О РАВНОМЕРНО-КАСАТЕЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЛАКУНАРНЫМИ СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ НА МНОЖЕСТВАХ КАРЛЕМАНА

В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 4, 1995

Пусть Ω – односвязная область из конечной комплексной плоскости, содержащая начало координат, $E \subset \Omega$ – множество Карлемана без внутренних точек. В работе доказывается, что произвольная непрерывная на E функция допускает равномерно-касательную аппроксимацию функциями, голоморфными в Ω и представимыми в окрестности начала координат степенными рядами с лакунами произвольной нулевой плотности. Рассмотрены два приложения к теории граничных свойств аналитических функций.

§0. ВВЕДЕНИЕ

В теории комплексных приближений и ее приложениях очень важна роль множеств Карлемана (см. [1], [2]). Пусть Ω – область из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с непустой границей $\partial\Omega \neq \emptyset$, E – (относительно) замкнутое собственное подмножество из Ω, $H(\Omega)$ – множество всех голоморфных в Ω функций. Замкнутое собственное подмножество $E \subset \Omega$ называется множеством Карлемана, если для любой непрерывной на E и голоморфной на множестве ее внутренних точек E^0 функции f и для любой непрерывной на E функции $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in H(\Omega)$ такая, что

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon(z) \quad \text{для} \quad z \in E. \tag{1}$$

Примеры множеств Карлемана для случая, когда $\Omega = \mathbb{C}$, впервые были найдены в 1927 г. Т. Карлеманом [3] и в 1937 г. А. Рот [4]. Дальнейшие исследования,

---

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным при частичной поддержке Гранта № MVK000 из Международного Научного Фонда.

проведенные в работах М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева, Н. У. Аракеляна, П. М. Готье, А. А. Нерсесяна и других авторов, привели к характеризации этих множеств (см. [5] – [9]). Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем некоторые понятия.

Для произвольных множеств A, B из $\overline{\mathbb{C}}$ обозначим через $\rho(A, B)$ сферическое расстояние между ними

$$\rho(A,B) = \inf\left\{\frac{|z-\zeta|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|\zeta|^2}}: \quad z \in A, \zeta \in B\right\}.$$

Для каждого числа $\varepsilon > 0$ положим

$$V_\varepsilon(\partial\Omega) = \{z \in \Omega: \quad \rho(z, \partial\Omega) < \varepsilon\}$$

ε – окрестность границы области Ω.

Определение 1. Пусть F – компактное подмножество из $\overline{\mathbb{C}}$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, и пусть γ – непрерывное отображение полуоткрытого интервала $[0, 1)$ в $\overline{\mathbb{C}}$, для которого

$$\gamma(0) = z, \qquad \lim_{t \to 1} \rho(F, \gamma(t)) = 0.$$

Тогда мы скажем, что γ соединяет z с F.

Определение 2. Произвольное (относительно) замкнутое подмножество $E \subset \Omega$ называется K–множеством ($E \in (K)$), если каждой точке $z \in \Omega \setminus E$ соответствует непрерывная кривая $\gamma_z \subset \Omega \setminus E$ такая что :

a) γ_z соединяет z с $\partial\Omega$ и

b) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $z \in V_\delta(\partial\Omega)$ следует $\gamma_z \subset V_\varepsilon(\partial\Omega)$.

Отметим, что свойство множества E быть K–множеством допускает равносильную переформулировку. Пусть $\Omega^* = \Omega \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация Александрова области Ω. Тогда включение $E \in (K)$ означает, что множество $\Omega^* \setminus E$ связно и локально-связно в точке ∞.

Определение 3. Произвольное (относительно) замкнутое подмножество $E \subset \Omega$ принадлежит классу (A), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что каждая компонента связности множества E^0 может пересекаться только с одним из множеств $V_\delta(\partial\Omega)$ и $\Omega \setminus V_\varepsilon(\partial\Omega)$.

Полная характеризация множеств Карлемана дается следующей теоремой.

Теорема А. *Произвольное (относительно) замкнутое подмножество $E \subset \Omega$ является множеством Карлемана тогда и только тогда, когда $E \in (K) \cap (A)$.*

В этой статье исследуются некоторые вопросы о возможности равномерно-касательных приближений на множествах Карлемана голоморфными функциями, представимыми в окрестности нуля лакунарными степенными рядами.

Для произвольного множества e из конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$ будем обозначать через $\bar{e}$, ∂e и e^0 соответственно его замыкание, границу и внутренность в $\mathbf{C}$. Пусть $C(e)$ – множество всех непрерывных на e комплекснозначных функций. Для подпоследовательности $Q = \{q_n\}_1^\infty$ натуральных чисел $\mathbf{N}$ будем обозначать через $\Delta(Q)$ ее плотность :

$$\Delta(Q) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{q_n}.$$

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}$ – односвязная область, содержащая начало координат, $E \subset \Omega$ – множество Карлемана, для которого $E^0 = \emptyset$. Для любой подпоследовательности $Q \subset \mathbf{N}$ с плотностью $\Delta(Q) = 1$ и произвольных функций f и $\varepsilon > 0$ из $C(E)$ существует функция $g \in H(\Omega)$, представимая в виде*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad g_n = 0 \quad \text{при} \quad n \notin Q \cup \{0\} \tag{2}$$

и удовлетворяющая условию (1).

Замечание. В Теореме 1, вообще говоря, невозможно понизить плотность последовательности Q. Это утверждение легко следует из соответствующего утверждения относительно равномерных приближений многочленами с пропусками [10]. Отметим также, что некоторые случаи, когда в Теореме 1 возможно понизить плотность, были исследованы в статье [11].

§1. ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ЛЕММА

Для компакта $e \subset \mathbf{C}$ пусть $A(e)$ – банахово пространство всех непрерывных на e и голоморфных на его внутренности комплекснозначных функций с нормой $||f|| = \sup |f|(e)$. Положим

$$D_r = \{z\colon\ |z| < r\} \quad \text{для} \quad 0 < r < +\infty.$$

Лемма. *Пусть $K \subset \mathbf{C}$ – компакт со связным дополнением $\mathbf{C} \setminus K$ и $0 \in K^0$. Пусть $Q \subset \mathbf{N}$ – подпоследовательность с плотностью $\Delta(Q) = 1$, а f – произвольная функция из $C(K) \cap H(\overline{K^0})$, представимая в виде*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad f_n = 0 \quad \text{для} \quad n \notin Q \cup \{0\}.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен

$$p(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n, \quad c_n = 0 \quad \text{для} \quad n \notin Q \cup \{0\} \tag{3}$$

такой, что

$$|f(z) - p(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in K.$$

Доказательство. Обозначим через $\pi(Q)$ подпространство для $A(K)$, порожденное всеми многочленами вида (3). Мы должны доказать, что $f \in \pi(Q)$. Согласно теоремам Хана–Банаха и Ф. Риса достаточно доказать, что для произвольной комплексной меры Бореля μ на ∂K из выполнения соотношений

$$\int_{\partial K} z^n \, d\mu(z) = 0, \qquad n \in Q \cup \{0\} \tag{4}$$

следует условие

$$\int_{\partial K} f(z) \, d\mu(z) = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим преобразование Коши

$$G(t) = \int_{\partial K} \frac{d\mu(z)}{t - z}, \qquad t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \partial K\,.$$

Функция $G \in H(\overline{\mathbf{C}} \setminus \partial K)$. С учетом соотношений (4) в окрестности бесконечности

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-p_n - 1} \int_{\partial K} z^{p_n} \, d\mu(z), \qquad |t| > R, \tag{6}$$

где $R = \max\{|\zeta|\colon\ \zeta \in K\}$, $P = \{p_n\}_1^{\infty}$ – подпоследовательность, дополнительная к $Q = \{q_n\}_1^{\infty}$ относительно $\mathbf{N}$. Покажем, что ряд (6) сходится для всех таких t, $|t| > r$, где $r = \min\{|\zeta|\colon\ \zeta \in \overline{K^0}\}$. В самом деле, поскольку $G \in H(\overline{\mathbf{C}} \setminus \partial K)$ и $\overline{\mathbf{C}} \setminus K$ связно, то по (6) этот ряд аналитически продолжается на $\overline{\mathbf{C}} \setminus K$. С другой стороны, из связности $\overline{\mathbf{C}} \setminus K$ и включения $\partial K^0 \subset \partial K$ следует, что на каждой окружности ∂D_s, $s > r$ найдется открытая дуга положительного раствора $\theta(s)$, содержащаяся в $\overline{\mathbf{C}} \setminus K$. Однако из условия $\Delta(Q) = 1$ следует

$$\Delta(P) = 1 - \Delta(Q) = 0 < \frac{\theta(s)}{2\pi}, \quad s > r.$$

Следовательно, если бы радиус сходимости s ряда (6) удовлетворял условию $s > r$, то по теореме Фабри–Полиа [12] на каждой открытой дуге окружности ∂D_s, имеющей раствор $\theta(s)$, этот ряд имел бы хоть одну особую точку. Полученное противоречие показывает, что $s \leq r$, т. е. ряд (6) сходится при $|t| > r$.

Обозначим через $G_1(t)$, $|t| > r$, сумму ряда (6). Поскольку функции $G(t)$, $G_1(t)$ совпадают для $|t| > R$ и $\overline{\mathbf{C}} \setminus K$ – связно, то по теореме единственности аналитических функций они будут совпадать для $t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus K$. Поэтому, с учетом связности $\overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{K^0}$, по теореме единственности для преобразования Коши ([13], стр. 69) найдем, что мера μ сосредоточена на $\partial \overline{K^0}$. Следовательно, применяя еще раз теорему единственности аналитических функций, получим

$$G(t) = G_1(t) \quad \text{для} \quad t \in \overline{\mathbf{C}} \setminus \overline{K^0}. \tag{7}$$

В условиях леммы существует открытое множество U такое, что $\overline{K^0} \subset U$ и $f \in H(U)$. Поэтому найдется спрямляемый контур $\Gamma \subset U \setminus \overline{K^0}$ с $\operatorname{Ind}_\Gamma(0) = 1$ такой, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{для} \quad z \in \overline{K^0}.$$

Отсюда, с учетом (7) имеем

$$\int_{\partial \overline{K^0}} f(z)\, d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{K^0}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)\, G_1(\zeta)\, d\zeta.$$

Если теперь взять окружность $\gamma = \{\zeta\colon\ |\zeta| = \rho\} \subset U$ такую, что $\rho > r$, то используя интегральную теорему Коши, получим

$$\int_{\partial \overline{K^0}} f(z)\, d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, G_1(\zeta)\, d\zeta.$$

Степенные ряды функций f и G_1 абсолютно и равномерно сходящиеся при $\zeta \in \gamma$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, G_1(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{q_n} \zeta^{q_n} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_{p_k} \zeta^{-p_k - 1} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{q_n} b_{p_k} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \zeta^{q_n - p_k - 1}\, d\zeta = 0,$$

так что

$$\int_{\partial \overline{K^0}} f(z)\, d\mu(z) = 0.$$

Лемма доказана.

Приведенная лемма является лакунарным аналогом известной теоремы Рунге о приближении многочленами. Отметим, что частный случай леммы, когда $f \in H(K)$, установлен в работе [14] И. Кореваара и М. Диксона.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В доказательстве Теоремы 1 мы следуем аппроксимационной схеме, примененной в работе [5] М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева, с внесением в нее определенных изменений. Без ограничения общности можем предполагать, что функция ε является функцией от $\rho(z, \partial\Omega)$ и убывает при $\rho(z, \partial\Omega) \to 0$. Для каждого $r \in \in (0, \rho(0, \partial\Omega))$ положим

$$A_r = \{z \in \Omega: \quad \rho(z, \partial\Omega) \geq r\}.$$

Поскольку $E \in (K)$, то каждому r соответствует $r^* \in (0, r)$ такое, что любую точку z множества $(\Omega \setminus E) \cap (\Omega \setminus A_{r^*})$ можно соединить с $\partial\Omega$ дугою $\gamma_z \subset \subset (\Omega \setminus E) \cap (\Omega \setminus A_r)$. Пусть B_r – множество всех z из $(\Omega \setminus E) \cap (\Omega \setminus A_r)$, которые можно соединить с $\partial\Omega$ только такими дугами из $\Omega \setminus E$, которые пересекают A_r. Положим

$$\Omega_r = A \cup \overline{B_r}.$$

Отметим, что $\Omega_r \subset \mathbf{C}$ – компакт и $\Omega_r \subset A_{r^*}$. Из определения Ω_r с учетом односвязности Ω в $\mathbf{C}$ легко следует, что $\Omega \setminus \Omega_r$ связно, поэтому $\mathbf{C} \setminus \Omega_r$ – также связно. Отсюда с учетом условия $E \in (K)$ следует, что для каждого r множество $E \cap \Omega_r$ – компакт из $\mathbf{C}$ со связным дополнением $\mathbf{C} \setminus (E \cap \Omega_r)$.

Выберем последовательность $\{r_n\}_0^\infty$ положительных чисел так, что $r_0 < \rho(0, \partial\Omega)$ и $r_n < 2^{-1}\left(r_{n-1}^*\right)^*$ при $n = 1, 2, \ldots$; ясно, что r_n убывает к нулю при $n \to \infty$. Выберем также последовательности чисел $\{s_n\}_0^\infty$ и $\{t_n\}_0^\infty$ так что $r_n^* < s_n <$

$< t_n < r_{n+1}$ при $n = 0, 1, \ldots$ и положим

$$F_{t_n} = \Omega_{t_{n-1}} \cup \left[E \cap \left(\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}}\right)\right], \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, что F_{t_n} – компакт из $\mathbf{C}$. Далее, $\Omega \setminus F_{t_n}$ связно (значит $\mathbf{C} \setminus F_{t_n}$ также связно), поскольку

$$\Omega \setminus F_{t_n} = \left[(\Omega \setminus \Omega_{t_{n-1}}) \cap (\Omega \setminus E)\right] \cup (\Omega \setminus \Omega_{t_n}).$$

Отметим, наконец, что множества $F_{t_n} \cap \left(\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{r_n^-}\right)$ и $E \cap \left(\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{r_n^-}\right)$ совпадают, так что они оба не имеют внутренности и, следовательно, замыкание внутренности множества F_{t_n} содержится в $\Omega_{r_n^-}$.

Построим по индукции подходящую последовательность $\{p_n\}_0^\infty$ многочленов вида (3). Согласно Теореме 1 работы [10] можно найти многочлен p_0 вида (3) такой, что

$$|f(z) - p_0(z)| < \frac{\varepsilon(t_0)}{2^5} \quad \text{при} \quad z \in E \cap \Omega_{t_0}. \tag{8}$$

Предположим теперь, что многочлены $p_0, p_1, \ldots, p_n$ вида (3) построены так, что

$$|p_k(z)| < 2^{-k} \quad \text{при} \quad z \in A_{r_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n} p_k(z)| < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(t_k)}{2^{k+2}} & \text{при} \quad z \in E \cap \left(\Omega_{t_k} \setminus \Omega_{t_{k-1}}\right), k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \dfrac{\varepsilon(t_n)}{2^{n+5}} & \text{при} \quad z \in E \cap \left(\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Построим многочлен p_{n+1} вида (3). По теореме С. Н. Мергеляна существует многочлен q_{n+1} такой, что

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n} p_k(z) - q_{n+1}(z)| < \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+6}} \quad \text{при} \quad z \in E \cap \Omega_{t_{n+1}}. \tag{11}$$

Далее, по лемме Урысона существует функция $\psi_{n+1} \in C(F_{t_{n+1}})$ такая, что $0 \le \psi_{n+1}(z) \le 1$ для $z \in F_{t_{n+1}}$, причем $\psi_{n+1}(z) = 0$ при $z \in F_{t_{n+1}} \cap A_{s_n}$ и $\psi_{n+1}(z) = 1$ при $z \in F_{t_{n+1}} \setminus \Omega_{t_n}$. Функция $q_{n+1}\psi_{n+1}$ принадлежит $C(F_{t_{n+1}})$ и голоморфна на замыкании внутренности множества $F_{t_{n+1}}$. Поскольку $\mathbf{C} \setminus F_{t_{n+1}}$ связно, согласно лемме найдем многочлен p_{n+1} вида (3) такой, что

$$|(q_{n+1}\psi_{n+1})(z) - p_{n+1}(z)| < \delta_{n+1} \quad \text{при} \quad z \in F_{t_{n+1}}.$$

Следовательно, при подходящем выборе числа $\delta_{n+1} > 0$ отсюда, в частности имеем (полагаем $\Omega_{t_{-1}} = \emptyset$) :

$$|p_{n+1}(z)| < 2^{-n-1} \quad \text{при} \quad z \in A_{r_n};$$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n+1} p_k(z)| < \frac{\varepsilon(t_k)}{2^{k+2}} \quad \text{при} \quad z \in E \cap \left(\Omega_{t_k} \setminus \Omega_{t_{k-1}}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1;$$

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n+1} p_k(z)| < \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+6}} \quad \text{при} \quad z \in E \cap \left(\Omega_{t_{n+1}} \setminus \Omega_{t_n}\right).$$

Кроме того, при $z \in E \cap \left(\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}}\right)$ из (10), (11) получим :

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n+1} p_k(z)| \leq |f(z) - \sum_{k=0}^{n} p_k(z)| + \delta_{n+1} + |(q_{n+1}\psi_{n+1})(z)| <$$

$$< 2\,|f(z) - \sum_{k=0}^{n} p_k(z)| + \delta_{n+1} + \frac{\varepsilon(t_{n+1})}{2^{n+6}} < \frac{\varepsilon(t_n)}{2^{n+2}}. \tag{12}$$

Мы доказали, что многочлен p_{n+1} вида (3) удовлетворяет оценкам (9), (10) с заменой в них n на $n+1$, так что последовательность полиномов $\{p_n\}_0^\infty$ вполне построена.

Поскольку $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то согласно (9) ряд $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(z)$ сходится локально-равномерно в Ω. Следовательно, его сумма $g \in H(\Omega)$ и в окрестности нуля представляется степенным рядом вида (2). Пусть $z \in E$, тогда $z \in$ $\in E \cap \left(\Omega_{t_n} \setminus \Omega_{t_{n-1}}\right)$ при некотором $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому, с учетом (10), (12), получим

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - \sum_{k=0}^{n} p_k(z)| +$$

$$+ \left|\sum_{k=n}^{\infty} p_{k+1}(z)\right| < \frac{\varepsilon(t_n)}{2^{n+5}} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varepsilon(t_k)}{2^{k+2}} < \varepsilon(t_n) < \varepsilon(\rho(z, \partial\Omega)).$$

Теорема доказана.

§3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Теорему 1 можно использовать для изучения некоторых свойств лакунарных степенных рядов. Мы ограничимся двумя ее приложениями к теории граничных свойств аналитических функций.

Теорема 2. *Пусть $Q \subset \mathbf{N}$ – подпоследовательность с плотностью $\Delta(Q) = 1$, $\Omega \subset \mathbf{C}$ – односвязная область и $0 \in \Omega$, $\{\alpha_n(t)\}_0^\infty$ – счетное семейство взаимно непересекающихся простых граничных кривых из Ω, f – произвольная функция из $C\left(\cup_1^\infty \alpha_n\right)$. Тогда существует функция $g \in H(\Omega)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и такая, что для каждого n*

$$f(\alpha_n(t)) - g(\alpha_n(t)) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Теорема 3. *Пусть $Q \subset \mathbf{N}$ – подпоследовательность, удовлетворяющая условию $\Delta(Q) = 1$, f – произвольная функция из $C(D_1)$, $F \subset \partial D_1$ – множество первой категории, $\{L(\theta)\}$ – семейство взаимно непересекающихся граничных кривых, оканчивающихся в точках $e^{i\theta} \in F$, которое гомеоморфно семейству радиальных отрезков $\{\lambda(\theta)\}$, оканчивающихся в точках F (т.е. существует гомеоморфизм φ из $\overline{D}_1$ на себя, который оставляет неподвижной каждую точку на ∂D_1 и такой, что $L(\theta) = \partial(\lambda(\theta))$. Тогда существует функция $g \in H(D_1)$, представимая в окрестности нуля степенным рядом вида (2) и такая, что для каждого $e^{i\theta} \in F$*

$$f(z) - g(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to e^{i\theta} \quad \text{вдоль} \quad L(\theta).$$

Теорема 2 является лакунарным аналогом хорошо известного результата Ф. Багемила и В. Сейделя (см. [15], [16] и обобщение в [17], [18]). Теорема 3 обобщает и усиливает известный результат, восходящий к Ф. Багемилу и В. Сейделу [16] и В. Рудину [19] (см. также [20], стр. 163). Обе Теоремы 2,3 доказываются точно так же, как их частные случаи (когда $Q = \mathbf{N}$) с единственным различием, что вместо теоремы А используется Теорема 1 (подробности см. в [18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. J. Fuchs, Theorie de l'approximation des Fonctions d'une Variable Complexe, Les Presses de l'Universite de Montreal, 1968.
2. Д. Гайер, Лекции по Теории Аппроксимации, М., Мир, 1986.
3. T. Carleman, "Sur un theoreme de Weierstrass," Ark. Mat. Astr. Fys., Bd. 20, no. 4, s. 1 – 5, 1927.
4. A. Roth, "Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Functionen", Comm. Math. Helv., Bd. 11, s. 77 — 125, 1938.
5. М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, "Об одной задаче Карлемана", ДАН СССР, т. 23, № . 8, стр. 746 — 748, 1939.
6. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного

переменного", Успехи мат. наук, т. 7, № 2 (48), стр. 31 – 122, 1952.
7. Н. У. Аракелян, "Равномерные и касательные приближения аналитическими функциями", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 3, № 4–5, стр. 273 – 285, 1968.
8. P. Gauthier, "Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disk", Изв. АН ССР, Математика, т. 4, № 5, стр. 319 — 326, 1969.
9. А. А. Нерсесян, " О множествах Карлемана", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6, № 6, стр. 465 — 471, 1971.
10. В. А. Мартиросян, " О равномерном комплексном приближении многочленами с пропусками", Матем. сб., т. 120, № 4, стр. 451 – 472, 1983.
11. В. А. Мартиросян, Г. В. Арутюнян, "О равномерно-касательном приближении лакунарными степенными рядами на кривых комплексной плоскости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 28, № 3, стр. 31 – 39, 1993.
12. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
13. Т. Гамелин, Равномерные алгебры, М., Москва, 1973.
14. M. Dixon, J. Korevaar, "Approximation by lacunary polynomials," Nederl. Akad. Wetensch. Proced. Ser. A, vol. 80, no. 3, pp. 176 — 194, 1977.
15. F. Bagemihl, W. Seidel, "Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination of analytic and meromorphic functions," Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 39, pp. 1251 — 1258, 1953.
16. F. Bagemihl, "Some boundary properties of analytic functions", Math. Zeit., Bd. 61, s. 186 — 199, 1954.
17. W. Kaplan, "Approximation by entire functions", Mich. Math. J., vol. 3, no. 1, pp. 43 – 52, 1955 – 1956.
18. P. Gauthier, W. Seidel, "Some applications of Arakelian's approximation theorems to the theory of cluster sets", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 6 № 6, стр. 458 — 464, 1971.
19. W. Rudin, "Radial cluster sets of analytic functions," Bull. Amer. Math. Soc., vol. 60, p. 455, 1954.
20. E. F. Collingwood, A. J. Lohwater, The Theory of Cluster Sets, Cambridge Univ. Press, 1966.

16 Марта 1995

Ереванский государственный университет
Институт математики
Национальной Академии Наук Армении