О СКОРОСТИ СУММИРОВАНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ
ВНЕ КРУГА СХОДИМОСТИ

А. В. Яврян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 4, 1995

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ - α -звездная область относительно точки $a \in \Omega$. Обозначим через $H_\alpha(\Omega)$ множество всех аналитических элементов

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z-a)^n, \quad |z-a| < \inf_{\zeta \in \partial\Omega} |\zeta-a|,$$

имеющих однозначное аналитическое продолжение f в Ω .

Пусть $\{c_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность комплексных чисел, зависящая от параметра ω , $\omega \in I$, где I - некоторое множество с предельной точкой ω_0 . Назовем ее универсальной эффективной матрицей суммирования, если для любой α -звездной области Ω (относительно a) и любой функции $f \in H_\alpha(\Omega)$ ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\omega) f_n(z-a)^n$$

сходится при $z \in \Omega$ и

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\omega) f_n(z-a)^n = f(z)$$

локально равномерно в области Ω .

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$\Pi_\alpha = \{z: \operatorname{Re} z \geq \alpha \operatorname{Im} z\}.$$

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным при частичной поддержке Гранта № MVK000 из Международного Научного Фонда.

В [1] доказывается (Теорема 2.2) универсальная эффективность матриц вида $c_n(\omega) = \varphi(\omega n)$, $\omega > 0$, $\omega_0 = 0$, где $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$ — функция, удовлетворяющая определенным условиям.

Ниже исследуется вопрос о скорости суммирования такими матрицами в зависимости от свойств функции φ , а также оценивается точность приближения $f \in H_\alpha(\Omega)$ многочленами вида $\sum_{k=0}^n \varphi(\omega k) f_k(z-a)^k$.

Ясно, что без ограничения общности, можно считать $a = 0$.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$ ограничена в каждой замкнутой угловой области $\Delta \subset \Pi_\alpha^0 \cup \{0\}$ и удовлетворяет условиям

$$h_\varphi(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log |\varphi(t)|}{t} = -\infty, \quad (1)$$

$$|\varphi(t) - 1| \leq C_0 \exp\left(-\frac{\rho}{t^\gamma} \log^\beta \frac{1}{t}\right), \quad t \in (0, 1], \quad (2)$$

где $0 \leq \gamma \leq 1$, $\beta \geq 0$, $\rho > 0$, $C_0 > 0$ — постоянные.

Тогда, если область Ω — α -звездная относительно нуля, то для любого компакта $K \subset \Omega$ существует $\mu > 0$ такое, что для любой функции $f \in H_0(\Omega)$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \leq M \exp\left(-\mu \omega^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)}(1/\omega)\right), \quad \text{для } z \in K, \quad (3)$$

где $0 < \omega < 1$ и постоянная M зависит лишь от f и K .

Доказательство. Из условия (1) следует, что для любого $\omega > 0$ функция

$$C_\omega(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) z^k$$

целая по z .

Пусть $D_{r_0} = \{\zeta: |\zeta| \leq r_0\} \subset \Omega$ для некоторого $r_0 > 0$.

Легко проверить, что для $z \in \Omega$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_0} f(t) C_\omega(z/t) \frac{dt}{t}.$$

Положим

$$L_\alpha = \{\zeta: \zeta = \exp((1 + i\alpha) \log t), \quad t \in [0, +\infty)\},$$

$$L_{\alpha}^{+} = \{\zeta: \zeta = \exp((1 + i\alpha) \log t), t \in [1, +\infty)\}.$$

Следуя доказательству Леммы 2.3 в [1] (стр. 40), мы заменим контур интегрирования $|t| = r_0$ контуром $\Gamma \subset \Omega$ (все контуры берутся положительно ориентированными), так чтобы $z/t \in \mathbb{C} \setminus L_{\alpha}^{+}$, когда $z \in K$ и $t \in \Gamma$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) C_{\omega}(z/t) \frac{dt}{t}, \quad z \in K.$$

Отсюда получим, что

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \leq M_1 \max_{\zeta \in K_0} \left| C_{\omega}(\zeta) - \frac{1}{1-\zeta} \right|, \quad z \in K, \quad (4)$$

где $K_0 = \{\zeta: \zeta = z/t, z \in K, \zeta \in \Gamma\}$ - компакт, причем $K_0 \subset \mathbb{C} \setminus L_{\alpha}^{+}$, а M_1 - постоянная, зависящая лишь от f и K . Оценим теперь

$$\max_{\zeta \in K_0} \left| C_{\omega}(\zeta) - \frac{1}{1-\zeta} \right|.$$

Для $z \in D_r$, $0 < r < 1$ и $z > 0$, с учетом (2), имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(\omega n) z^n - \frac{1}{1-z} \right| &\leq \sum_{n \leq z} |\varphi(\omega n) - 1| r^n + \sum_{n > z} |\varphi(\omega n) - 1| r^n \leq \\ &\leq \exp\left(-z \log \frac{1}{r}\right) \left[C_1 \exp\left(-\rho \left[\frac{1}{(\omega z)^{\gamma}} \log^{\beta} \frac{1}{\omega z} - z \frac{\log \frac{1}{r}}{\rho} \right]\right) + C_2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где C_1 и C_2 - положительные постоянные, не зависящие от z и ω .

Легко проверить, что если

$$z = \frac{C_3 \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega}}{\omega^{\gamma/(1+\gamma)}}, \quad 0 < C_3 < \frac{\rho}{\log \frac{1}{r}}, \quad (6)$$

то для достаточно малых ω

$$\frac{1}{(\omega z)^{\gamma}} \log^{\beta} \frac{1}{\omega z} > z \frac{\log \frac{1}{r}}{\rho}.$$

Подставляя (6) в (5), получим, что для любого $\rho_1 < \rho$ существует $C_4 > 0$ такое, что для всех $0 < \omega < 1$, $z \in D_r$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) z^k - \frac{1}{1-z} \right| \leq C_4 \exp\left(-\rho_1 \omega^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega}\right). \quad (7)$$

Выберем теперь компакт $K_1 \subset \mathbb{C} \setminus L_a^+$, ограниченный жордановой кривой так, чтобы $K_0 \subset K_1^0$ и $D_r \subset K_1^0$. Из Предложения 1.1 (см. [1]) следует, что для всех $\omega > 0$ существует некоторая постоянная $M_2 > 0$ такая, что

$$\left| C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} \right| \leq M_2, \quad z \in K_1. \quad (8)$$

Пусть $w(z)$ – гармоническая мера ∂K_1 относительно $K_1^0 \setminus D_r$. Так как компакт K_0 лежит внутри некоторой линии уровня $w(z) = \delta$ ($0 < \delta < 1$), то из теоремы о двух постоянных (см. [12], стр. 48), с учетом (7) и (8) получим

$$\max_{z \in K_0} \left| C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} \right| \leq M_3 \exp \left(-\mu \omega^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega} \right),$$

где $\mu = \rho_1(1 - \delta)$.

Отсюда и из (4) приходим к требуемой оценке.

Замечание 1. Из Теоремы 1 видно, что скорость суммирования тем лучше, чем быстрее $\varphi(z)$ стремится к 1 при $z \rightarrow 0$. С другой стороны, из неравенства Коши применительно к кругу D_r ($r < 1$) имеем оценку снизу, а именно :

$$\max_{z \in D_r} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \geq \sup_n |\varphi(\omega n) - 1| |f_n| r^n. \quad (9)$$

Возьмем теперь в Теореме 1 в качестве φ целую функцию $(\Gamma(1 + (1 + i\alpha)z))^{-1}$ (Γ –гамма функция Эйлера), определяющую обобщенный метод суммирования Миттаг-Леффлера. Так как φ аналитична в нуле, то условие (2) в Теореме 1 выполняется при $\gamma = 0$, $\beta = 1$ и $\rho = 1$. Из оценки (3) следует, что для любого $K \subset \Omega$ и $f \in H_0(\Omega)$ существует $\mu < 1$ такое, что

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k}{\Gamma(1 + (1 + i\alpha)k\omega)} z^k - f(z) \right| \leq M \omega^\mu, \quad z \in K. \quad (10)$$

Покажем, что в (10) можно взять $\mu = 1$, что согласно (9) является наилучшим допустимым показателем в (10).

Более общо, пусть φ – аналитическая в нуле функция, удовлетворяющая условиям Теоремы 1, и пусть $\varphi^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, $\varphi^{(p)}(0) \neq 0$. Ясно, что для любого замкнутого угла $\Delta \subset \Pi_\alpha^0$ существует $C_1 > 0$ такое, что

$$|\varphi(z) - 1| \leq C_1 |z|^p, \quad z \in \Delta. \quad (11)$$

Представим компакт $K_0 \subset \mathbb{C} \setminus L_\alpha^+$ в виде $K_1 \cup K_2$, где $K_1 \subset \mathbb{C} \setminus L_\alpha$, а $K_2 \subset D_r$ для некоторого $r < 1$.

Для $z \in K_2$ имеем

$$\left| C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(\omega^n) - 1) z^n \right| \leq C_2 \omega^p.$$

Для компакта K_1 можно подобрать θ_1 и θ_2 (см. [1], стр. 34), так чтобы была справедлива формула Линделефа

$$C_\omega(z) - \frac{1}{1-z} = \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \frac{(\varphi(\omega\zeta) - 1) z^\zeta}{\exp(2\pi i\zeta) - 1} d\zeta.$$

Здесь $\Gamma_1 = \{\zeta: \zeta = t \exp(i\theta_k), t > \varepsilon, k = 1, 2\}$, $\Gamma_2 = \{\zeta: |\zeta| = \varepsilon, \theta_1 < \arg \zeta < \theta_2\}$, а $z^\zeta = e^{\zeta \log z}$, $\log z$ — непрерывная в $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$ ветвь логарифма и $\log(-1) = i\pi$.

При этом для $\zeta \in \Gamma_1$ имеем

$$\left| \frac{z^\zeta}{\exp(2\pi i\zeta) - 1} \right| \leq C_3 \exp(-\delta_0 |\zeta|), \quad \delta_0 > 0.$$

Отсюда, в силу (4) и (11), получим, что для любого $K \subset \Omega$ и $f \in H_0(\Omega)$ существует $C_4 > 0$ такое, что

$$\max_{z \in K} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega^k) f_k z^k - f(z) \right| \leq C_4 \omega^p.$$

Теорема 2. Пусть функция $\varphi \in H(\Pi_\alpha^0)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, и пусть

$$|\varphi(t)| \leq C_1 \exp(-tq(t)), \quad t \geq 1, \quad (12)$$

где q — неубывающая на $[1, \infty)$ функция, $q(t) \rightarrow +\infty$, $q(t) = o(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, а C_1 — положительная постоянная. Тогда для любой функции $f \in H_0(\Omega)$ и компакта $K \subset \Omega$ существуют постоянные $\nu > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $n > q(n)$

$$\left| \sum_{k=0}^n \varphi(\omega_n k) f_k z^k - f(z) \right| \leq C \exp\left(-\nu \omega_n^{-\gamma/(1+\gamma)} \log^{\beta/(1+\gamma)} \frac{1}{\omega_n}\right). \quad (13)$$

Здесь $\omega_n = \frac{A}{q\left(\frac{n}{q(n)}\right)}$ и константа $A > 0$ зависит от K .

Доказательство. Имеем

$$\left| \sum_{k=0}^n \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k - f(z) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k \right|. \quad (14)$$

Положим

$$R = \max_{z \in K} |z|, \quad r = \min_{z \in \partial\Omega} |z|,$$

и пусть $0 < r_1 < r$.

Ясно, что $|f_k| < C_2 r_1^k$, $C_2 > 0$. Отсюда, с учетом условия (12), получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi(\omega k) f_k z^k \right| &\leq C_3 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \exp(-\omega k q(\omega k)) \left(\frac{R}{r_1}\right)^k \leq \\ &\leq C_3 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \exp(-\omega k (q(\omega n) - d/\omega)), \end{aligned} \quad (15)$$

где $d = \max\{1/2, \log(R/r_1)\}$.

Легко проверить, что $q(\omega n) \geq 2d/\omega$, когда $q(n) < n$ и

$$\omega = \omega_n = \frac{2d}{q\left(\frac{n}{q(n)}\right)}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим, что для некоторого $C_4 > 0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi(\omega_n k) f_k z^k \right| \leq C_4 \exp(-dn).$$

Отсюда, с учетом (14) и (3), приходим к оценке (13). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. В Теореме 2 можно выбрать ω_n независимо от компакта. Действительно, из доказательства видно, что (13) выполняется, если выбрать ω_n так, что

$$\frac{1}{\omega_n} = o\left(q\left(\frac{n}{q(n)}\right)\right).$$

Замечание 3. Условия Теоремы 2 ставят некоторые ограничения на рост функции $q(t)$. Так, если $q(t) = t^\epsilon$, $\epsilon > 0$, то из ограниченности функции φ в любой замкнутой угловой области $\Delta \subset \Pi_\alpha^0$ и из (12) следует, что $\varphi = 0$.

Пусть $q(t) = t^{\rho(t)}$ — неубывающая функция, где $\rho(t)$ — положительный уточненный порядок, стремящийся к нулю ([4], стр. 49). Покажем, что существует функция φ , удовлетворяющая условиям Теоремы 2 при $\gamma = 1$ и $\beta = 0$. Согласно Теореме 5.1 (см. [3]) существует такая аналитичная в Π_0^0 , положительная на положительной

оси функция g , что для любого $0 < \delta < \pi$ равномерно относительно θ в углу $\{|\theta| < \pi - \delta\}$ выполняется

$$g(r e^{i\theta}) = (1 + o(1))q(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Пусть

$$\Psi(z) = \frac{1}{C_0} \int_x^\infty \exp(-t^{-1} - t g(t)) dt,$$

где путь интегрирования лежит в некотором замкнутом угле в правой полуплоскости, а

$$C_0 = \int_0^\infty e^{-1/t - t g(t)} dt > 0.$$

Легко проверить, что функция $\varphi(z) = \Psi(\exp(-i \arctan \alpha)z)$ будет искомой.

В частности, если $g(t) = \log^{p+\varepsilon} t$, $p+\varepsilon > 0$ и $\omega_n = \log^{-p} n$, то согласно Замечанию 2, для любого компакта $K \subset \Omega$ имеем

$$\max_{z \in K} \left| \sum_{k=0}^n \varphi(\omega_n k) f_k z^k - f(z) \right| = O\left(\exp\left(-\log^{p/2} n\right)\right), \quad n \geq n_0. \quad (17)$$

Теоремы 1 и 2 сформулированы для случая скалярных функций. Однако, почти полностью повторяя ход рассуждений, их доказательства можно провести и в случае, когда аналитические элементы принимают значения из некоторого банахового пространства. Получаемые при этом утверждения интересны в связи с применением к резольвенте.

Пусть X – банахова алгебра с единицей, $R(z, a)$ – резольвента элемента $a \in X$. Если взять в качестве Ω главную α -звезду (относительно ∞) аналитического элемента

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n},$$

то к $R(z, a)$ применимы Теоремы 1 и 2.

Если дополнительно предположить, что элемент $a \in X$ имеет счетный спектр с единственно возможной предельной точкой в нуле, то для любой точки $\zeta \in \rho_a$ (ρ_a – резольвентное множество элемента a) можно выбрать окрестность V_ζ точки ζ так, что $\Omega_\zeta = L_\alpha^+ V_\zeta \subset \rho_a$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть функция $\varphi \in H(\Pi_a^0)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2 для $\gamma = 1, \beta = 0$ и $q(t) = \log^{p+\epsilon} t, p + \epsilon > 0$. Тогда, согласно (17), получим что для окрестности $\bar{U}_\zeta \subset V_\zeta$ при $z \in \bar{U}_\zeta$ имеем

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(k \log^{-p} n)}{z^{k+1}} a^k - R(z; a) \right\| = O\left(\exp\left(-\log^{p/2} n\right)\right), \quad n \geq n_1.$$

В заключение автор выражает свою признательность профессору Н. У. Араке-
ляну за постановку задачи и руководство.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов", Мат. сб., т. 5, стр. 24 - 44, 1984.
2. Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, М.-Л., Гостехиздат, 1941.
3. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение Значений Мероморфных Функций, М., Наука, 1970.
4. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.

23 Апреля 1995

Ереванский государственный университет