{4},\quad \delta=\frac{\gamma_2^2}{4},\quad m=i_0,$$

существуют полином $\sum\limits_{j=1}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(\overline{x})$, $i_0<m_1^0<\cdots<m_{\alpha_0}^0$ и множество E_1 такие, что

$$\mu E_1>1-\frac{\gamma_1}{2} \tag{56}$$

и

$$\left|f(\overline{x})-\sum_{m=1}^{i_0} P'_m(\overline{x})-\sum_{j=1}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(\overline{x})\right|<\frac{\gamma_2^2}{4},\quad \overline{x}\in E_1. \tag{57}$$

Возьмем $i_1>m_{\alpha_0}^0$ так, чтобы выполнялись условия (см. (37) и (40))

$$\sum_{m=i_1}^{\infty}\eta_m<\gamma_2,\quad \mu G_{i_1}>1-\frac{\gamma_2}{4}.$$

Положим

$$J_1=\{1,2,...,i_0,m_1^0,...,m_{\alpha_0}^0\},$$

$$Q_1(\overline{x})=\sum_{m=1}^{i_0} P'_m(\overline{x})+\sum_{j=1}^{\alpha_0} P_{m_j^0}(\overline{x})+\sum_{\substack{m=i_0+1\\ m\notin J_1}}^{i_1} P'_m(\overline{x}), \tag{58}$$

$$E'_1=E_1\cap G_{i_0}. \tag{59}$$

Из (55), (56) и (59) имеем $\mu E'_1>1-\gamma_1$, а из (41), (57) и (58) получаем

$$|f(\overline{x})-Q_1(\overline{x})|<\frac{\gamma_2^2}{4},\quad \text{для всех} \overline{x}\in E'_1.$$

Пусть на p-ом шаге определены число i_p, множество E'_p и полином $Q_p(\overline{x})$ такие, что

$$\sum_{m=i_p}^{\infty}\eta_m<\gamma_{p+1}, \tag{60}$$

$$\mu G_{i_p}>1-\frac{\gamma_{p+1}}{4},\quad \mu E'_p>1-\gamma_p,\quad E'_p\subset G_{i_{p-1}}, \tag{61}$$

$$\left|f(\overline{x})-\sum_{j=1}^{p} Q_j(\overline{x})\right|\leq\frac{\gamma_{p+1}^2}{4},\quad \overline{x}\in E'_p. \tag{62}$$

Положим

$$f_p(\overline{x}) = f(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{p} Q_j(\overline{x}). \tag{63}$$

В силу леммы 4 для

$$\varphi(\overline{x}) = f_p(\overline{x}), \quad \varepsilon = \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \delta = \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}, \quad m = i_p,$$

существуют натуральные числа $i_p < m_1^p < \cdots < m_{\alpha_p}^p$ и множество E_{p+1} такие, что

$$\mu E_{p+1} > 1 - \frac{\gamma_{p+1}}{2}, \tag{64}$$

$$\left| f_p(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(\overline{x}) \right| < \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad \overline{x} \in E_{p+1}, \tag{65}$$

$$S^* \left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, \overline{x} \right) \le C \frac{4|f_p(\overline{x})|}{\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4}, \quad \overline{x} \in E_{p+1}, \tag{66}$$

где C –абсолютная постоянная. Возьмем $i_{p+1} > m_{\alpha_p}^p$ так, чтобы выполнялись условия (см. (37) и (40))

$$\sum_{m=i_{p+1}}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}, \quad \mu G_{i_{p+1}} > 1 - \frac{\gamma_{p+2}}{2}$$

и положим

$$J_{p+1} = \{1, 2, ..., i_p, m_1^p, ..., m_{\alpha_p}^p\},$$

$$Q_{p+1}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}(\overline{x}) + \sum_{\substack{m=i_p+1 \\ m \notin J_{p+1}}}^{i_{p+1}} P'_m(\overline{x}), \tag{67}$$

$$E'_{p+1} = E_{p+1} \cap G_{i_p}, \quad E''_{p+1} = E'_{p+1} \cap E'_p. \tag{68}$$

Из (61), (64) и (68) следует, что

$$\mu E'_{p+1} > 1 - \gamma_{p+1}, \quad \mu E''_{p+1} > 1 - \gamma_p - \gamma_{p+1}. \tag{69}$$

Из (41), (65), (67) и (68) следует, что на множестве E'_{p+1}

$$|f_p(\overline{x}) - Q_{p+1}(\overline{x})| < \frac{\gamma_{p+2}^2}{4}.$$

Поэтому (см. также (63))

$$\left| f(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{p+1} Q_j(\overline{x}) \right| \leq \frac{\gamma_{p+1}^2}{4}, \quad \overline{x} \in E'_{p+1}. \tag{70}$$

Из (62), (63), (66) и (68) получаем, что на множестве E''_{p+1}

$$S^*\left(\sum_{j=1}^{\alpha_p} P_{m_j^p}, \overline{x}\right) \leq C\frac{4\gamma_{p+1}^2}{\gamma_{p+1}} + \frac{\gamma_{p+1}}{4} < (C+1)\gamma_{p+1}. \tag{71}$$

Из G), (39), (40), (60) и (68) имеем, что на множестве E''_{p+1}

$$S^*\left(\sum_{\substack{m=i_p+1 \\ m \notin J_{p+1}}}^{i_{p+1}} P'_m, \overline{x}\right) \leq \sum_{m=i_p+1}^{\infty} S^*(P'_m, \overline{x}) \leq \sum_{m=i_p}^{\infty} \eta_m < \gamma_{p+1}. \tag{72}$$

Следовательно (см. (67), (71) и (72))

$$S^*(Q_{p+1}, \overline{x}) < (C+2)\gamma_{p+1}, \quad \overline{x} \in E''_{p+1}. \tag{73}$$

Рассмотрим множества

$$E'_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E'_p, \quad E''_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{p=m}^{\infty} E''_p, \quad (E'_1 = [0,1]^k).$$

Из (55) и (69) следует, что $\mu E'_0 = \mu E''_0 = 1$. Следовательно, учитывая также (55), (70) и (73), получаем, что ряд

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} a'_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(\overline{x})$$

сходится к $f(\overline{x})$ на множестве $E'_0 \cap E''_0$, $\mu(E'_0 \cap E''_0) = 1$.

Аналогично можно доказать, что ряд

$$\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} b'_{\overline{n}} W_{\overline{n}}(\overline{x}) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(\overline{x})$$

является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

Теорема 1 доказана.

ABSTRACT. In the paper we prove the following theorem. Let $\{\varepsilon_{\overline{n}}\}$ be a sequence satisfying the condition $0 < \varepsilon_{\overline{m}} \le \varepsilon_{\overline{n}}$, if $\overline{m} \ge \overline{n}$ and $\sum_{\overline{n}=\overline{M}}^{\infty} \varepsilon_{\overline{n}}^2 = \infty$ for any $\overline{M}$. Then there exists a function $f(\overline{x}) \in \bigcap_{p<2} L_p[0,1]^k$ with Fourier-Walsh coefficients $|\hat{f}(\overline{n})| \le \varepsilon_{\overline{n}}$, the Fourier-Walsh series of which is a universal relative to signs in the class of a.e. finite functions, and there exists a sequence $\{\lambda_{\overline{n}}\}$, $\lambda_{\overline{n}} = \pm 1$ such that the series $\sum_{\overline{n}=\overline{0}}^{\infty} \lambda_{\overline{n}} \hat{f}(\overline{n}) W_{\overline{n}}(\overline{x})$ is a universal relative to subseries in the class of a.e. finite functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов, "Об универсальных тригонометрических рядах", ДАН СССР, т. 49, стр. 79 – 82, 1945.
2. Д. Е. Меньшов, "О частных суммах тригонометрических рядах", Мат. сборник, т. 20(62), стр. 197 – 237, 1947.
3. А. А. Талалян, "Тригонометрические ряды универсальные относительно подрядов", Изв. АН СССР, сер. мат., т. 27, № . 3, стр. 621 – 660, 1963.
4. Г. М. Мушегян, "Об универсальности рядов относительно перестановок", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 12, № . 4, стр. 278 – 302, 1977.
5. Н. Б. Погосян, "Представление измеримых функций ортогональными рядами", Мат. сборник, т. 98(140), стр. 102 – 112, 1975.
6. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", Успехи Мат. Наук, т. 15, № . 5(95), стр. 77 – 141, 1960.
7. А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, "Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций ", Успехи Мат. Наук, т. 47, № 5(287), стр. 15 – 44, 1992.
8. Н. Б. Погосян, "Об универсальных рядах Фурье", Успехи Мат. Наук, т. 38, № 1, стр. 185 – 186, 1983.
9. К. А. Навасардян, "О нуль-рядах по двойной системе Уолша", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № . 1, стр. 50 – 68, 1994.
10. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды Уолша и Преобразования, Наука, М. 1987.

28 сентября 1995

Ереванский государственный университет