

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ЛАКУНАРНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ОГРАНИЧЕННЫХ НА УГЛЕ ЖОРДАНА

Э. В. Габриелян, В. А. Мартиросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 4, 1995

В статье исследуются вопросы единственности целых функций, имеющих лакунарные степенные ряды и ограниченных на угле Жордана переменного раствора. Найдены новые достаточные условия на лакуны, сводящие любую ограниченную на угле Жордана функцию к постоянной.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Q – подпоследовательность натуральных чисел, $E(Q)$ – множество всех целых функций, имеющих лакунарные степенные ряды

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad f_n = 0, \quad \text{при } n \notin Q \cup \{0\}. \quad (1)$$

Рассмотрим простой угол Жордана из конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\Delta = \{z: |\arg z| < \theta(|z|)\}.$$

Функция θ является положительной, непрерывной и невозрастающей на полуоси $[0, +\infty)$ и $\theta(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow +\infty$. В этой статье мы изучаем такие условия на подпоследовательность Q и угол Жордана Δ , при которых произвольная ограниченная на Δ функция из $E(Q)$ является постоянной. Такого типа вопросы единственности целых функций берут начало от известных работ Г. Поля [1] и А. Макинтайра [2]. Помимо самостоятельного интереса эти вопросы имеют

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным благодаря поддержке второго автора Грантом № MVK000 из Международного Научного Фонда.

интересные связи с вопросами аппроксимации лакунарными полиномами. В настоящей работе получены новые результаты о единственности, обобщающие и усиливающие имевшиеся ранее в [3].

Статья состоит из двух частей: в §1 приведены вспомогательные утверждения, а в §2 – основные результаты.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем сперва некоторые обозначения. Для множества $e \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\bar{e}$ замыкание e в $\mathbb{C}$. Положим $\Pi = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ и обозначим через $H(\Pi)$ множество всех голоморфных на Π функций. Для $a \in \mathbb{C}$ и $r > 0$

$$D_r(a) = \{z : |z - a| < r\}, \quad D_r = D_r(0).$$

Пусть l – медленно изменяющаяся функция на полуоси $[0, \infty)$, т.е. l положительна и непрерывна на $[0, \infty)$, дифференцируема на $(0, \infty)$ и

$$t \frac{l'(t)}{l(t)} \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Тогда функция $tl(t)$ является уточненным порядком при порядке один в смысле Валирона. Из Леммы 9 главы 1 работы [4] следует, что функция

$$\psi(r, \theta) = \operatorname{Re} \left[z \int_1^r \frac{l(t)}{t+z} dt - z^2 \int_r^\infty \frac{l(t)}{t(t+z)} dt \right], \quad z = re^{i\theta}$$

равномерно по θ , $|\theta| \leq \pi/2$, удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\psi(r, \theta)}{rl(r)(\cos \theta + \theta \sin \theta)} = 1. \quad (3)$$

Предположим дополнительно, что l ограничена и удовлетворяет условию

$$l^*(r) = \int_1^r \frac{l(t)}{t} dt \rightarrow +\infty, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \exp \left[-z^2 \int_1^\infty \frac{l(t)}{t(t+z)} dt \right], \quad z \in \Pi. \quad (5)$$

Очевидно, что $g \in H(\Pi)$ и не имеет нулей. Из (3) следует, что равномерно по θ , $|\theta| \leq \pi/2$,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})| + rl^*(r) \cos \theta}{rl(r)(\cos \theta + \theta \sin \theta)} = 1. \quad (6)$$

Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, для которой

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0 \quad \text{для некоторого } \delta > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Положим

$$h(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - \lambda_n}{z + \lambda_n} \exp\left(\frac{2z}{\lambda_n}\right), \quad z \in \Pi. \quad (8)$$

Из условия (7) (см. [5], стр. 159) следует, что $h \in H(\Pi)$, имеет нули только на последовательности $\{\lambda_n\}_1^\infty$ и удовлетворяет оценкам

$$\log |h(z)| \leq (2N(|z|) + C_1) \operatorname{Re} z, \quad \text{при } z \in \Pi, \quad (9)$$

$$\log |h(z)| \geq (2N(|z|) + C_2) \operatorname{Re} z, \quad \text{при } z \in \Pi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\delta/3}(n), \quad (10)$$

где $N(r) = \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-1}$ и постоянные C_1, C_2 зависят только от δ .

Лемма 1. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая (7). Для того чтобы существовала нетривиальная функция из $H(\Pi)$ нулевого экспоненциального типа и имеющая нули на последовательности $\{\lambda_n\}_1^\infty$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{\log r} = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существует функция φ с требуемыми свойствами. По формуле Т. Карлемана для полукруга $\Pi \cap \overline{D_r}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n \leq r} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{\lambda_n}{r^2} \right) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log |\varphi(it)\varphi(-it)|}{1+t^2} + dt \\ &+ \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log |\varphi(re^{i\theta})| \cos \theta \, d\theta + O(1), \quad \text{при } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку φ нулевого экспоненциального типа на Π , то легко видеть, что интегралы в правой части (12) являются величинами порядка $o(\log r)$ при $r \rightarrow +\infty$. Из (7) следует, что левая часть (12) не меньше величины $N(r) + O(1)$ при $r \rightarrow +\infty$. Следовательно, из (12) вытекает (11).

Достаточность. Для построения требуемой функции φ рассмотрим два возможных случая. Если функция N ограничена, достаточно положить

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - \lambda_n}{z + \lambda_n}, \quad z \in \Pi.$$

Если N неограничена, то положим

$$\varphi(z) = h(z)g(z)\exp(-Cz), \quad z \in \Pi, \quad (13)$$

где h - функция (8), g - функция, соответствующая по (5) подлежащей выбору функция l , $C > 0$ - достаточно большое число, зависящее только от δ . С целью выбора функции l положим

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{N(t)}{\log t} & , \quad \text{при } t \geq t_0 = \max(\lambda_1, e), \\ \frac{N(t_0)}{\log t_0} & , \quad \text{при } t \in [0, t_0] \end{cases}$$

и пусть $\varepsilon_1(r) = \sup\{\varepsilon(t) : t \geq r\}$ при $r \in [0, \infty)$. Ясно, что $\varepsilon_1(r)$ положительна, не возрастает и $\varepsilon_1(r) \geq \varepsilon(r)$ на $[0, \infty)$. Кроме того, из (11) следует, что ε_1 ограничена сверху и $\varepsilon_1(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$. Рассмотрим функцию

$$\varepsilon^*(r) = \begin{cases} \int_{r/e}^r \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt & , \quad \text{при } r \geq e, \\ \int_1^e \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt & , \quad \text{при } r \in [0, e]. \end{cases}$$

Она положительна, непрерывна и не возрастает на $[0, \infty)$. Из невозрастания ε_1 имеем

$$\varepsilon_1(r) \leq \varepsilon^*(r) \leq \varepsilon_1(r/e), \quad \text{при } r \geq e. \quad (14)$$

Положим теперь

$$l(r) = \frac{2}{\log r} \int_1^r \frac{\varepsilon^*(t)}{t} dt + \frac{1}{\log^2 r}, \quad \text{при } r \geq e$$

и продолжим l на $[0, e)$ с сохранением положительности, убывания и дифференцируемости. Определенная функция l , очевидно, положительна и дифференцируема на $[0, \infty)$ с отрицательной производной. Из невозрастания ε^* имеем

$$\int_1^r \frac{\varepsilon^*(t)}{t} dt \geq \varepsilon^*(r) \log r, \quad \text{при } r \geq 1.$$

Откуда легко следует, что l удовлетворяет условию (2) :

$$r \frac{l'(r)}{l(r)} = -\frac{1}{\log r} + \frac{2\varepsilon^*(r) \log^2 r - 1}{2 \log^2 r \int_1^r \frac{\varepsilon^*(t)}{t} dt + \log r} \rightarrow 0, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Далее, из невозрастания ε^* , ε_1 , из (14) и $\varepsilon_1(r) \geq \varepsilon(r)$, получим

$$l(r) \geq 2\varepsilon^*(r) \geq 2\varepsilon_1(r), \quad \text{при } r \geq e$$

и

$$\begin{aligned}
 l^*(r) &= \int_1^e \frac{l(t)}{t} dt + \int_e^r \frac{l(t)}{t} dt \geq \int_1^e \frac{l(t)}{t} dt + 2\varepsilon_1(r)(\log r - 1) \geq \\
 &\geq 2\varepsilon(r) \log r + O(1) = 2N(r) + O(1), \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Итак, l удовлетворяет условию (4). Отметим, что функция $rl(r)$ возрастает к бесконечности на $[e^2, \infty)$. Применяя правило Лопиталья и учитывая (14) найдем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} l(r) = 2 \lim_{r \rightarrow +\infty} \varepsilon^*(r) = 0.$$

Таким образом, выбор функции l осуществлен вполне корректно и следовательно, из (6), (9) и (15) вытекает, что формула (13) задает требуемую функцию. Лемма 1 доказана.

В следующей лемме оцениваются коэффициенты степенного ряда произвольной функции из $E(Q)$, если Q — достаточно редкая последовательность.

Лемма 2. Пусть $\Delta = \{z : |\arg z| < \theta(|z|)\}$ — простой угол Жордана с положительной, непрерывной и невозрастающей на $[0, +\infty)$ функцией θ такой, что $\theta(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow +\infty$, Q — подпоследовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию (11). Тогда для произвольной функции $f \in E(Q)$ имеют место оценки: для любого $r > 0$ и каждого $s > 1, q > 1$

$$|f_{q_n}| r^{q_n} \leq C^{q_n} r M(f; sr) V(r; s, q), \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$V(r; s, q) = \max \left\{ 1, \int_0^\infty \exp[u(\pi q l(u) - \theta(sr))] \frac{du}{1+u^2} \right\},$$

$$M(f; r) = \max \{|f(z)| : z \in \overline{\Delta} \cap \overline{D_r}\},$$

l — функция, соответствующая Q по Лемме 1, если функция N неограничена, и $l = 0$, если N ограничена, $C > 0$ — постоянная, не зависящая от r и n .

Доказательство. Зафиксируем натуральное число n и определим

$$\Phi_n(z) = \frac{z}{(1+z)^4} h_n(z) g(z) \exp(-C_1 z) \in H(\Pi), \quad z \in \Pi,$$

где g соответствует по формуле (5) функции l , h_n соответствует по формуле (8) последовательности $Q \setminus \{q_n\}$ и $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от z и n . Из (9),

(10) и рассуждений, использованных в доказательстве достаточной части Леммы 1, легко следует, что Φ_n является нулевого экспоненциального типа на Π , имеет нули только на последовательности $Q \cup \{0\} \setminus \{q_n\}$ и для каждого $q > 1$

$$|\Phi_n(z)| \leq \frac{|z|}{1+|z|^4} \exp[q |\operatorname{Im} z| |\arg z| l(|z|)], \quad \text{при } z \in \Pi, \quad (17)$$

$$|\Phi_n(z)| \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^4} \exp(-C_2 \operatorname{Re} z), \quad \text{при } z \in \Pi \setminus \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} D_{1/3}(k), \quad (18)$$

где $C_2 > 0$ — постоянная, не зависящая от z и n . Поскольку Φ_n нулевого экспоненциального типа на Π , то по классической теореме Е. Линделефа (см. [6], стр. 216 или [7], стр. 340) степенной ряд

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_n(k) z^k, \quad |z| < 1, \quad (19)$$

определяет функцию g_n , голоморфную в $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. Рассмотрим адамаровскую композицию ([6], стр. 37) функций f и g_n :

$$h(z; f, g_n) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \Phi_n(k) z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

С одной стороны, для произвольного $r > 0$

$$h(r; f, g_n) = f_{q_n} \Phi_n(q_n) r^{q_n}. \quad (20)$$

С другой стороны

$$h(r; f, g_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(t) g_n(r/t) \frac{dt}{t}, \quad (21)$$

где γ — произвольная окружность с центром в нуле и радиусом больше r , $\operatorname{Ind}_{\gamma}(0) = 1$. Для подходящей деформации контура γ возьмем $s > 1$ и рассмотрим контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(0) = 1$, где

$$\Gamma_1 = \{t: |t| = sr, |\arg t| \leq \theta(sr)\},$$

$$\Gamma_2 = \left\{t: \frac{a}{2} \leq |t| \leq sr, |\arg t| = \theta(sr)\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{t: |t| = \frac{a}{2}, \theta(sr) \leq |\arg t| \leq \pi\right\}, \quad a \in (0, 1).$$

Поскольку f — целая функция и $g_n(r/t)$ голоморфна при $t \in \mathbb{C} \setminus [0, r]$, то контур γ в формуле (21) можем заменить на Γ . При таком выборе контура интегрирования из (20), (21) для произвольного $r > 0$ имеем

$$|f_{g_n}| |\Phi_n(q_n)| r^{q_n} \leq C_3 r M(f; sr) \max\{|g_n(r/t)| : t \in \Gamma\}, \quad (22)$$

где $C_3 > 0$ — постоянная, не зависящая от r и n .

Для оценки функции g_n нам понадобится формула Линдефафа (см. [6], стр. 216) :

$$g_n(w) = - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Phi_n(\tau) \exp(\tau \log w)}{\exp(2\pi i \tau) - 1} d\tau, \quad \text{при } |\pi - \text{Arg } w| < \pi, \quad (23)$$

где $\log w = \log |w| + i \text{Arg } w$, $\text{Arg } w$ — однозначная ветвь аргумента с $0 \leq \text{Arg } w < 2\pi$. Совершая в (23) замену переменной $\tau = iu$ и учитывая неравенство

$$|\exp(-2\pi i u) - 1| \geq C_4^{-1} \exp(\pi(|u| - u)), \quad u \in (-\infty, \infty),$$

где $C_4 > 0$ — абсолютная постоянная, получим : при $|\pi - \text{Arg } w| < \pi$

$$\begin{aligned} |g_n(w)| &\leq C_4 \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(iu)| \exp[|u|(|\pi - \text{Arg } w| - \pi)] du = \\ &= C_4 \int_0^{\infty} (|\Phi_n(iu)| + |\Phi_n(-iu)|) \exp[u(|\pi - \text{Arg } w| - \pi)] du. \end{aligned} \quad (24)$$

Перейдем к оценке $|g_n(r/t)|$ при $t \in \Gamma$. Предположим сперва, что $t \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Для $w = r/t$ выберем $\text{Arg } w = -\arg t$ при $\arg t < 0$ и $\text{Arg } w = \pi - \arg t$ при $\arg t > 0$. Тогда из (24) найдем

$$|g_n(r/t)| \leq C_4 \int_0^{\infty} (|\Phi_n(iu)| + |\Phi_n(-iu)|) \exp[-u\theta(sr)] du, \quad t \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \quad (25)$$

Для $t \in \Gamma_1$ имеем $|w| = |r/t| \leq s^{-1}$, так что из (19) и (17) найдем

$$|g_n(r/t)| \leq C_5, \quad \text{при } t \in \Gamma_1, \quad (26)$$

где $C_5 > 0$ — постоянная, не зависящая от r, t и n . Из (18), (22), (25) и (26) очевидно следует (16). Лемма 2 доказана.

Замечание 1. В предположениях Леммы 2, если функция N неограничена, то

$$V(r; s, q) \leq C_1 \exp \left[\theta(sr) l^{-1} \left(\frac{\theta(sr)}{\pi q} \right) \right], \quad \text{для } r \geq 0,$$

где l^{-1} — обратная к функции l , $C_1 > 1$ — постоянная, не зависящая от r .

Замечание легко следует из (16), так как функция l убывает к нулю и непрерывна на $[0, \infty)$, а функция $rl(r)$ возрастает на $[e^2, \infty)$.

Для выпуклой на полуоси $[0, \infty)$ функции ψ , удовлетворяющей условию

$$\frac{\psi(r)}{r} \rightarrow +\infty, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty, \quad (27)$$

положим

$$\tau_\psi(r) = \max\{rt - \psi(t) : t \geq 0\}, \quad r \geq 0. \quad (28)$$

Хорошо известно (см. [8], стр. 7), что функция τ_ψ сама является выпуклой

$$\frac{\tau_\psi(r)}{r} \rightarrow +\infty, \quad \text{при } r \rightarrow +\infty$$

и

$$\psi(r) = \max\{rt - \tau_\psi(t) : t \geq 0\}, \quad r \geq 0.$$

Дж. Андерсон и К. Бинмор получили в [9] результат, который мы формулируем в приспособленной для наших целей форме.

Теорема А. Произвольная трансцендентная функция $f \in E(Q)$, для которой

$$|f_{q_n}| r^{q_n} \leq C^{q_n} \exp(\psi(\log r)), \quad r \geq 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где ψ — выпуклая функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая (27), и постоянная $C > 1$ не зависит от n и r , является неограниченной на $[0, \infty)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[N(r) - \frac{1}{2r} \tau_\psi(r) \right] = -\infty. \quad (29)$$

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть Δ, Q, s, q и V — те же, что в Лемме 2. Тогда произвольная ограниченная на Δ функция из $E(Q)$ является постоянной, если существует выпуклая на $[0, \infty)$ функция ψ , удовлетворяющая (27), (29) и условию

$$\psi(r) \geq r + \log V(e^r; s, q), \quad r \geq 0. \quad (30)$$

Доказательство. Пусть f — произвольная ограниченная на Δ трансцендентная функция из $E(Q)$. Опеним коэффициенты f_{q_n} ряда Маклорена этой функции. Применяя Лемму 2, из (16), (30) и из ограниченности f на Δ получим, что при $r \geq 1$

$$|f_{q_n}| r^{q_n} \leq C^{q_n} \exp(\psi(\log r)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от n и r . Из Теоремы А следует, что f является многочленом. Теорема доказана.

Замечание 2. В Теореме 1 условие (29) следует из условия

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left[N(r) - \frac{1}{2} \psi^{-1}(r) \right] = -\infty, \quad (31)$$

где ψ^{-1} — обратная к функции ψ .

Подставляя в (28) $t = \psi^{-1}(r)$ имеем $\tau_\psi(r) \geq r\psi^{-1}(r) - r$ для $r > 0$, так что (31) влечет (29).

Предложение 1. Пусть Δ — угол Жордана из Леммы 2, Q — подпоследовательность натуральных чисел с ограниченной функцией N . Тогда применима Теорема 1.

Доказательство. Из ограниченности N следует ограниченность функции $V(r; s, q)$ для $r > 0$. Поэтому можем применить Теорему 1, положив в ней, например, $\psi(r) = r^2 + C_1$, где $C_1 > 0$ — достаточно большая постоянная.

Предложение 2. Пусть Δ — угол Жордана из Леммы 2, Q — подпоследовательность натуральных чисел, с неограниченной функцией N , удовлетворяющей следующим условиям а) и б) :

$$а) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{l(r) \log r} < 1, \quad (32)$$

где l — медленно изменяющаяся и убывающая к нулю на $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая (4), а функция $l(r) \log r$ — вогнутая на $[0, \infty)$ и $\frac{r}{l(r) \log r} \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$;

б) существуют постоянные $s > 1$, $q > 1$, $C_1 \in (0, 2)$ и C_2 такие, что

$$\nu^{-1}(r) \geq r + \theta(se^r)l^{-1}\left(\frac{\theta(se^r)}{\pi q}\right) + C_2, \quad \text{при } r \geq 0, \quad (33)$$

где l^{-1} , ν^{-1} — обратные к функциям $l(r)$ и $\nu(r) = C_1 l(r) \log r$ соответственно.

Тогда применима Теорема 1.

Доказательство. Поскольку функция N неограничена, то из (32) следует, что $l(r) \log r \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$. Из вогнутости функции $l(r) \log r$ на $[0, +\infty)$ следует, что она возрастает к бесконечности на $[0, +\infty)$. Замечая еще, что функция $r/\log r$ возрастает к бесконечности на $[e, +\infty)$, получим, что функция $rl(r)$ также возрастает к бесконечности на $[e, +\infty)$. Следовательно, в Леммах 1, 2 можем выбрать l как в (32). Из условия $\frac{r}{l(r) \log r} \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$ следует (27). Из (32) и Замечания 2 следует (29), а из (33) и Замечания 1 следует (30). Теперь можем применить Теорему 1. Доказательство завершено.

Следствие. Пусть подпоследовательность Q натуральных чисел и угол Жордана Δ удовлетворяют одному из условий :

- 1) $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{\log \log \log r} < \frac{1}{2\beta}$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \theta(r) \exp(r^\beta) > 0$, $\beta > 0$;
- 2) $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{\log \log r} < \frac{1}{2\beta}$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \theta(r) r^\beta > 0$, $\beta > 0$;
- 3) $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r)}{(\log r)^{1/\beta}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1+(1-\beta^{-1})^2} \left(\frac{2C}{\pi}\right)^{1/\beta}$,
 $\theta(r)(\log r)^{\beta-1} \geq C$, при $r \geq e$, $\beta > 1$, $C > 0$.

Тогда произвольная ограниченная на Δ функция из $E(Q)$ является постоянной.

Следствие легко вытекает из Предложений 1 и 2 соответственно ограниченности и неограниченности функции N .

Отметим, что Теорема 1 обобщает и усиливает имевшиеся ранее результаты о единственности из работы [3], в которых вместо функции N использовалась

функция $n(r) : n(r)$ – число членов последовательности Q , не превосходящих числа r . В [3] имеются также некоторые результаты о точности Теоремы 1.

Теорема 1 легко обобщается на случай целых векторно-значных функций. Пусть X – комплексное пространство Фреше, т. е. локально выпуклое (комплексное) топологическое пространство, топология которого задается полной и инвариантной метрикой (см. [10], [11]). Пусть $E(Q, X)$ – множество всех голоморфных отображений из $\mathbb{C}$ в X , имеющих лакунарные степенные ряды вида (1) с коэффициентами из X .

Теорема 2. Для любого комплексного пространства Фреше X справедлива Теорема 1, если в ней множество $E(Q)$ заменить на $E(Q, X)$.

Доказательство. Пусть $f \in E(Q, X)$ и x^* – произвольный линейный непрерывный функционал над X . Тогда целая функция $x^*(f)$ принадлежит $E(Q)$ и удовлетворяет Теореме 1. Поэтому имеем $x^*(f(z)) = x^*(f(0))$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Поскольку линейные непрерывные функционалы над X разделяют точки пространства X , то получим, что $f(z) = f(0)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Polya, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen", Math. Z., Bd. 29, S. 549 – 640, 1929.
2. A. J. Macintyre, "Asymptotic paths of integral functions with gap power series", Proc. London Math. Soc. (3), vol. 2, pp. 286 – 296, 1952.
3. В. А. Мартиросян, "О целых функциях, представимых лакунарными степенными рядами и ограниченных на угле Жордана", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, № 3, стр. 280 — 300, 1986.
4. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.
5. R. P. Boas, Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.
6. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
7. P. Dienes, Taylor Series, Clarendon Press, Oxford, 1931.
8. С. Мандельброт, Примакающие Ряды. Регуляризация Последовательностей. Применения. М., Иностранная Литература, 1955.
9. J. M. Anderson, K. G. Binmore, "On entire functions with gap power series", Glasgow Math. J., vol. 12, no. 2, pp. 79 – 97, 1971.
10. У. Рудин, Функциональный Анализ, М., Мир, 1975.
11. Х. Шефер, Топологические Векторные Пространства, М., Мир, 1971.

16 Мая 1995

Ереванский государственный Университет,
Институт математики
Национальной Академии Наук Армении