О ЕДИНСТВЕННОСТИ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВОИЧНЫХ КУБОВ И РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА[1]

Г. Г. Геворкян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 5, 1995

В работе рассматриваются аддитивные функции двоичных кубов. Доказано, что если функция распределения мажоранты двоичных производных отношений удовлетворяет некоторому необходимому условию и почти всюду существует двоичная производная, то аддитивную функцию можно восстановить по ее производной. Указан процесс восстановления. Полученные результаты применены к рядам Хаара.

Сегменты вида $[m2^{-k},(m+1)2^{-k}]$, $m \in \mathbb{Z}$ назовем двоичными ранга k и их совокупность обозначим через Ω_k, $k \in \mathbb{Z}$. Через Ω_k^d обозначим совокупность d-мерных кубов ранга k, т. е.

$$\Omega_k^d = \left\{\Delta: \quad \Delta = \left[\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1+1}{2^k}\right] \times \dots \times \left[\frac{m_d}{2^k}, \frac{m_d+1}{2^k}\right], \quad m_1, \dots, m_d \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Пусть $\Omega^d = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Omega_k^d$. Функция Φ, определенная на Ω^d, называется аддитивной функцией двоичных кубов, если для любых $I, I_1, \dots, I_n \in \Omega^d$, удовлетворяющих $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ и $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_j = \emptyset$ при $i \neq j$, где $\mathring{I}$ –внутренность I, имеет место

$$\Phi(I) = \sum_{i=1}^n \Phi(I_i).$$

Для точек $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ с двоично–иррациональными координатами x_i, определим производную $\Phi'(x)$ и мажоранту $\Phi^*(x)$ производной следующим образом :

$$\Phi'(x) = \lim_{x\in I_k \in \Omega_k^d} \frac{\Phi(I_k)}{\mu(I_k)}, \qquad \Phi^*(x) = \sup_{x\in I\in\Omega^d} \frac{|\Phi(I)|}{\mu(I)}.$$

Здесь и ниже μ – мера Лебега.

---

[1]Работа частично финансирована АО “Прометевс”.

Теорема 1. *Пусть Φ – аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \in \Omega^d$. Если*

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in I_0 : \quad \Phi^*(x) > \lambda\} = 0 \tag{1}$$

и $\Phi'(x) = 0$ почти всюду (п. в.) на I_0, то $\Phi(I) = 0$ для всех $I \in \Omega^d$ и $I \subset I_0$.

Теорема 2. *Пусть Φ – аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \in \Omega^d$. Если выполняется условие (1) и п.в. на I_0, $\Phi'(x) = f(x) \in L_1(I_0)$, то для всех $I \in \Omega^d$, $I \subset I_0$ имеет место*

$$\Phi(I) = \int_I f(x)\,dx. \tag{2}$$

Теорема 2 следует из теоремы 1, так как из $\Phi_1(I) = \int_I f(x)\,dx$, $I \in \Omega^d$, $I \subset I_0$ следует, что (см. [1], стр. 38 – 41)

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in I_0 : \quad \Phi_1^*(x) > \lambda\} = 0. \tag{3}$$

Поэтому по теореме Лебега о дифференцировании интегралов в $\mathbb{R}^d$ $\Phi_1'(x) = f(x)$ п. в.. Следовательно аддитивная функция двоичных кубов $\Phi_1(\Delta) - \Phi(\Delta) \equiv 0$ и имеет место (2).

Теорема 1 является частным случаем более общей теоремы 3.

Теорема 3. *Пусть Φ – аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \subset \Omega^d$. Если для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \cdot \mu\{x \in I_0 : \quad \Phi^*(x) > \lambda_m\} = 0$$

и п. в. существует $\Phi'(x)$, то для всех $I \in \Omega^d$ и $I \subset I_0$

$$\Phi(I) = \lim_{m\to\infty} \int_I [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\,dx, \tag{4}$$

где

$$[\varphi(x)]_\lambda = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad |\varphi(x)| \le \lambda \\ 0, & \text{если} \quad |\varphi(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Напомним, что функция $g(x)$ называется A-интегрируемой на множестве G, если

$$\mu\{x \in G: \quad |g(x)| > \lambda\} = o\left(\lambda^{-1}\right)$$

и существует предел

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_G [g(x)]_\lambda \, dx = (A) \int_G g(x) \, dx.$$

Из теоремы 3 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть Φ –аддитивная функция двоичных кубов и $I_0 \in \Omega^d$. Если*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \mu\{x \in I_0: \quad \Phi^*(x) > \lambda\} = 0$$

и $\Phi'(x) = f(x)$ п. в. на I_0, то для всех $I \in \Omega^d$ и $I \subset I_0$ имеет место

$$\Phi(I) = (A) \int_I f(x) \, dx. \tag{5}$$

Доказательство Теоремы 3. Очевидно, что достаточно доказать теорему в случае $I = I_0$. Разделим куб I_0 на 2^{kd} равных двоичных кубов $\Delta_i^{(k)}$, $i = 1, 2, ..., 2^{kd}$ и положим

$$\Phi_k(x) = \frac{\Phi(\Delta_i^{(k)})}{\mu(\Delta_i^{(k)})}, \quad \text{когда} \quad x \in \overset{\circ}{\Delta}{}_i^{(k)}. \tag{6}$$

Тогда п. в. существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \Phi_k(x) = \Phi'(x) = f(x) \tag{7}$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_m \cdot \mu\{x \in I_0: \quad \sup_k |\Phi_k(x)| > \lambda_m\} = 0.$$

Пусть ε – произвольное положительное число и $\varepsilon < 2^{-d} \cdot \mu(I_0)$. Тогда для достаточно больших m

$$\lambda_m \cdot \mu(E_m) < \varepsilon, \qquad \text{где} \quad E_m = \{x \in I_0: \quad \Phi^*(x) > \lambda_m\} \tag{8}$$

и при фиксированном m для достаточно больших k

$$\mu\{x \in I_0: \quad |\Phi_k(x) - \Phi'(x)| > \varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{\lambda_m}. \tag{9}$$

Пусть k и m фиксированы и выполняются (8) и (9). Построим последовательность функций $\widetilde{\Phi}_p(x)$, $1 \le p \le k$ следующим образом. Положим $\widetilde{\Phi}_1(x) = \Phi_1(x)$. Функция $\widetilde{\Phi}_1(x)$ на кубах объема $2^{-d} \cdot \mu(I_0)$ принимает постоянные значения по модулю не больше чем λ_m. Пусть Δ - один из кубов постоянства функции $\widetilde{\Phi}_1(x)$. Разделим Δ на 2^d равных кубов $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}$. Если на всех Δ_i, $i = 1, \ldots, 2^d$ модуль функции $\Phi_2(x)$ не превосходит λ_m, то на Δ положим $\widetilde{\Phi}_2(x) = \Phi_2(x)$ и кубы Δ_i назовем кубами первого класса для $\widetilde{\Phi}_2(x)$. В противном случае $\widetilde{\Phi}_2(x) = \widetilde{\Phi}_1(x)$ на Δ и куб Δ назовем кубом второго класса для $\widetilde{\Phi}_2(x)$. Пусть построена функция $\widetilde{\Phi}_p(x)$. Построим функцию $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$ следующим образом. Кубы второго класса функции $\widetilde{\Phi}_p(x)$ остаются кубами второго класса для функции $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$ и на них положим $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x) = \widetilde{\Phi}_p(x)$. Если Δ –куб первого класса для $\widetilde{\Phi}_p(x)$, то разделим Δ на 2^d равных кубов $\Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}$. Если на всех Δ_i, $i = 1, \ldots, 2^d$ модуль функции $\Phi_{p+1}(x)$ не превосходит λ_m, то положим $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x) = \Phi_{p+1}(x)$ на Δ и кубы Δ_i назовем кубами первого класса для $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$. В противном случае куб Δ назовем кубом второго класса для $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x)$ и на Δ положим $\widetilde{\Phi}_{p+1}(x) = \widetilde{\Phi}_p(x)$. Итак, функция $\widetilde{\Phi}_k(x)$ принимает постоянные значения на двоичных кубах $\Delta_1, \ldots, \Delta_q$ (вообще говоря, разных рангов) и

$$\widetilde{\Phi}_k(x) = \frac{\Phi(\Delta_i)}{\mu(\Delta_i)}, \quad \text{когда} \quad x \in \mathring{\Delta}_i. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$|\widetilde{\Phi}_k(x)| \le \lambda_m. \tag{11}$$

Положим

$$\Gamma_1 = \{i: \ \Delta_i \text{ – куб первого класса}\} \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = \{i: \ \Delta_i \text{ – куб второго класса}\}.$$

Заметим, что если Δ_i –куб второго класса, то по меньшей мере на 2^{-d} порции Δ_i имеем $\Phi^*(x) > \lambda_m$. Поэтому

$$E_m \subset \bigcup_{i\in\Gamma_2} \Delta_i \quad \text{и} \quad \mu\left(\bigcup_{i\in\Gamma_2} \Delta_i\right) \le 2^d \cdot \mu(E_m). \tag{12}$$

Положим

$$\Gamma_3 = \{i \in \Gamma_1 : \quad |\widetilde{\Phi}_k(x) - \Phi'(x)| \le \varepsilon, \quad \text{когда} \quad x \in \mathring{\Delta}_i\}, \quad \Gamma_4 = \Gamma_1 \setminus \Gamma_3. \tag{13}$$

Поскольку $\widetilde{\Phi}_k(x) = \Phi_k(x)$ на $\bigcup_{i\in\Gamma_1} \Delta_i$, то из (9) следует, что

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\Gamma_4} \Delta_i\right) < \frac{\varepsilon}{\lambda_m}.$$

Ясно, что (см. (8) и (10))

$$\begin{aligned}
&\left|\Phi(I_0) - \int_{I_0} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx\right| = \\
&= \left|\sum_{i=1}^{q} \Phi(\Delta_i) - \int_{E_m} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx - \int_{I_0\setminus E_m} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx\right| \le \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{q} \mu(\Delta_i)\, \frac{\Phi(\Delta_i)}{\mu(\Delta_i)} - \int_{I_0\setminus E_m} \Phi'(x)\, dx\right| + \lambda_m \mu(E_m) \le \\
&\le \left|\int_{I_0} \widetilde{\Phi}_k\, dx - \int_{I_0\setminus E_m} \Phi'(x)\, dx\right| + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее, учитывая, что $\bigcup_{i\in\Gamma_3} \Delta_i \subset I_0 \setminus E_m$ (см. (12)), получаем (см. также (13), (11), (8) и (14))

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{I_0} \widetilde{\Phi}_k\, dx - \int_{I_0\setminus E_m} \Phi'(x)\, dx\right| \le \left|\int_{\cup_{\Gamma_3}\Delta_i} \widetilde{\Phi}_k\, dx - \int_{\cup_{\Gamma_3}\Delta_i} \Phi'(x)\, dx\right| + \\
&+ \left|\int_{\cup_{\Gamma_2}\cup_{\Gamma_4}\Delta_i} \widetilde{\Phi}_k\, dx\right| + \left|\int_{(I_0\setminus E_m)\setminus\cup_{\Gamma_3}\Delta_i} \Phi'(x)\, dx\right| \le \\
&\le \varepsilon\mu(I_0) + \lambda_m \mu\left(\bigcup_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} \Delta_i\right) + \lambda_m \mu\left((I_0 \setminus E_m) \setminus \left(\bigcup_{\Gamma_3} \Delta_i\right)\right) \le \\
&\le \varepsilon\mu(I_0) + 2\lambda_m \mu\left(\bigcup_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} \Delta_i\right) \le \varepsilon\mu(I_0) + 2\lambda_m\left(\frac{\varepsilon}{\lambda_m} + 2^d \mu(E_m)\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Из (9), (14) и (15) следует

$$\left|\Phi(I_0) - \int_{I_0} [\Phi'(x)]_{\lambda_m}\, dx\right| \le \varepsilon(\mu(I_0) + 3 + 2^{d+1}).$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Любую аддитивную функцию двоичных кубов Φ можно аддитивно продолжить на семейство двоичных параллелепипедов следующим образом. Для

$$I=\left[\frac{m_1}{2^{k_1}},\frac{m_1+1}{2^{k_1}}\right]\times\ldots\times\left[\frac{m_d}{2^{k_d}},\frac{m_d+1}{2^{k_d}}\right] \quad \text{и} \quad I=\bigcup_p I_p,\ I_p\in\Omega^d,\ \mathring{I}_p\cap\mathring{I}_{p'}=\emptyset,\ p\neq p,'$$

положим $\Phi(I)=\sum\limits_p\Phi(I_p)$. Очевидно, что в теоремах 3 и 4 соотношения (4) и (5) будут выполняться для любого двоичного параллелепипеда.

Замечание 2. Легко видеть, что последовательность функций $\Phi_k(x)$, определяемая (6), является регулярным мартингалом. Поэтому из условия $\sup_k|\Phi_k(x)|<$ $<+\infty$ п. в. следует существование $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_k(x)$ (см. [2] или [3], стр. 242). Следовательно, существование производной в теоремах 1 – 4 (а в теоремах 5 – 8 п. в. сходимость ряда) не является дополнительным условием.

Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ –ортонормированная система Хаара. Тогда любой ряд по кратной системе Хаара

$$\sum_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d}a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)=\sum_{\substack{n_i\in N\\ i=1,\ldots,d}}a_{n_1\ldots n_d}\chi_{n_1}(x_1)\ldots\chi_{n_d}(x_d) \tag{16}$$

порождает аддитивную функцию двоичных кубов по формуле

$$\Phi(\Delta)=\lim_{N\to\infty}\int_\Delta\sum_{\overline{n}\leq N}a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\,dx,\quad \text{если}\quad \Delta\in\Omega^d, \tag{17}$$

где запись $\overline{n}\leq N$ означает, что $\max\limits_{1\leq i\leq d}\{n_i\}\leq N$. Предел в правой части (17) существует для всех $\Delta\in\Omega^d$, так как для достаточно больших $N=N(\Delta)$

$$\int_\Delta a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\,dx=0,\quad \text{когда}\quad \max_{1\leq i\leq d}\{n_i\}\geq N.$$

Для всех x с двоично–иррациональными координатами из (17) следует

$$\Phi'(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{\overline{n}\leq N}a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x),\quad \text{и}\quad \Phi^*(x)=\sup_N\left|\sum_{\overline{n}\leq N}a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\right|. \tag{18}$$

Используя это и применяя теорему 3, получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть кубические суммы кратного ряда Хаара (16) п. в. сходятся к $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \mu\{x \in [0,1]^d: \quad \Phi^*(x) > \lambda_m\} = 0.$$

Тогда для всех $n = (n_1, ..., n_d)$

$$a_n = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)]_{\lambda_m^{\overline{n}}}\, dx,$$

где $\lambda_m^{\overline{n}} = \lambda_m \cdot \|\chi_{\overline{n}}\|_\infty$.

Доказательство. Фиксируем некоторое $\overline{n} \in \mathbf{N}^d$. Функция $\chi_{\overline{n}}(x)$ принимает значения $\pm\|\chi_{\overline{n}}\|_\infty$ на двоичных параллелепипедах $\Delta_1, ..., \Delta_{2^d}$, а вне $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ равна нулю. Для двоичного куба $I \subset \Delta_i$, положим

$$\Phi_i(I) = \lim_{N\to\infty} \int_I \chi_{\overline{n}}(x) \sum_{\overline{k}\le N} a_{\overline{k}}\chi_{\overline{k}}(x)\, dx, \qquad i = 1, ..., 2^d. \tag{19}$$

Ясно, что функция $\Phi_i(x)$ является аддитивной функцией двоичных кубов

$$\Phi_i'(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{\overline{k}\le N} a_{\overline{k}}\chi_{\overline{k}}(x)\chi_{\overline{n}}(x) = f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x) \qquad \text{п. в.} \qquad \text{и} \tag{20}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \mu\{x \in \Delta_i: \quad \Phi_i^*(x) > \|\chi_{\overline{n}}\|_\infty \cdot \lambda_m\} = 0. \tag{21}$$

В силу теоремы 3 и замечания 1, из (20) и (21) следует

$$\Phi_i(\Delta_i) = \lim_{m\to\infty} \int_{\Delta_i} [f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)]_{\lambda_m^{\overline{n}}}\, dx, \qquad i = 1, ..., 2^d. \tag{22}$$

Складывая соотношения (24) и учитывая аддитивность интеграла, получаем (см. также (19))

$$\lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)]_{\lambda_m^{\overline{n}}}\, dx = \sum_{i=1}^{2^d} \Phi_i(\Delta_i) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{[0,1]^d} \sum_{\overline{k}\le N} a_{\overline{k}}\chi_{\overline{k}}(x)\chi_{\overline{n}}(x)\, dx = a_{\overline{n}}.$$

Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 немедленно следуют теоремы 6 и 7.

Теорема 6. *Если кубические суммы ряда* $\sum\limits_{\overline{n}\le N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *п. в. сходятся к* $f(x)$ *и*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mu\left\{x\in[0,1]^d:\quad \sup_N\left|\sum_{\overline{n}\le N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)\right|>\lambda\right\}=0, \tag{23}$$

то все функции $f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)$, $\overline{n}\in\mathbf{N}^d$ *A–интегрируемы и*

$$a_{\overline{n}}=(A)\int_{[0,1]^d} f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)\,dx,\qquad \overline{n}\in\mathbf{N}^d.$$

Теорема 7. *Если кубические суммы ряда* $\sum\limits_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *п. в. сходятся к интегрируемой по Лебегу функции* $f(x)$ *и*

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\{x\in[0,1]^d:\quad \Phi^*(x)>\lambda\}=0, \tag{24}$$

то ряд $\sum\limits_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *является рядом Фурье–Хаара функции* $f(x)$, *т. е.*

$$a_{\overline{n}}=\int_{[0,1]^d} f(x)\,\chi_{\overline{n}}(x)\,dx,\qquad \overline{n}\in\mathbf{N}^d. \tag{25}$$

Ясно, что условие (23) сильнее, чем (24). Но тем не менее теорема 7 не следует из теоремы 6. Можно построить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, который удовлетворяет (23) и п. в. сходится к некоторой функции $f(x)$, но не выполняется (25). (Предельная функция может оказаться не интегрируемой по Лебегу, см. [4].) Сопоставляя соотношения (3), (17), (18) с теоремой 7, получаем следующий результат.

Теорема 8. *Ряд* $\sum\limits_{\overline{n}\in\mathbf{N}^d} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)$ *будет рядом Фурье некоторой интегрируемой по Лебегу функции* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда выполняется (24) и*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{\overline{n}\le N} a_{\overline{n}}\chi_{\overline{n}}(x)=f(x)\qquad \text{п. в. на}\quad [0,1]^d.$$

Теперь рассмотрим ряды Хаара одной переменной.

Лемма. *Для рядов Хаара* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ *следующие условия эквивалентны :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right|>\lambda\right\}=0 \qquad \text{и} \tag{26}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mu \left\{ x \in [0,1]: \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda \right\} = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть выполняется (27). Ясно, что множество

$$E_\lambda = \left\{ x \in [0,1]: \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda \right\} \tag{28}$$

является объединением двоичных сегментов и (см. [5], стр. 104 – 105)

$$\left[\sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2 \chi_n^2(x)\right]^{1/2} \le \lambda, \tag{29}$$

где $\{n\}$ –носитель функции $\chi_n(x)$. Очевидно, что

$$\begin{gathered} \left\{ x \in [0,1]: \quad \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)\right| > \lambda \right\} \subset \\ \subset \left\{ x \in [0,1]: \quad \sup_N \left|\sum_{\substack{n=1 \\ \{n\}\not\subset E_\lambda}}^{N} a_n \chi_n(x)\right| > \lambda \right\} \bigcup E_\lambda. \end{gathered} \tag{30}$$

Известно, что система Хаара является системой типа (2,2) (см. [5], стр. 83). Следовательно

$$\begin{gathered} \mu \left\{ x \in [0,1]: \sup_N \left|\sum_{\substack{n=1 \\ \{n\}\not\subset E_\lambda}}^{N} a_n \chi_n(x)\right| > \lambda \right\} \le \frac{1}{\lambda^2} \int_0^1 \sup_N \left|\sum_{\substack{n=1 \\ \{n\}\not\subset E_\lambda}}^{N} a_n \chi_n(x)\right|^2 dx \le \\ \le \frac{c}{\lambda^2} \int_0^1 \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2 \chi_n^2(x)\, dx, \end{gathered} \tag{31}$$

где c –абсолютная постоянная. Положим

$$E_\lambda^k = \left\{ x \in [0,1]: \quad \frac{\lambda}{2^k} < \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)\right]^{1/2} \le \frac{\lambda}{2^{k-1}} \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Из (29) и (32) имеем

$$\begin{gathered} \int_0^1 \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2 \chi_n^2(x)\, dx = \int_{E_\lambda} \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2 \chi_n^2(x)\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_\lambda^k} \sum_{\{n\}\not\subset E_\lambda} a_n^2 \chi_n^2(x)\, dx \le \\ \le \lambda^2 \mu(E_\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_\lambda^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)\, dx \le \\ \le \lambda^2 \mu(E_\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{2^{2k-2}} \mu(E_\lambda^k). \end{gathered} \tag{33}$$

Из (30), (31) и (33) следует

$$\lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\chi_n(x)\right|>\lambda\right\}\le$$

$$\le\lambda\mu(E_\lambda)+c\,\lambda\mu(E_\lambda)+4c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{\lambda}{2^k}\,\mu(E_\lambda^k)\right). \tag{34}$$

Очевидно, что при фиксированном k, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\,2^{-k}\,\mu(E_\lambda^k)\right]=0$ (ср. с (27) и (32)). Поэтому (26) следует из (34), (27) и (28).

Теперь пусть выполняется (26). Положим

$$B_\lambda=\left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\chi_n(x)\right|>\lambda\right\}. \tag{35}$$

Множество B_λ можно представить в виде $B_\lambda=\bigcup_m I_m$, где I_m - двоичный сегмент ранга k_m, $\mathring{I}_m\cap\mathring{I}_{m'}=\emptyset$ при $m\ne m'$. Если I_m^* - двоичный сегмент ранга k_m-1, содержащий I_m, то

$$I_m^*\not\subset B_\lambda. \tag{36}$$

Для множества

$$B_\lambda^*=\bigcup_m I_m^* \tag{37}$$

имеем $\mu(B_\lambda^*)\le 2\mu(B_\lambda)$ и

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\chi_n(x)=\sum_{\substack{n=1\\ \{n\}\not\subset B_\lambda^*}}^{N}a_n\chi_n(x),\qquad \text{когда}\quad x\notin B_\lambda^*. \tag{38}$$

Из (35) — (38) получаем

$$\sup_N\left|\sum_{\substack{n=1\\ \{n\}\not\subset B_\lambda^*}}^{N}a_n\chi_n(x)\right|=\sup_N\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\chi_n(x)\right|,\qquad \text{когда}\quad x\notin B_\lambda^* \tag{39}$$

и

$$\sup_N\left|\sum_{\substack{n=1\\ \{n\}\not\subset B_\lambda^*}}^{N}a_n\chi_n(x)\right|\le\lambda\qquad \text{для всех}\quad x. \tag{40}$$

Очевидно, что

$$\left\{x:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \subset$$
$$\subset B_\lambda^* \bigcup \left\{x:\quad \left[\sum_{\{n\}\not\subset B_\lambda^*} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \tag{41}$$

и

$$\mu\left\{x:\quad \left[\sum_{\{n\}\not\subset B_\lambda^*} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \le \frac{1}{\lambda^2}\int_0^1 a_n^2\chi_n^2(x)\,dx. \tag{42}$$

Обозначая

$$B_{\lambda,k} = \left\{x \in [0,1]:\quad \frac{\lambda}{2^k} < \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| \le \frac{\lambda}{2^{k-1}}\right\}, \qquad k = 1,2,...,$$

из (39) — (42) получаем

$$\lambda\cdot\mu\left\{x \in [0,1]:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} \le$$
$$\le 4\lambda\mu(B_\lambda) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{B_{\lambda,k}} \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| dx \le \tag{43}$$
$$\le 4\lambda\mu(B_{\lambda,k}) + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{\lambda}{2^k}\,\mu(B_{\lambda,k})\right).$$

Так как для каждого k, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\lambda\, 2^{-k}\,\mu(B_{\lambda,k})\right] = 0$, из (43) получим (27). Лемма доказана.

Теорема 9. *Пусть выполнено условие (26). Тогда для любой ограниченной последовательности* $\{\varepsilon_n\}$, $n = 1,2,...$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n\,\chi_n(x)$ *является рядом Фурье–Хаара в смысле A–интегрирования.*

Доказательство. В силу леммы из (26) следует (27). Поэтому для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ имеем

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x \in [0,1]:\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2\, a_n^2\,\chi_n^2(x)\right]^{1/2} > \lambda\right\} = 0. \tag{44}$$

Опять применяя лемму, из (44) получаем

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n\, a_n\, \chi_n(x)\right| > \lambda\right\} = 0.$$

Остается применить теорему 6. Теорема 9 доказана.

Условию (26) удовлетворяют ряды Фурье–Хаара всех интегрируемых по Лебегу функций. Поэтому, полагая $\varepsilon_n = 0$ или 1, получаем седствие теоремы 9.

Следствие (Л. А. Балашов [6]) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$ является рядом Фурье–Хаара некоторой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$. Тогда всякий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\,\chi_n(x)$, где $\varepsilon_n = 0$ или 1, сходится п. в. к некоторой A–интегрируемой функции $g(x)$ и является ее рядом Фурье в смысле A–интегрирования.

В связи с полученными результатами возникает следующий вопрос : Пусть функция $f(x)$ A–интегрируема на любом двоичном сегменте $[m\,2^{-k},(m+1)\,2^{-k}]$ и $\sum\limits_{n=1^\infty} a_n\,\chi_n(x)$ – ее ряд Фурье–Хаара в смысле A–интегрирования, т. е.

$$a_n = (A)\int_0^1 f(x)\,\chi_n(x)\,dx, \qquad n = 1,2,...$$

Будет ли в этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$ удовлетворять условию (26) ? Ниже мы покажем, что ответ отрицательный.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена на $[-1,1]$ и монотонно убывающая на $[0,1]$. Кроме того

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\cdot\mu\{x\in[0,1]:\quad \varphi(x)>\lambda\} = 0, \quad \text{и} \quad \varphi(-x) = -\varphi(x). \tag{45}$$

Очевидно, что $\varphi(x)$ A–интегрируема на $[-1,1]$ и существуют неотрицательные числа $x_1 > ... > x_k > x_{k+1} > ...$ с условиями (см. (45))

$$x_k < 2^{-k-2} \qquad \text{и} \quad k < \int_{x_{k+1}}^{x_k} \varphi(x)\,dx \le k+1. \tag{46}$$

Пусть $f_k(x) = \varphi(x)\,\chi_{G_k}(x)$, где $\chi_{G_k}(x)$ –характеристическая функция множества $G_k = [-x_k, -x_{k+1}]\cup[x_{k+1}, x_k]$. Положим $\xi_k = 2^{-k} + 2^{-k-1}$ и $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x-\xi_k)$.

Нетрудно видеть, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ равноизмеримы и $f(x)$ A– интегрируема на любом сегменте $[a,b]\subset[0,1]$. Более того, $f(x)$ интегрируема по Лебегу на $[\varepsilon,1]$, $\varepsilon>0$.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$ – ряд Фурье–Хаара функции $f(x)$ в смысле A–интегрирования и $x\in[2^{-k}+2^{-k-1},2^{-k+1}]$. Тогда (см. (49))

$$\sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right|\ge\sum_{n=1}^{2^{k+1}} a_n\,\chi_n(x)=2^{k+1}\int_{x_{k+1}}^{x_k} f(x)\,dx>k\,2^{k+1}. \tag{47}$$

Учитывая, что $\mu([2^{-k}+2^{-k-1},2^{-k+1}])=2^{-k-1}$, из (47) получаем

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad\sup_N\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right|>\lambda\right\}>0.$$

Следовательно, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$ не выполнено (26).

Напомним (см. [7], [8]), что функция $f(x)$ называется UA–интегрируемой (равномерно A–интегрируемой) на $[0,1]$, если последовательность

$$F_n(x)=\int_0^x [f(t)]_n\,dt,\qquad n=1,2,\ldots \tag{48}$$

сходится равномерно.

Оказывается, что даже UA–интегрируемость функции $f(x)$ не обеспечивает выполнение (26). Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно в предыдущем примере функции $f_k(x)$, $k=1,2,\ldots$ из отрезка $[-x_k,x_k]$ продолжить с периодом $2x_k$ и положить $\Psi_k(x)=f_k(k^3x)\,\chi_{G_k}(x)$ и $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Psi_k(x-\xi_k)$.

Покажем, что из условия (26) не следует UA–интегрируемость предельной функции ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\,\chi_n(x)$.

Нетрудно убедиться, что если $\varepsilon_k\downarrow 0$ и $2^k<n_k\le 2^{k+1}$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mu\left\{x\in[0,1]:\quad\sup_N\left|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\,2^{k/2}\chi_{n_k}(x)\right|>\lambda\right\}=0.$$

Пусть числа ε_k и m_i выбраны так, чтобы $\varepsilon_1>\ldots>\varepsilon_k>\ldots>0$ и $\sum\limits_{k=m_i+1}^{m_{i+1}}\varepsilon_k>i$.

Положим $x_i=\xi_i+2^{-i}/3$, где $\xi_i=\sum\limits_{j=1}^{i-1}2^{-j}$, и выберем n_k так, чтобы $x_i\in\{n_k\}$ для

$k \in [m_i + 1, m_{i+1}]$. Ясно, что

$$\int_{\xi_i}^{x_i} \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \varepsilon_k\, 2^{k/2} \chi_{n_k}(x)\, dx = \frac{1}{6} \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} \varepsilon_k > \frac{i}{6}. \tag{49}$$

Пусть $f(x)$ - поточечный предел ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k\, 2^{k/2} \chi_{n_k}(x)$. Тогда $f(x)$ ограничена на любом отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ и, как видно из (49)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\xi_i}^{x_i} [f(x)]_n\, dx > \frac{i}{6}. \tag{50}$$

Из (48) следует, что функции (47) не являются равномерно ограниченными. Следовательно, функции $F_n(x)$ не могут равномерно сходиться. Значит функция $f(x)$ не является UA–интегрируемой. В заключение отметим, что вопросы, близкие к рассмотренным здесь, были исследованы в работах [9 – 16].

ABSTRACT. **The paper studies additive functions of dyadic cubes. It is proved, if the distribution function of majorant of dyadic derivative ratio satisfies to some necessary condition and almost everywhere there exists dyadic derivative, then the additive function may be restored by its derivative. The process of restoration is indicated. The receiving results to Haar series are applied.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гусман, Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$, Москва, Мир, 1978.
2. Y. S. Chow, "Convergence theorems of martingales," Z. Wahrsch. und Ver. Gebiete, vol. 1, pp. 340 - 346,1962.
3. R. F. Gundy, "Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 124, № 2, pp. 228 - 248, 1966.
4. Г. Г. Геворкян, "О тригонометрических рядах, суммируемых методом Римана", Мат. заметки, т. 52, № 3, стр. 17 - 34, 1992.
5. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, Наука, 1984.
6. Л. А. Балашов, "Обобщенное интегрирование рядов по системе Хаара," Тезисы докладов Всесоюзной школы по теории функций, Ереван, 1987.
7. О. Д. Церетели, "О неопределенном A–интеграле и о рядах Фурье (A)," Studia Math., vol. 22, № 1, pp. 59 - 63, 1962.
8. О. Д. Церетели, "О неопределенном A–интеграле и о рядах Фурье (A)", Сообщ. АН Груз. ССР, т. 29, № 2, стр. 129 - 134, 1962.
9. А. Б. Александров, "Об A–интегрируемости граничных значений гармонических функций", Мат. заметки, т. 30, стр. 59 - 72, 1981.
10. А. А. Талалян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 132, № 1, стр. 104 - 130, 1987.
11. А. А. Талалян, "О единственности и интегрируемости кратных тригонометрических рядов", Труды МИАН, т. 190, стр. 234 - 254, 1989.

12. Г. Г. Геворкян, "О единственности тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 180, № 11, стр. 1462 - 1474, 1989 .
13. Г. Г. Геворкян, "О единственности кратных тригонометрических рядов", Мат. сборник, т. 184, № 11, стр. 93 - 130, 1993.
14. С. Ш. Галстян, "О единственности аддитивных функций сегментов и тригонометрических рядов", Мат. заметки, т. 56, № 4, стр. 38 - 47, 1994.
15. Г. Г. Геворкян, "О единственности рядов по системе Франклина", Мат. заметки, т. 46, № 2, стр. 51 - 58, 1989.
16. Г. Г. Геворкян, "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", Мат. заметки, в печати.

2 сентября 1995 Ереванский государственный университет