ЭФФЕКТИВНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ С ВЕКТОРНОЗНАЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н. У. Аракелян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 4, 1995

В работе автора [1] были установлены критерии эффективного аналитического продолжения степенных рядов от комплексного переменного вне логарифмически выпуклых множеств. Формулируемые в терминах голоморфных функций, интерполирующих коэффициенты степенных рядов, эти критерии обобщали классические результаты Э. Линделефа, Ф. Карлсона и др.
В настоящей статье результаты работы [1] обсуждаются более подробно и обобщаются на степенные ряды с векторнозначными коэффициентами. Дополнительно обсуждается вопрос о единственности интерполирующих "функций коэффициентов". Это позволяет устанавливать некоторые взаимосвязи указанного метода функций коэффициентов с теорией голоморфных полугрупп операторов.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть X – комплексное пространство Банаха. X-значный *аналитический элемент с центром в нуле* – это сходящийся в X степенной ряд от комплексной переменной z :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n, \quad |z|<R, \quad f_n \in X. \tag{1}$$

Аналитический элемент с центром в бесконечности определяется сходящимся рядом вида

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{z^{n+1}}, \quad |z|>R, \quad f_n \in X. \tag{2}$$

Исследование, описанное в этой публикации, оказалось возможным благодаря поддержке Грантом № MVK000 из Международного Научного Фонда.

Проблема описания коэффициентов f_n, обеспечивающих однозначное аналитическое продолжение рядов (1), (2) в ту или иную область, содержащую круг сходимости ряда, является (в случае $X = \mathbb{C}$) основной проблемой вейерштрассовской теории аналитических функций. Ограниченность возможностей и затруднения предложенного Вейерштрассом подхода изучения проблемы подтолкнули исследователей конца 19-го столетия к поиску новых более эффективных методов аналитического продолжения. Основы нового подхода были заложены в исследованиях Адамара, Ле Руа, Лоо, Линделефа, Вигерта, получивших дальнейшее продолжение и развитие в работах Фабера, Карлсона, Полиа, Коулинга и других авторов (подробную информацию об этих и других работах можно извлечь из книг [2] – [4], обзора [5] и работ [1], [6]).

В основе нового подхода к проблеме аналитического продолжения степенных рядов вида (1) или (2) лежит идея *интерполирования* коэффициентов (f_n) некоторой голоморфной на полуоси $[0, \infty)$ функцией φ ("функцией коэффициентов") :

$$f_n = \varphi(n) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}. \tag{3}$$

Обычно полагают, что функция φ – целая либо голоморфная в некотором угле, содержащем $[0, \infty)$, связывая вопрос об аналитическом продолжении элемента с асимптотическим поведением функции φ вблизи бесконечности.

Следует отметить плодотворность указанного *метода функции коэффициентов* также при решении другой важной проблемы Вейерштрассовской теории аналитических функций – проблемы локализации особенностей степенных рядов (см. [7] и [8]).

Для заданного элемента вида (1) или (2) всегда можно указать (см. [4], §1.2) бесконечное множество функций коэффициентов, являющихся к тому же целыми функциями экспоненциального роста. Однако они, как правило, малопригодны для удовлетворительного решения задачи аналитического продолжения. Традиционно продолжение аналитических элементов (1) или (2) рассматриваются вне множеств особенностей E вида

$$E = \exp(L), \tag{4}$$

где $L \subset \mathbf{C}$ – выпуклое и замкнутое множество (можно привести веские доводы в пользу рассмотрения именно такого вида множеств особенностей). Таким образом, деликатность построения функции коэффициентов φ заключается в необходимости связывания ее асимптотических свойств с величинами, характеризующими множества E или L.

В случае множеств E вида (4), где L – выпуклый компакт, Ф. Карлсон в основном решил задачу аналитического продолжения элемента (1) вне E, указав необходимые и достаточные условия в терминах экспоненциальной индикатрисы функции коэффициентов φ (см. [9] и [10], а также [4]). В случае же множества E с неограниченным L (включая простейший случай $E = [1, \infty)$), имелись лишь отдельные достаточные условия (Линделеф, Лоо). Некоторые критерии аналитического продолжения для неограниченных множеств (включая случай $E = [1, \infty)$) впервые были получены в [6] благодаря применению результатов из теории касательных приближений целыми функциями. Дальнейшее развитие этого подхода в [1] привело к решению общей задачи продолжения элементов (1), (2) вне *произвольных* множеств E вида (4).

В настоящей статье результаты работы [1] об аналитическом продолжении в некоторых аспектах рассматриваются и обсуждаются более подробно ; они обобщаются на ряды вида (1), (2) с коэффициентами из комплексного банахова пространства X. Специфический интерес представляет случай, когда X – алгебра Банаха с единицей.

Формулировка результатов, комментарии и доказательства приведены в параграфе 2, а параграф 1 содержит необходимые для этого понятия и факты из теории функций и теории приближений.

Мы будем использовать следующие обозначения :

$\mathbb{N}$ = множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;

$\mathbb{R}$ = вещественная ось ;

$\mathbf{C}$ = комплексная плоскость, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ = расширенная комплексная плоскость ;

X = комплексное банахово пространство

Для множества $A \subset \bar{\mathbf{C}}$ обозначим

$A^o =$ внутренность A, $\overline{A} =$ замыкание A, $\partial A =$ граница A;

$H_X(A) =$ множество функций $f : A \longmapsto X$, голоморфных в окрестности A,

$H(A) = H_{\mathbf{C}}(A)$.

Для множества $A \subset \mathbf{C}$ обозначим

$\hat{A} =$ замкнутая выпуклая оболочка A;

$-A = \{-z : z \in A\}$, $A^* = \{\overline{z} : z \in A\}$;

$f(A) = \{f(z) : z \in A\}$ для $f : B \longmapsto \mathbf{C}$ и $A \subset B \subset \mathbf{C}$;

$D_r(a) =$ открытый круг $\{z : |z - a| < r\}$, $a \in \mathbf{C}$, $r > 0$.

Для $\omega \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$ обозначим

$\Delta_\omega(\alpha, \beta) =$ спиральный угол $\{re^{i\theta} : r \geq 0,\ \alpha \leq \theta - \omega \log r \leq \beta\}$;

$L_\omega(\alpha) =$ логарифмическая спираль $\Delta_\omega(\alpha, \alpha)$; $\Delta(\alpha, \beta)$ - угол $\Delta_0(\alpha, \beta)$;

§1. НЕОБХОДИМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

1.1. *Опорная функция* Минковского $H : \mathbf{C} \longmapsto (-\infty, \infty]$ непустого множества $A \subset \mathbf{C}$ определяется следующей формулой :

$$H(z) = \sup_{\zeta \in A} \operatorname{Re}(\zeta \overline{z}), \quad z \in \mathbf{C}.$$

Очевидно, имеем

$$H(z_1 + z_2) \leq H(z_1) + H(z_2), \quad z_1, z_2 \in \mathbf{C},$$

$$H(-z) \geq -H(z), \quad H(\lambda z) = \lambda H(z), \quad z \in \mathbf{C},\ \lambda > 0.$$

Из этих неравенств, учитывая, что $H(0) = 0$ и договорившись положить $0 \cdot \infty = 0$, мы приходим к следующему свойству функции H. Если $\lambda z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, то

$$\lambda H(z) \leq H(\lambda z) \leq \lambda_1 H(z_1) + \lambda_2 H(z_2). \tag{1.1}$$

В комплексном анализе более принято называть *опорной функцией* функцию (см. [11], гл. 1, §19)

$$K_A(\theta) = H(e^{i\theta}) = \sup_{\zeta \in A} \operatorname{Re}(\zeta e^{-i\theta}), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что $K_A = K_{\hat{A}}$, где $\hat{A}$ – замкнутая выпуклая оболочка множества A. Очевидно, что K_A является 2π-периодической функцией на $\mathbb{R}$, непрерывной в случае ограниченных A. Отсюда следует, что в случае неограниченных A она является *полунепрерывной снизу* функцией. Характерным свойством функции $K = K_A$ является свойство *тригонометрической выпуклости* :

$$K(\theta)\sin(\theta_2-\theta_1) \le K(\theta_1)\sin(\theta_2-\theta) + K(\theta_2)\sin(\theta-\theta_1), \tag{1.2}$$

если $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta - \theta_1 < \pi$ и $\theta_2 - \theta < \pi$. Оно следует из (1.1) с учетом тождества

$$e^{i\theta}\sin(\theta_2-\theta_1) = e^{i\theta_1}\sin(\theta_2-\theta) + e^{i\theta_2}\sin(\theta-\theta_1).$$

Обратно, пусть $K : \mathbb{R} \longmapsto (-\infty, \infty]$ - некоторая 2π-периодическая, полунепрерывная снизу и тригонометрически выпуклая функция. Тогда существует, и притом одно, непустое множество A такое, что $A = \hat{A}$ и $K = K_A$, а именно

$$A = \bigcap_{|\theta|\le\pi} \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\zeta e^{-i\theta}) \le K(\theta)\}. \tag{1.3}$$

С небольшим изменением доказательство проводится аналогично случаю непрерывной K (см. [12], 5.2). В частности, условие $A \neq \emptyset$ выводится из того, что функция K достигает *минимума* в некоторой точке $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Тогда (см. [11], §16) из (1.2) следует, что

$$K(\theta) \ge K(\theta_0)\cos(\theta-\theta_0), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

так что $K(\theta_0)e^{i\theta_0} \in A$. Из (1.2) при $\theta_2 = \beta$, $\theta_1 = \beta - \pi$ следует оценка

$$K(\beta) + K(\beta-\pi) \ge 0 \quad \text{для } \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Левую часть оценки (1.4) называют *шириной множества A в направлении* $e^{i\beta}$. Из (1.2) также следует, что множество $K_A^{-1}(+\infty)$ либо пусто, либо состоит из интервалов длины не меньше π, концы которых могут принадлежать ему или нет. При этом функция K_A непрерывна на внутренности $\mathbb{R} \setminus K_A^{-1}(+\infty)$.

Опорной прямой множества $A = \hat{A}$ при $\theta \in \mathbb{R}$, $K_A(\theta) < +\infty$, называют прямую l_θ : $\operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) = K_A(\theta)$. При этом $A \cap l_\theta$ является замкнутым (в $\mathbb{C}$) интервалом (или точкой), концы которого называются *крайними точками* A. Отметим также, что для множеств $A = \hat{A}$ и $B = \hat{B}$ условие $A \subset B$ равносильно условию $K_A \le K_B$.

1.2. Индикатор и индикаторная диаграмма. Пусть X – комплексное банахово пространство. Для открытого множества $\Omega \subset \mathbf{C}$ через $H_X(\Omega)$ обозначим множество X-значных голоморфных в Ω функций (см. [13], гл. 3, §2), полагая $H_X(\Omega) = H(\Omega)$ при $X = \mathbf{C}$. Для *замкнутого* множества $E \subset \mathbf{C}$ обозначим через $H_X(E)$ объединение множеств $H_X(\Omega)$ по открытым множествам $\Omega \supset E$, полагая $H_X(E) = H(E)$ при $X = \mathbf{C}$. Для $\varphi \in H_X(\Omega)$ и произвольного $x^* \in X^*$ (сопряженное к X пространство) функция $z \longmapsto \log|x^*(\varphi(z))|$ *субгармонична* в Ω. Легко заключить, что функция $z \longmapsto \log||\varphi(z)||$ является также субгармонической в Ω. Это замечание позволяет распространить на X-значные голоморфные функции теорему о двух константах и ее следствия – теоремы Фрагмена-Линделефа, а также понятие индикатора с сохранением его свойств. Приведем вкратце нужные нам понятия и факты из этой области.

Для угла $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$ обозначим через $\Delta^o = \Delta^o(\alpha, \beta)$ его внутренность, полагая, что $\Delta = \Delta^o = \mathbf{C}$ при $\beta - \alpha = 2\pi$. Положим также $\Delta_\tau = \Delta(\alpha + \tau, \beta - \tau)$, при $0 < \tau < (\beta - \alpha)/2$, так что $\Delta_\tau \subset \Delta^o \cup \{0\}$ для всех τ. *Экспоненциальным типом* функции $\varphi \in H_X(\Delta)$ назовем величину

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(\Delta) = \limsup_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta}} |z|^{-1} \log^+ ||\varphi(z)||$$

и скажем, что φ – функция *экспоненциального типа* (на Δ), если $\sigma_\varphi < +\infty$; множество таких функций обозначим через $H_X^B(\Delta)$. Аналогично *внутренним экспоненциальным типом* функции $\varphi \in H_X(\Delta^o)$ назовем величину

$$\sigma_\varphi^o = \sigma_\varphi(\Delta^o) = \sup_{\Delta_\tau \subset \Delta^o \cup \{0\}} \sigma_\varphi(\Delta_\tau).$$

Скажем, что φ – функция *внутреннего экспоненциального типа* (на Δ^o), если $\sigma_\varphi^o < +\infty$, а множество таких φ обозначим через $H_X^B(\Delta^o)$. Последний термин особенно уместен, когда $\varphi \in H_X(\Delta)$, поскольку тогда $\sigma_\varphi(\Delta^o) \leq \sigma_\varphi(\Delta)$ и возможны случаи, когда $\sigma_\varphi(\Delta^o) < +\infty$ и $\sigma_\varphi(\Delta) = +\infty$. Отметим однако, что $\sigma_\varphi(\Delta^o) = \sigma_\varphi(\Delta)$ при $\Delta = \mathbf{C}$.

Введение функций внутреннего экспоненциального типа оказалось полезным в вопросах аналитического продолжения (см. [6], §1 и [5], гл. 1, §5). Они обладают многими свойствами экспоненциального типа. Отметим, в частности, что для $\varphi, \psi \in H_X(\Delta^\circ)$ и $\mu \in H(\Delta^\circ)$

$$\sigma^\circ_{\varphi+\psi} \leq \sup(\sigma^\circ_\varphi, \sigma^\circ_\psi), \quad \sigma^\circ_{\mu\varphi} \leq \sigma^\circ_\varphi + \sigma^\circ_\mu. \tag{1.5}$$

Для функции $\varphi \in H_X(\Delta^\circ)$, $\varphi \not\equiv 0$ ее (экспоненциальный) ***индикатор*** h_φ : $(\alpha, \beta) \longmapsto [-\infty, \infty]$ определяется формулой

$$h_\varphi(\theta) = \limsup_{r\to+\infty} r^{-1} \log ||\varphi(re^{i\theta})||, \tag{1.6}$$

полагая $h_\varphi \equiv -\infty$ при $\varphi \equiv 0$. Для $\varphi \in H_X(\Delta)$ мы полагаем в (1.6) $\theta \in [\alpha, \beta]$. Интересно отметить, что если $(0, +\infty) \subset \Delta^\circ$ и φ – полугруппа ограниченных линейных операторов, заданная и голоморфная в Δ°, то $\sigma_\varphi(\Delta_\tau) < +\infty$ на каждом угле $\Delta_\tau \subset \Delta^\circ \cup \{0\}$ и в (1.6) верхний предел можно заменить пределом.

Далее мы ограничимся рассмотрением функций из линейных классов $H^B_X(\Delta)$ и $H^B_X(\Delta^\circ)$. Для них индикатор будет ***ограниченной сверху*** функцией. В частности, если $\varphi, \psi \in H^B_X(\Delta^\circ)$ и $\mu \in H^B(\Delta^\circ)$, то с учетом (1.5) имеем

$$h_{\varphi+\psi} \leq \sup(h_\varphi, h_\psi), \quad h_{\mu\varphi} \leq h_\varphi + h_\mu. \tag{1.7}$$

Об основных свойствах индикатора см. [11], гл. 1, §§15,16 и [12], гл.5. Наиболее важным из них является свойство ***тригонометрической выпуклости*** функции $h = h_\varphi$ (ср. (1.2)) : если $\theta_1 < \theta < \theta_2$ и $\theta_2 - \theta_1 < \pi$, то

$$h(\theta)\sin(\theta_2 - \theta_1) \leq h(\theta_1)\sin(\theta_2 - \theta_1) + h(\theta_2)\sin(\theta - \theta_1), \tag{1.8}$$

полагая, что $[\theta_1, \theta_2] \subset (\alpha, \beta)$, если $\varphi \in H^B_X(\Delta^\circ)$ и $[\theta_1, \theta_2] \subset [\alpha, \beta]$, если $\varphi \in H^B_X(\Delta)$.

Рассмотрим далее следующие два альтернативных случая : либо $h > -\infty$ на (α, β), либо $h(\theta_0) = -\infty$ для некоторого $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$. В первом случае из (1.8) с учетом конечности h на (α, β) и ее ограниченности сверху следует ограниченность h на (α, β). С учетом этого из (1.8) следует, что h удовлетворяет условию Липшица на(α, β), откуда следует, что h непрерывна на (α, β), а в точках α и β существуют пределы соответственно справа и слева :

$$\lim_{\theta\to\alpha+0} h(\theta) = h(\alpha + 0), \quad \lim_{\theta\to\beta-0} h(\theta) = h(\beta - 0).$$

Если h определена на $[\alpha, \beta]$, то она ограничена там сверху и из (1.8) следует ее полунепрерывность сверху на $[\alpha, \beta]$. Это означает, что $h(\alpha + 0) \leq h(\alpha)$ и $h(\beta - 0) \leq h(\beta)$ (имеются примеры со строгими неравенствами). При $\alpha = \beta - \pi$ из (1.8) следует :

$$h(\alpha + 0) + h(\beta - 0) \geq 0. \tag{1.9}$$

Отметим также следующее свойство индикатора (см. [12]), Теорема 5.1.9). Для $\varepsilon > 0$ и $\Delta_\tau \subset \Delta^o \cup \{0\}$ существует $r_0 > 0$ такое, что

$$r^{-1} \log ||\varphi(re^{i\theta})|| < h_\varphi(\theta) + \varepsilon, \quad r > r_0, \quad re^{i\theta} \in \Delta_\tau. \tag{1.10}$$

Во втором случае из условия $h(\theta_0) = -\infty$ и из (1.8) следует, что $h = -\infty$ на (α, β) и если $\varphi \not\equiv 0$, то для каждого угла $\Delta_\tau \subset \Delta^o \cup \{0\}$

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \Delta_\tau}} |z|^{-1} \log ||\varphi(z)|| = -\infty. \tag{1.11}$$

В действительности последнее утверждение возможно только при $\beta - \alpha \leq \pi$; это следует из утверждения, легко выводимого из [15], 5.8 : если $\varphi \in H_X^B(\Delta)$, $\varphi \not\equiv 0$ и $\beta - \alpha = \pi$, то

$$h(\alpha) + h(\beta) \geq 0. \tag{1.12}$$

При этом условие (1.12) нельзя заменить условием (1.9).

Сказанное выше позволяет, с учетом (1.12), распространить для функций $\varphi \not\equiv 0$ свойство тригонометрической выпуклости на более общий случай, когда $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta - \theta_1 < \pi$ и $\theta_2 - \theta < \pi$ (ср. (1.2)).

В частности, индикатор целой функции φ экспоненциального типа обладает всеми свойствами опорной функции некоторого выпуклого компакта I_φ (см. пункт 1.1.), названного Г. Полиа *индикаторной диаграммой* функции φ (см. [14]). Нам будет удобно, следуя Г. Полиа, называть *индикаторной диаграммой* функции $\varphi \in H_X^B(\Delta^o)$ или $\varphi \in H_X^B(\Delta)$ множество

$$I_\varphi = \bigcap_{\theta \in (\alpha, \beta)} \{\zeta \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} (\zeta e^{-i\theta}) \leq h_\varphi(\theta)\}.$$

Оно не изменится, если положить $\theta \in [\alpha, \beta]$, заменяя в первом случае $h(\alpha)$ на $h(\alpha + 0)$ и $h(\beta)$ на $h(\beta - 0)$. Кроме того, $I_\varphi = \emptyset$ тогда и только тогда, если

$h_\varphi(\theta_0) = -\infty$ для некоторого $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$. При $\beta - \alpha > \pi$ это возможно только для $\varphi \equiv 0$. Если $I_\varphi \neq \emptyset$, то $I_\varphi = \mathring{I}_\varphi$ и для $\beta - \alpha > \pi$, $I\varphi$ компактен. Кроме того, если K – опорная функция множества I_φ, то очевидно, что в общем случае $K(\theta) \leq h_\varphi(\theta)$ для $\theta \in (\alpha, \beta)$, однако

$$K(\theta) = h_\varphi(\theta), \quad \theta \in (\alpha, \beta), \quad \text{при } \beta - \alpha \leq \pi. \tag{1.13}$$

Это следует из того, что полагая $K(\alpha) = h_\varphi(\alpha + 0)$, $K(\beta) = h_\varphi(\beta - 0)$, $K(\theta) = +\infty$ для $\theta \in (\beta, \alpha + 2\pi)$, мы получим на $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ функцию, 2π-периодическое продолжение которой на $\mathbb{R}$ удовлетворяет всем свойствам опорных функций, а множество I_φ совпадает с множеством (1.3). Из сказанного следует, что при $\beta - \alpha = \pi$ ширина индикаторной диаграммы I_φ в направлении $e^{i\beta}$ (см. (1.4)) равна левой части (1.9), если конечно $I_\varphi \neq \emptyset$. Таким образом, в отличие от случая целых функций ($\Delta = \mathbb{C}$), величина (1.12) может оказаться больше ширины I_φ в направлении $e^{i\beta}$.

Для $\varphi \in H_X^\beta(\Delta^o)$ и $a \in \Delta^o$ положим $\varphi_a(z) = \varphi(z + a)$ для $z \in \Delta^o$. Мы утверждаем, что

$$h_{\varphi_a} = h_\varphi, \quad \text{т.е.} \quad I_{\varphi_a} = I_\varphi, \quad \text{для } a \in \Delta^o. \tag{1.14}$$

В случае целых функций φ экспоненциального типа соотношение (1.14) было доказано Г. Полиа (см. [14], гл. 2, п.29). При $\Delta \neq \mathbb{C}$ можно ограничиться случаем $h_\varphi > -\infty$ (иначе либо $\varphi \equiv 0$, либо выполняется (1.11), откуда $I_{\varphi_a} = \emptyset$ для $a \in \Delta^o$). Тогда мы можем воспользоваться оценкой (1.10).

Для $a \in \Delta^o$ и $\rho e^{it} \in \Delta_\tau^o$, $\rho \geq \rho_0$, положим $\rho e^{it} + a = re^{i\theta} \in \Delta^o$. Поскольку

$$|\rho - r| \leq |a|, \quad |e^{i\theta} - e^{it}| \leq \frac{2|a|}{\rho},$$

то при подходящем выборе ρ_0 имеем, что $re^{i\theta} \in \Delta_\tau$ и $r \geq r_0$. Так как $r/\rho \to 1$ и $e^{i\theta} \to e^{it}$ при $\rho \to \infty$, то учитывая непрерывность h_φ и переходя в (1.10) к верхнему пределу при $\rho \to \infty$, получим, что $h_{\varphi_a}(t) \leq h_\varphi(t) + \varepsilon$, так что $h_{\varphi_a} \leq h_\varphi$. Отсюда, заменяя a на $-a$ и φ на φ_a, мы получим обратное неравенство $h_{\varphi_a} \geq h_\varphi$, что доказывает (1.14).

1.3. Единственность. Пусть φ и ψ – целые функции экспоненциального типа со значениями из комплексного банахова пространства X. Спрашивается : при каких ограничениях на индикаторные диаграммы I_φ и I_ψ из условия

$$\varphi(n) = \psi(n) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.15}$$

следует, что $\varphi \equiv \psi$? Ответ на поставленный вопрос необходим для выяснения запаса "функций коэффициентов", обеспечивающих аналитическое продолжение соответствующего степенного ряда вне компактов Карлсона. Наиболее известный результат в этом направлении – это теорема единственности Карлсона (см. [12], гл.9 или [4], §1, Теорема 1.3.5; о векторнозначном аналоге см. [13], гл.3, Теорема 3.13.6). Она решает вопрос в терминах индикаторной диаграммы функции $\phi = \varphi - \psi$, требуя, чтобы ее ширина (см. (1.4)) в направлении мнимой оси была меньше 2π. Это излишне строгое для наших целей требование. Простая идея рассмотрения ширины индикаторной диаграммы в подходящем направлении приводит нас к следующему результату.

Теорема 1.1. *Пусть ϕ – целая X-значная функция и $\sigma_\phi < \infty$. Если $\phi(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ и индикаторная диаграмма I_ϕ не содержит вертикального отрезка длины $\geq 2\pi$, то $\phi \equiv 0$.*

Отсюда следует ответ на интересующий нас вопрос.

Теорема 1.2. *Пусть φ и ψ – целые X-значные функции экспоненциального типа, удовлетворяющие (1.15). Пусть $I_\varphi \subset A$ и $I_\psi \subset A$, где A – выпуклый компакт, не содержащий вертикального отрезка длины $\geq 2\pi$. Тогда $\varphi \equiv \psi$.*

Краткое доказательство. В самом деле, полагая $\phi = \varphi - \psi$, учитывая (1.5), (1.7) и свойство монотонности K_A по A, получим $I_\phi \subset I_\varphi \cup I_\psi \subset A$, откуда, согласно Теореме 1.1, $\phi \equiv 0$.

Саму Теорему 1.1 можно вывести из следующей теоремы.

Теорема 1.3. *Пусть $\phi \in H_X^B(\Delta)$, где $\Delta = \Delta(\alpha, \alpha+\pi)$ для некоторого $\alpha \in (-\pi, 0)$. Если $\phi(n) = 0$ для $n \in \mathbb{N}_0$ и*

$$h_\phi(\alpha) + h_\phi(\alpha + \pi) < 2\pi|\sin\alpha|, \tag{1.16}$$

то $\phi \equiv 0$ на Δ.

Теорема 1.3 является аналогом теоремы единственности Карлсона для случая "косых" (относительно множества $\mathbb{N}_0$) полуплоскостей, совпадая с ней при $\alpha = -\pi/2$. Доказательство стандартное. Если $\phi \not\equiv 0$, то полагая

$$F(z) = \frac{\phi(z)}{\sin \pi z} \quad \text{для } z \in \Delta,$$

получим, что $F \not\equiv 0$ и

$$h_F(\theta) = h_\phi(\theta) - \pi |\sin \theta| \quad \text{для } \theta \in [\alpha, \alpha + \pi], \tag{1.17}$$

так как для функции $\sin \pi z$ верхний предел в (1.6) можно при $\theta \neq 0$ заменить пределом. Из (1.16) и (1.17) следует, что $h_F(\alpha) + h_F(\alpha + \pi) < 0$, что противоречит свойству (1.12).

Нам остается вывести Теорему 1.1 из Теоремы 1.3. Сколь угодно малым расширением мы можем заключить I_ϕ в выпуклый компакт A с гладкой границей, состоящей из одних крайних точек. Мы можем считать, что множество A также не содержит вертикального отрезка длины $\geq 2\pi$.

Полагая $a = -K_A(\pi)$ и $b = K_A(0)$, согласно (1.4) имеем, что $a \leq b$. Таким образом, A лежит в полосе $S_1 : a \leq \operatorname{Re} z \leq b$. Для $x \in [a, b]$ пересечение l_x множества A с прямой $\operatorname{Re} z = x$ является отрезком, сводящемся к точке при $x = a$ и $x = b$. Это исключает случай $a = b$, так что $a < b$. Длина $l(x)$ отрезка l_x дифференцируема по x и $l(a) = l(b) = 0$. Поэтому $l'(x_0) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in (a, b)$, так что касательные к границе A в концах отрезка l_{x_0} параллельны.

Обозначим через S_2 замкнутую полосу, ограниченную указанными касательными, и пусть $e^{i\alpha}$, $\alpha \in (-\pi, 0)$ – перпендикулярное к ним направление. Тогда ширина полосы S_2 равна $l(x_0)|\sin \alpha|$, и поскольку $l(x_0) < 2\pi$, то ширина параллелограмма $S_1 \cap S_2 \supset A \supset I_\phi$ в направлении $e^{i\alpha}$ будет меньше $2\pi|sin\alpha|$. Таким образом, условие (1.16) выполнено, и по Теореме 1.3, $\phi \equiv 0$.

1.4. Логарифмически выпуклые компакты. Компакт $E \subset \hat{\mathbb{C}}$ назовем *логарифмически выпуклым* (лог-выпуклым), если E является замыканием в $\hat{\mathbb{C}}$ множества вида $\exp(L)$, где L – некоторое выпуклое в $\mathbb{C}$ множество. Нам будет удобно считать лог-выпуклыми также множества $E = \{0\}$ и $E = \{\infty\}$, полагая для них $L = \emptyset$. Множества вида $\exp(L)$, где $L \subset \mathbf{C}$ выпукло и замкнуто, естественно возникают в связи с задачами аналитического продолжения степенных рядов в терминах их коэффициентов. Случай *ограниченных* L впервые в общем виде рассмотрен Ф. Карлсоном (см. [9] и [10]); общие *неограниченные* множества L рассмотрены в [1] и [5], гл.1, §5.

Лог-выпуклый компакт очевидно связен. Без ограничения общности можно считать, что определяющее E выпуклое множество L замкнуто в $\mathbf{C}$, так что $L = \hat{L}$. Тогда

$$E \setminus \{0, \infty\} = \exp(L). \tag{1.18}$$

Отметим, что точка 0 или ∞ не может быть изолированной точкой E, если $L \neq \emptyset$. Условие $0 \notin E$ или $\infty \notin E$ равносильно ограниченности L, соответственно, слева и справа. Лог-выпуклые компакты E, содержащие обе точки 0 и ∞, имеют простую структуру : $E = L_\omega(\alpha, \beta)$ при некотором $\omega \in \mathbb{R}$ и $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$. Далее мы рассмотрим лишь лог-выпуклые компакты E, для которых либо $\infty \notin E$, либо $0 \notin E$. Кроме того, достаточно ограничиться лог-выпуклым компактами E со связным дополнением.

Итак, пусть $E \subset \mathbf{C}$ – лог-выпуклый компакт со связным дополнением. Рассмотрим сначала случай $0 \notin E^o$. Тогда из (1.18) следует, что L не может содержать вертикального отрезка длины $\geq 2\pi$, так что функция exp однолистна на L. Это означает, что существует непрерывная в некоторой окрестности множества $E \setminus \{0\}$ ветвь логарифма log, такая, что

$$L = \log(E \setminus \{0\}), \tag{1.19}$$

оправдывая введение термина "логарифмически выпуклый компакт". Из (1.19) следует в частности, что

$$\log(\partial E \setminus \{0\}) = \partial L(E). \tag{1.20}$$

Множество $L = L(E)$, определенное в рассмотренном случае с точностью до сдвигов на вектор $2\pi m i$ (где m – целое число) назовем *логарифмической диаграммой* E. Для уточнения геометрии $L(E)$ рассмотрим следующие случаи.

a) Пусть $0 \in \partial E$. Будучи ограниченной справа $L(E)$ неограничена слева ; с учетом выпуклости и замкнутости $L(E)$, для точки $w \in L(E)$ существует такой луч l_w, что $w \in l_w \subset L(E)$. Поскольку $L(E)$ не содержит вертикального отрезка длины $\geq 2\pi$, то все лучи l_w параллельны и одинаково направлены, составляя с полуосью $(-\infty, 0]$ острый угол $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Назовем это число $\beta = \beta(E)$ *направлением* логарифмической диаграммы $L(E)$. (Отметим, что вектор $e^{i\beta}$ направлен противоположно лучам l_w.) Угловой коэффициент $\omega = \tan\beta$ лучей l_w определяется однозначно по E :

$$\omega = \lim_{z \to 0} \frac{\theta(z)}{\log|z|}, \tag{1.21}$$

где $\theta(z)$ – непрерывное значение аргумента точки z на $E \setminus \{0\}$. Отметим, наконец, что совокупность всех прямых, пересекающих $L(E)$ и имеющих угловой коэффициент ω, образует некоторую полосу вида

$$S = \{u + iv : \; v - \omega u \in J\}, \tag{1.22}$$

где J – интервал длины $h \leq 2\pi$ (не обязательно замкнутый). Поскольку

$$\exp(S \setminus L(E)) = \mathbf{C} \setminus E, \tag{1.23}$$

мы заключаем, что $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$ является ω-звездной областью относительно точки ∞, т. е. для каждой точки $\zeta \in \mathbf{C} \setminus E$ область $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$ содержит также дугу логарифмической спирали $L_\omega(\alpha)$, соединяющей ζ с точкой ∞.

b) Пусть теперь $0 \notin E$, так что $L(E)$ ограничена. Повторяя соответствующую часть доказательства Теоремы 1.1, мы можем заключить $L(E)$ в параллелограмм, ограниченный некоторой полосой $a \leq \operatorname{Re} w \leq b$ и замкнутой полосой S вида (1.22), где $h < 2\pi$. Часть полосы S, лежащая левее прямой $\operatorname{Re} w = b$, определяет *направление* $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ диаграммы $L(E)$ с соответствующим угловым коэффициентом $\omega = \tan\beta$. Отметим, что в случае $0 \notin E$ и при фиксированном $L(E)$ полоса S и число β не единственны. Кроме того, из условия $h < 2\pi$ следует существование логарифмической спирали $L_\omega(\alpha) \subset \hat{\mathbf{C}} \setminus E$, соединяющей точки 0 и ∞.

Перейдем теперь к рассмотрению случая $0 \in E^o$, для которого приведенное выше определение (1.19) логарифмической диаграммы теряет силу. Положим

$$r_0 = e^{u_0} = \inf_{z \in \partial E} |z|, \quad r_1 = e^{u_1} = \sup_{z \in E} |z|,$$

и пусть $L = \hat{L}$ – порождающее E, согласно (1.18), множество. Если $u_0 < u_1$, то пересечение L с прямой $\operatorname{Re} w = u$ является замкнутым отрезком длины *меньше* 2π, если $u \in (u_0, u_1]$ и имеет длину 2π, если $u = u_0$. Пусть $w_0 = u_0 + iv_0$ и $w_1 = w_0 + 2\pi i$ – концы упомянутого отрезка. Рассмотрим опорные прямые множества L в точках w_0 и w_1, и пусть l_0 и l_1 – их части, лежащие в полуплоскости $\Pi :\ \operatorname{Re} w \leq u_0$. Лучи l_0 и l_1 образуют с полуосью $(-\infty, 0]$ углы соответственно раствора $\beta_0, \beta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Кроме того, l_0 и l_1 не могут пересекаться на Π (иначе множество L будет ограниченным слева), откуда следует, что $\beta_0 \leq \beta_1$. Выбирая теперь $\beta \in [\beta_0, \beta_1]$, $\omega = \tan\beta$, положим

$$S = \{u + iv :\ 0 \leq v - v_0 - \omega(u - u_0) \leq 2\pi\}.$$

Очевидно, что множество $L_{u_0} = L \setminus \Pi^o$ замкнуто, выпукло и лежит в S. Полагая $S_{u_0} = S \cap \Pi$, легко проверить, что замкнутое множество $L(E) = L_{u_0} \cup S_{u_0}$, будучи пересечением замкнутых полуплоскостей, является выпуклым продолжением L_{u_0}. Кроме того, $L(E) \subset S$ и

$$\exp(L_{u_0}) = E \setminus D_{r_0}(0), \quad \exp(S_{u_0}) = \overline{D_{r_0}(0)} \setminus \{0\},$$

так что $L(E)$ удовлетворяет условию (1.18). Определенное таким образом множество $L(E)$ мы назовем *логарифмической диаграммой* лог-выпуклого множества E, а число β – его *направлением*. Если $u_0 = u_1$, то $E = \overline{D_{r_0}(0)}$ и мы полагаем $L_{u_0} = \emptyset$, $L(E) = S_{u_0}$, выбирая β произвольно из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. Очевидно, что как и в случае $0 \in \partial E$, условие (1.23) выполнятся и при $0 \in E^o$, так что $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$ является ω-звездной областью относительно точки ∞ для $\omega = \tan\beta$.

Из определения множества L_{u_0} следует, что функция exp однолистна на $L_{u_0} \setminus \{w_0, w_1\}$, так что аналогично (1.19) существует непрерывная ветвь логарифма log в некоторой окрестности множества $E \setminus \overline{D_{r_0}(0)}$, такая, что $L_{u_0} = \log(E \setminus$

$\setminus\overline{D_{r_0}(0)})$. Отсюда, в частности следует, что

$$\log(\partial E\setminus\{\zeta_0\})\subset\partial L(E),\quad \text{где } \zeta_0=\exp(w_0). \tag{1.24}$$

Таким образом, понятие логарифмической диаграммы $L(E)$ и ее направления $\beta=\beta(E)$ с соответствующими свойствами мы определили для всех лог-выпуклых компактов $E\subset\mathbf{C}$ со связным дополнением. Несколько другой вариант определения $L(E)$ непосредственно в терминах лог-выпуклого компакта E см. [5], гл.1, 5.4.

Отметим в заключении, что полуплоскость $\Delta\left(\beta-\frac{\pi}{2},\beta+\frac{\pi}{2}\right)$ содержит полуось $[0,\infty)$ и ортогональна к $L(E)$. При этом опорная функция $K(\theta)$ множества $L(E)$ ограничена для $\theta\in\left[\beta-\frac{\pi}{2},\beta+\frac{\pi}{2}\right]$ и равна $+\infty$ для $\theta\in\left(\beta+\frac{\pi}{2},\beta+\frac{3\pi}{2}\right)$. Аналогичную роль для множества $L^*(E)$ играет полуплоскость $\Delta\left(-\beta-\frac{\pi}{2},-\beta+\frac{\pi}{2}\right)$.

Понятие логарифмической диаграммы (и ее направления) можно легко определить и для лог-выпуклых компактов $E\subset\hat{\mathbf{C}}\setminus\{0\}$ со связным дополнением, для которых $\infty\in E$. Так как для преобразования $\psi: z\longmapsto z^{-1}$ мы имеем, что $\psi(E)\subset\mathbf{C}$ является лог-выпуклым компактом и $0\in\psi(E)$, то в этих терминах $L(E)=-L(\psi(E))$, $\beta=-\beta(\psi(E))$, где $\beta(E)\in(-\pi/2,\pi/2)$ угол между образующими $L(E)$ лучами и полуосью $[0,\infty)$.

Замечание. Из аналитических представлений лог-выпуклых компактов $E\subset\mathbf{C}$ (см. [5], гл.1, §5), следует, в частности, что граница ∂E является спрямляемой кривой.

1.5. Результаты из теории приближений. Для дальнейшего нам необходимо привлекать, как и в работах [6] и [1], некоторые результаты из теории *касательных* приближений целыми функциями. Первым результатом в этом направлении является следующая теорема, принадлежащая Т. Карлеману [16].

Теорема. *Пусть γ – замкнутая жорданова кривая в $\hat{\mathbf{C}}$, $\infty\in\gamma$, комплексная функция f и функция $\delta>0$ непрерывны на $\gamma\setminus\{\infty\}$. Тогда для числа $\varepsilon>0$ существует целая функция g такая, что*

$$|f(\zeta)-g(\zeta)|<\varepsilon\delta(\zeta)\quad \textit{для } \zeta\in\gamma\setminus\{\infty\}. \tag{1.25}$$

Приближения вида (1.25) называют *касательными*, если $\delta(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \infty$. Функцию δ называют *скоростью касания* (на бесконечности). Это более строгий сорт приближений, чем равномерные. Более подробные сведения о касательных приближениях можно найти в [17] и [18].

Лемма 1.1. *Пусть γ_1 и γ_2 – жордановы дуги в $\hat{\mathbf{C}}$ с общим концом ζ_0 и $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\zeta_0\}$, функция $\delta > 0$ непрерывна на $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$. Тогда существуют голоморфные на $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\}$ функции λ_1 и λ_2 такие, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и*

$$|\lambda_k(\zeta)| < \delta(\zeta) \quad \text{для } \zeta \in \gamma_k \setminus \{\zeta_0\}, \quad k = 1, 2. \tag{1.26}$$

Схема доказательства. Без ограничения общности можно считать, что $\zeta_0 = \infty$, сделав в противном случае замену переменной $\zeta = \zeta_0 + z^{-1}$. Определим на $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$ непрерывную функцию f, полагая $f = 0$ на $\gamma_1 \setminus \{\infty\}$ и $f = 1$ на $\gamma_2 \setminus \{\infty\}$. Существует замкнутая жорданова кривая γ, такая, что $\gamma_1 \cup \gamma_2 \subset \gamma$. Продолжим функции f и δ непрерывным образом на $\gamma \setminus \{\infty\}$, сохраняя положительность δ. Применяя теорему Карлемана с $\varepsilon = 1$ и полагая $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = 1 - g$, из (1.25) получим (1.26).

Пусть теперь X – комплексное пространство Банаха.

Лемма 1.2 Пусть γ_1 и γ_2 – жордановы дуги в $\hat{\mathbf{C}}$ с общим концом ζ_0 и $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{\zeta_0\}$, функция $\delta > 0$ непрерывна на $(\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$. Для X-значной голоморфной на $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\}$ функции g существуют X-значные голоморфные на $\hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\}$ функции g_1 и g_2 такие, что $g(\zeta) = g_1(\zeta) + g_2(\zeta)$ для $\zeta \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\}$ и

$$||g_k(\zeta)|| < \delta(\zeta) \quad \text{для } \zeta \in \gamma_k \setminus \{\zeta_0\}, \quad k = 1, 2.$$

Лемма 1.2 следует из Леммы 1.1, если заменить там $\delta(\zeta)$ на $\dfrac{\delta(\zeta)}{||g(\zeta)|| + 1}$ для $\zeta \in (\gamma_1 \cup \gamma_2) \setminus \{\zeta_0\}$ и положить $g_k = \lambda_k g$ для $k = 1, 2$.

Лемма 1.3. Для последовательности $(g_n)_{n=0}^{\infty} \subset X$ такой, что $||g_n||^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty$, и числа $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ существует X-значная целая функция φ порядка ≤ 1, экспоненциального типа $\leq \pi$ на полуплоскости $\Delta\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}, \alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ такая, что

$$\varphi(n) = g_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0, \qquad \varphi(n) = 0 \quad \text{для } n = -1, -2, ..., \tag{1.27}$$

$$h_\varphi(\theta) \equiv -\infty, \quad \text{если } |\theta - \alpha| < \frac{\pi}{2}. \tag{1.28}$$

Лемма 1.3 по существу является X-значным аналогом Леммы 1.2 работы [6]. С помощью Леммы 1.2 ее доказательство сводится к случаю, когда целая X-значная функция $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n g_n$ с экспоненциальной скоростью стремится к нулю на бесконечности на некоторой гладкой жордановой кривой γ, когда либо $\gamma = L_\omega(-\pi)$, $\omega = \tan\alpha$, либо γ асимптотически стремится к спирали $L_\omega(-\pi)$, касаясь ее в бесконечности. В остальном повторяется доказательство Леммы 1.2 из [6].

Нам необходимы еще некоторые сведения о касательных приближениях целыми функциями вида (1.25), но на этот раз на неограниченных замкнутых в $\mathbf{C}$ областях Ω с жордановой границей, $\infty \notin \Omega$. Очевидно, функцию f необходимо считать непрерывной на Ω и голоморфной внутри Ω. Для нас достаточно рассмотреть случай, когда f просто голоморфна на Ω. В этом случае возможность *равномерного* приближения f на Ω целыми функциями (т.е. когда $\delta \equiv 1$ на Ω) была указана Карлеманом еще в работе [16], однако вопрос о *касательном* приближении на Ω оказался более деликатным. М. В. Келдыш показал (см. [19] и обзор [20]), что приближения вида (1.25) на Ω могут оказаться невозможными для скоростей касания вида $\delta(\zeta) = \exp(-|\zeta|^\mu)$, если $\mu \geq 1/2$, но они оказываются всегда возможными, если $\mu \in (0, 1/2)$. Это связано с существованием для $\mu \in (0, 1/2)$ такой целой функции ω, что

$$0 < |\omega(z)| < \exp(-|\zeta|^\mu) \quad \text{для } z \in \Omega. \tag{1.29}$$

Векторно-значный вариант результатов М. В. Келдыша также имеет место. Отметим в связи с этим статью [21], где получены аналоги общих теорем о *равномерном* приближении целыми функциями на случай приближения функций f со значениями в комплексном пространстве Банаха X (см. [21], Теорема 3). Для голоморфной на Ω X-значной функции f, равномерно аппроксимируя функцию $(1/\omega)f$ целой X-значной функцией g_1 и полагая $g = \omega g_1$ с учетом (1.29) приходим к следующему результату (для удобства применения мы заменим точку ∞ на $\zeta_0 \in \bar{\mathbf{C}}$).

Лемма 1.4. *Пусть Ω – замкнутая жорданова область в $\mathbf{C}$, $\zeta_0 \in \Omega$ и $f \in$ $\in H_X(\Omega \setminus \{\zeta_0\})$. Для $\varepsilon > 0$ и $\mu \in [0, 1/2)$ существует функция $g \in H_X(\overline{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\})$, такая, что*

$$\|f(\zeta) - g(\zeta)\| < \varepsilon \exp(-|\zeta - \zeta_0|^{-\mu}) \quad \text{для } \zeta \in \Omega \setminus \{\zeta_0\}. \tag{1.30}$$

§2. КРИТЕРИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

2.1. Формулировка результатов. Ниже через X мы будем обозначать произвольное комплексное банахово пространство. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 2.1.. *Пусть $E \subset \mathbf{C}$ – лог-выпуклый компакт со связным дополнением и $0 \in E$. Пусть $L(E)$ – логарифмическая диаграмма E с направлением β. Формальный степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} f_n, \quad f_n \in X \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.1}$$

сходится в окрестности ∞ и представляет голоморфную функцию, допускающую однозначное аналитическое продолжение в $\overline{\mathbf{C}} \setminus E$, тогда и только тогда, если существует X-значная целая функция φ порядка не выше 1, экспоненциального типа на полуплоскости $\Delta(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2})$ (на $\mathbf{C}$, если $0 \in E^o$), такая, что

$$\varphi(n) = f_n \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.2}$$

$$h_\varphi(\theta) \le K_{L(E)}(-\theta), \quad \text{при } |\theta + \beta| < \frac{\pi}{2}. \tag{2.3}$$

Замечания 1. В случае $X = \mathbf{C}$ Теорема 2.1 является версией Теорем 3.1 и 3.2 из [1].

2. Величина $K_{L(E)}(-\theta)$ представляет собой *опорную функцию* сопряженного к $L(E)$ множества $L^*(E)$. С учетом (1.13) и монотонности по A опорных функций K_A, условие (2.3) равносильно условию $I_\varphi \subset L^*(E)$, где I_φ – индикаторная диаграмма φ.

3. В доказательстве части достаточности Теоремы 2.1 ограничения на функцию φ можно ослабить, полагая, что $\varphi \in H_X(\Delta)$ и $\sigma_\varphi(\Delta^o) < +\infty$ для $\Delta =$

$=\Delta(-\beta-\frac{\pi}{2},-\beta+\frac{\pi}{2})$, сохранив при этом условия (2.2) и (2.3). Тогда из части необходимости Теоремы 2.1 следует утверждение об интерполировании таких φ *целыми* функциями ϕ ($\phi(n)=\varphi(n)$ для $n\in\mathbb{N}_0$) порядка не выше 1, $\sigma_\phi(\Delta)<+\infty$ ($\sigma_\phi<+\infty$ на $\mathbb{C}$, если $0\in E^\circ$), удовлетворяющими (2.3).

4. Теорема 2.1 содержательна даже в случае $E=\{0\}$, когда $L(E)=\emptyset$, предлагая условия для того, чтобы ряд (2.1) представлял целую X-значную функцию от z^{-1}. Условие (2.3) (или включение $I_\varphi\subset L^*(E)$) означает, что интерполирующая согласно (2.2) целая функция φ (см. Лемма 1.3) должна удовлетворять условию

$$h_\varphi(\theta)\equiv-\infty,\qquad \text{при } |\theta+\beta|<\frac{\pi}{2},\quad \beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right). \tag{2.4}$$

5. Теорему 2.1 легко переформулировать для степенных рядов с центром в точке 0 вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^nf_n,\quad f_n\in X\quad \text{для } n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.5}$$

полагая, что E – лог-выпуклый компакт в $\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ со связным дополнением и $\infty\in E$. Необходимо лишь в условии (2.3) множество $L(E)$ заменить на $-L(E)$, что равносильно включению $I_\varphi\subset(-L^*(E))$. При этом условие $\sigma_\varphi<+\infty$ на $\hat{\mathbb{C}}$ утверждается при $\infty\in E^\circ$.

Пример 1. Для $\omega\in\mathbb{R}$ и $\sigma\in[0,\pi)$ рассмотрим лог-выпуклый в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ компакт $E=\Delta_\omega(-\sigma,\sigma)\setminus D_1(0)$. Поскольку

$$-L^*(E)=\{u+iv:\ u\le 0,\ |v+\omega u|\le\sigma\},$$

то полагая $\omega=\tan\beta$, $|\beta|<\pi/2$, получим

$$K_{-L^*(E)}(\theta)=\sigma|\sin\theta|\quad \text{при } |\theta+\beta|<\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, из Теоремы 2.1 (ср. с Теоремой 1.2 в [6]) следует

Теорема 2.2. *Если ряд (2.5) имеет радиус сходимости единица, то он допускает аналитическое продолжение в область $\mathbb{C}\setminus\Delta_\omega(-\sigma,\sigma)$ тогда и только тогда, когда существует X-значная целая функция φ экспоненциального типа на*

$\Delta\left(-\beta-\frac{\pi}{2},-\beta+\frac{\pi}{2}\right)$, $|\beta|<\pi/2$, $\tan\beta=\omega$, *удовлетворяющая (2.2) и условию* $h_\varphi(\theta)\le\sigma|\sin\theta|$, *при* $|\theta+\beta|<\pi/2$.

Следующий критерий *регулярности дуги* также может быть выведен из Теоремы 2.1 (аналогично случаю $X=\mathbf{C}$ см. [1], Теорему 3.3).

Теорема 2.3. *Степенной ряд (2.5) с радиусом сходимости единица может аналитически продолжаться через дугу*

$$\gamma_\sigma=\{z:\ |z|=1,\ \sigma<|\arg z|\le\pi\},\quad 0\le\sigma<\pi$$

тогда и только тогда, если существует (X-значная) целая функция φ экспоненциального типа, удовлетворяющая условию (2.2) и условиям

$$h_\varphi(0)=0,\quad |(D_\pm h_\varphi)(0)|\le\sigma,$$

где $D_\pm h_\varphi$ – производные функции h_φ справа и слева.

В следующей теореме рассматривается не охваченный Теоремой 2.2 случай, когда индикаторная диаграмма лог-выпуклого компакта ограничена.

Теорема 2.4. *(a) Пусть φ – целая X-значная функция экспоненциального типа с индикаторной диаграммой $I=I_\varphi$. Тогда из (2.2) следует, что ряд (2.1) имеет однозначное аналитическое продолжение на компоненту открытого множества $\hat{\mathbf{C}}\setminus\exp(I^*)$, содержащую точку ∞.*

(b) Если множество $I=I_\varphi$ не содержит вертикального отрезка длины $\ge 2\pi$, то из (2.2) следует, что представимая рядом (2.1) функция f имеет аналитическое продолжение в точку 0 вдоль логарифмической спирали $L_\omega(\alpha)$ и в окрестности нуля имеет разложение вида (2.5)

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n\varphi(-n-1). \tag{2.6}$$

(c) Если выпуклый компакт $I\subset\mathbf{C}$ не содержит вертикального отрезка длины $\ge 2\pi$, а ряд (2.1) сходится в окрестности точки ∞ и имеет однозначное продолжение в область $\hat{\mathbf{C}}\setminus\exp(I^*)$, то существует X-значная целая функция φ экспоненциального типа с индикаторной диаграммой $I_\varphi\subset I$, удовлетворяющая условиям (2.2).

(d) Функция коэффициентов φ, фигурирующая в пункте (c), единственна.

Теорему 2.4 также легко переформулировать для степенных рядов вида (2.5) с центром 0. Учитывая это, выделим два частных случая Теоремы 2.4, хорошо известные при $X = \mathbb{C}$.

Пример 2 (Г. Полиа, [14]). Ряд (2.5)с радиусом сходимости 1 допускает однозначное аналитическое продолжение вне дуги $\{e^{i\theta} : |\theta| \le \sigma\}$, $0 \le \sigma < \pi$ тогда и только тогда, если существует целая функция φ, удовлетворяющая условиям (2.2) и такая, что $\sigma_\varphi \le \sigma$ и $I\varphi \subset [-i\sigma, i\sigma]$, т.е. $h_\varphi(\theta) \le \sigma|\sin\theta|$ для $|\theta| \le \pi$.

Следствие.(Ло, Вигерт; см. [4]) Ряд (2.5) представляет целую функцию от $(z-1)^{-1}$ тогда и только тогда, если существует целая функция φ, $\sigma_\varphi = 0$, удовлетворяющая условиям (2.2).

Отсюда и из Леммы 1.3 мы приходим к следующей лемме.

Лемма 2.1. *Пусть $g \in H_X(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\zeta_0\})$, где $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ и $g(\infty) = 0$. Тогда около точки ∞ функция g разлагается в ряд (2.1) – (2.2), где φ – целая X-значная функция порядка ≤ 1 такая, что*

a) если $\zeta_0 = \exp(w_0)$, то $\sigma_\varphi < +\infty$ и $I_\varphi = \{\overline{w_0}\}$;

b) если $\zeta_0 = 0$, то $\sigma_\varphi(\Delta) < +\infty$ и $I_\varphi = \emptyset$ для $\Delta = \Delta\left(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ и произвольно фиксированного β, $|\beta| < \pi/2$.

Отметим, что здесь условие $I_\varphi = \emptyset$ означает, что φ удовлетворяет условию (1.28) для $\alpha = -\beta$.

Замечания. 6. Пункт (a) Теоремы 2.4 был установлен Ф. Карлсоном (при $X = \mathbb{C}$,что несущественно; см. [4], §§1 – 3, а также [9], [10]).

7. Ограничение на выпуклый компакт I в пунктах (b) и (c) Теоремы 2.4 означает, что множество $\exp(\Gamma^*)$ не разделяет точки 0 и ∞. Об утверждениях этих пунктов см. Дифренуа и Пизо [22]. Ранее Ф. Карлсон (см. выше) в этих пунктах подчинил компакт I более строгому условию, что *ширина* I в направлении мнимой оси меньше 2π, утверждая в (b) аналитическую продолжимость по некоторому радиусу; наличие логарифмической спирали в (b) следует из обсуждений §1, пункт 1.4.

8. В статье [23] получен аналог пункта (c) Теоремы 2.4 в том случае, когда множество $\exp(I^*)$ отделяет точки 0 и ∞. Этот случай охвачен Теоремой 2.1 при $\infty \in E^o$.

9. Вопрос о единственности "функции коэффициентов" φ возникает и в условиях Теоремы 2.1, но здесь этот вопрос не разрешим чисто в терминах индикаторной диаграммы I_φ, поскольку либо I_φ содержит вертикальный отрезок длины 2π (случай $0 \in E^o$), либо функция h_φ может иметь разрывы в точках $-\beta \pm \pi/2$ (случай $0 \in \partial E$). В случае $0 \in \partial E$ каждое из следующих условий обеспечивает единственность функции φ из Теоремы 2.1 :

i) неравенство (2.3) выполняется также при $\theta + \beta = \pm\pi/2$ и ширина множества $L^*(E)$ в направлении $-\beta + \pi/2$ меньше, чем $2\pi \cos\beta$;

ii) функция φ удовлетворяет условию $h_\varphi(-\beta \pm \pi/2) < \pi \cos\beta$.

Доказательство следует из Теоремы 1.3 при $\alpha = -\beta - \dfrac{\pi}{2}$ применительно к $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$, где $\varphi = \varphi_k$ – функции из Теоремы 2.1, удовлетворяющие одному из условий i), ii).

Предположим теперь, что в сформулированных выше теоремах банахово пространство X заменено некоторой комплексной алгеброй Банаха B с единицей e (в частности, алгеброй ограниченных линейных операторов в X). Для элемента $a \in B$ положим :

$\rho(a)$ = резольвентное множество a ;

$R_z(a)$ = резольвента a для $z \in \rho(a)$;

$\sigma(a) = \overline{\mathbf{C}} \setminus \rho(a)$ – спектр элемента a ;

$r(a) = \lim\limits_{n\to\infty} ||a^n||^{1/n}$ – спектральный радиус a.

Голоморфная по z функция $R_z(a)$ в окрестности точки ∞ имеет разложение вида (2.1)

$$R_z(a) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} a^n \qquad \text{pri } |z| > r(a). \tag{2.7}$$

Пусть теперь $E \subset \mathbf{C}$ – некоторый лог-выпуклый компакт со связным дополнением, $L(E)$ – логарифмическая диаграмма E с направлением β. Применим к аналитическому элементу (2.7) Теоремы 2.1 и 2.4. Из условия $\sigma(a) \subset E$ следует существование некоторой B-значной целой функции φ порядка ≤ 1 и экспоненциального типа на $\Delta\left(-\beta-\frac{\pi}{2},-\beta+\frac{\pi}{2}\right)$ (на $\mathbf{C}$, если $0 \notin \partial E$), удовлетворяющей условию

$$\varphi(n)=a^n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.8}$$

и условию $I_\varphi \subset L^*(E)$. Для квазинильпотентного a, т.е. $r(a)=0$ и $a \neq 0$, последнее условие при $E=\{0\}$ означает выполнение (2.4) для произвольно фиксированного β, $|\beta|<\pi/2$. Обратно, если существует целая функция с указанными свойствами, то $\sigma(a) \subset E$ и даже можно считать, что $\sigma(a)\setminus\{0\} \subset \exp(I^*_\varphi)$.

В случае, когда $0 \notin E$, из связности $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$ следует, что диаграмма I_φ не содержит вертикального отрезка длины $\geq 2\pi$, и тогда пункт (d) Теоремы 2.4 утверждает, что "функция коэффициентов" φ единственна. Более того, для $m \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим целые по z функции

$$\varphi_m(z)=\varphi(m+z), \quad \psi_m(z)=\varphi(m)\varphi(z), \quad z \in \mathbf{C},$$

удовлетворящие согласно (2.8) условиям $\varphi_m(n)=\psi_m(n)$ для $n \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что $h_{\psi_m} \leq h_\varphi$, так что $I_{\psi_m} \subset I_\varphi$, а из свойства (1.14) следует, что $I_{\varphi_m}=I_\varphi$. Применяя к функциям φ_m и ψ_m Теорему 1.2, мы получим, что $\varphi_m \equiv \psi_m$ для $m \in \mathbb{N}_0$, т.е.

$$\varphi(m+z)=\varphi(m)\varphi(z) \quad \text{для } z \in \mathbf{C}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Фиксируя z и применяя еще раз свойство (1.14) и Теорему 1.2, мы приходим к групповому свойству функции φ :

$$\varphi(\zeta+z)=\varphi(\zeta)\varphi(z) \quad \text{для } \zeta, z \in \mathbf{C}, \quad \varphi(0)=e, \quad \varphi(1)=a. \tag{2.9}$$

Таким образом, множество $\varphi(\mathbf{C})$ является *аналитической группой*.

Аналогичные рассуждения применительно к случаю $0 \in \partial E$, при условиях единственности "функции коэффициентов" φ в терминах индикатора h_φ (в частности, при выполнении одного из условий i) или ii) Замечания 9) приводят к соотношению (2.9) для $\zeta, z \in \Delta=\Delta\left(-\beta-\frac{\pi}{2},-\beta+\frac{\pi}{2}\right)$, так что $\varphi(\Delta)$ является *аналитической полугруппой*. Полагая $b=\varphi'(0)$, из (2.9) получим, что $\varphi^{(n)}(0)= = b^n$ для $n \in \mathbb{N}_0$, так что $\varphi(z)=\exp(bz)$ для $z \in \mathbf{C}$ (ср. [13], 9.5). При этом роль индикаторной диаграммы I^*_φ играет множество $\widehat{\sigma(b)}$ (см. [13], 17.4).

Сказанное выше позволяет интерпретировать "функцию коэффициентов" φ применительно к интерполяционным данным вида (2.8) как некоторую замену экспоненциальной интерполирующей функции (в случае отсутствия последней), сохраняющую некоторые ее свойства (голоморфность, экспоненциальный рост, связь со спектром a (соотношение $\sigma(a) \setminus \{0\} \subset \exp(I_\varphi^*)$) и т.д.)).

2.2. Доказательство Теоремы 2.1 : достаточность. При доказательстве этой части Теоремы 2.1 ограничения на функцию φ можно ослабить, полагая, что $\varphi \in H_X(\Delta)$, $\sigma_\varphi(\Delta^o) < +\infty$ для $\Delta = \Delta\left(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2}\right)$ и φ удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3). Рассмотрим аналитический элемент f, представимый рядом (2.1), (2.2) : из условия (2.3) следует, что этот ряд сходится при $|z| > K_{L(E)}(0)$ (при $z \neq 0$, если $L(E) = \emptyset$). Возможность аналитического продолжения элемента f на остальную часть области $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$ можно доказать, используя метод работы [1]. Это включает применение к рядам (2.1), (2.2) известной формулы Карлемана (см. [2]) и аналитическое продолжение контурного интеграла с помощью вариации контура интегрирования. В качестве альтернативы можно воспользоваться тем фактом, что часть достаточности Теоремы 2.1 доказана в случае $X = \mathbf{C}$ в Теоремах 3.1 и 3.2 работы [1].

С этой целью рассмотрим сопряженное к X пространство линейных функционалов X^* и пусть $x^* \in X^*$. Полагая $\varphi_* = x^*\varphi$ и учитывая, что $|\varphi_*(z)| \leq \leq ||x^*|| \cdot ||\varphi(z)||$ для $z \in \mathbf{C}$, имеем, что $\varphi_* \in H(\Delta)$ и

$$\sigma_{\varphi_*}(\Delta^o) \leq \sigma_\varphi(\Delta^o) < +\infty, \quad h_{\varphi_*}(\theta) \leq h_\varphi(\theta) \quad \text{при } |\theta + \beta| < \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, скалярная функция φ_* удовлетворяет интерполяционным условиям $\varphi_*(n) = x^*(f_n)$ для $n \in \mathbb{N}_0$ и остальным условиям Теоремы 2.1. Тогда из указанных выше теорем работы [1] следует, что аналитический элемент x^*f с коэффициентами $(x^*f_n)_0^\infty$ допускает однозначное аналитическое продолжение в область $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$. Учитывая это, заметим теперь, что если элемент f_a с центром $a \in \mathbf{C} \setminus E$ является аналитическим продолжением элемента f вдоль некоторого пути $l \subset \mathbf{C} \setminus E$, то f_a должен сходиться в максимальном круге $D_r(a) \subset \mathbf{C} \setminus E$. В противном случае особая точка f_a на границе $\partial D_r(a) \subset \mathbf{C} \setminus E$ круга сходимости была бы особой точкой скалярной функции $x^* f_a$ хотя бы для одного $x^* \in X^*$ (см. [13], 3.12). Однако $x^* f_a$ является аналитическим продолжением вдоль l элемента $x^* f$ и по сказанному выше не может иметь особых точек в $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$.

Напомнив, что $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$ является ω-звездной областью относительно точки ∞ (см. 1.4), рассмотрим такую область $\Omega \subset \hat{\mathbf{C}} \setminus E$, где элемент f допускает однозначное аналитическое продолжение вдоль дуг логарифмических спиралей $L_\omega(\alpha)$, соединяющих ∞ с точками Ω. Из сказанного выше о максимальности кругов $D_r(a)$ следует, что Ω не может иметь граничных точек в $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$, так что $\Omega = \hat{\mathbf{C}} \setminus E$. Это завершает доказательство.

2.3. Доказательство Теоремы 2.4. Рассуждениями раздела 2.2 доказательство пункта (a) Теоремы 2.4 сводится к случаю $X = \mathbf{C}$, т.е. к теореме Карлсона. В условиях пункта (c) положим $E = \exp(I^*)$ и рассмотрим голоморфную в $\hat{\mathbf{C}} \setminus E$ функцию f, заданную аналитическим элементом (2.1). Пусть log-однозначная в некоторой окрестности Ω множества E ветвь логарифма такая, что $\log E = I^*$. Рассмотрим целую функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta^z f(\zeta)\, d\zeta, \tag{2.10}$$

где $\zeta^z = \exp(z \log \zeta)$, а Γ – гладкий контур Жордана в $\Omega \setminus E$, обходящий E в положительном направлении и отделяющий его от точек 0 и ∞. При этих условиях функция φ не зависит от выбора контура Γ и очевидно, что удовлетворяет интерполяционным условиям (2.2). Пусть γ_ε для $\varepsilon > 0$ означает границу выпуклого компакта с опорной функцией $K_{I^*} + \varepsilon$. Для достаточно малого ε $\Gamma_\varepsilon = \exp(\gamma_\varepsilon) \subset \Omega \setminus E$, и мы можем положить в (2.10) $\Gamma = \Gamma_\varepsilon$ с соответствующей ориентацией. Тогда из (2.10) имеем оценку

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leq M_\varepsilon \exp[r(K_{I^*}(\theta) + \varepsilon)],$$

где

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} ||f(\zeta)||\, |d\zeta|.$$

Отсюда следует, что $h_\varphi(\theta) \leq K_{I^*}(\theta) + \varepsilon$ для $\theta \in \mathbb{R}$, т.е. $h_\varphi \leq K_{I^*}$ или $I_\varphi \subset I^*$. Утверждение пункта (d) Теоремы 2.4 следует непосредственно из Теоремы 1.2

параграфа 1 о единственности. Наконец, из (d) следует, что в условиях пункта (b) функция φ должна иметь вид (2.10). Тогда разложение (2.6) следует из формулы Коши

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

разложением ядра $(\zeta - z)^{-1}$ по степеням z в достаточно малой окрестности нуля.

2.4. Доказательство Теоремы 2.1 : необходимость. Пусть $f \in H_X(\hat{\mathbf{C}} \setminus E)$, $f(\infty) = 0$ и около точки ∞ имеет разложение (2.1). Заметим сначала, что если φ построена для $g \in H_X(\hat{\mathbf{C}} \setminus E)$ и для функции $F = f - g$, то можем положить $\varphi_f = \varphi_F + \varphi_g$. Это легко следует из (1.7) и (2.1) – (2.3).

Рассмотрим далее точку $\zeta_0 \in \partial E$ такую, что $|\zeta_0| \leq |\zeta|$ для $\zeta \in \partial E$. При $\zeta_0 \neq 0$ можно считать, что $\zeta_0 = \exp(w_0)$, где $w_0 \in L(E)$ и $(w_0 + 2\pi i) \in L(E)$. Если теперь $g \in H_X(\hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\})$ и $g(\infty) = 0$, то из Леммы 2.1 следует, что функция $\varphi = \varphi_g$ из этой леммы удовлетворяет условиям Теоремы 2.1, если учесть Замечание 2 и включение $l_{\varphi_g} \subset L^*(E)$. Таким образом, для построения функции φ_f достаточно построить функцию φ_{f-g}, где выбор функции $g \in H_X(\hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\})$, $g(\infty) = 0$ произволен. Из рассмотрений раздела 1.4 следует (см. (1.20) и (1.24)) существование непрерывной ветви логарифма log в некоторой окрестности O множества $\partial E \setminus \{\zeta_0\}$, $\zeta_0 \in \partial O$ такой, что $\log(\partial E \setminus \{\zeta_0\}) \subset \partial L(E)$. Тогда существует лог-выпуклый компакт E_1 с жордановой границей $\Gamma \cup \{\zeta_0\}$, $\Gamma \subset O \setminus E$ такой, что $E \subset E_1^o \cup \{\zeta_0\}$. При этом можно считать, что Γ локально гладкая, имеет конечную длину (см. замечание в конце пункта 1.4), а в точке ζ_0 касательна к границе E.

Рассмотрим теперь жорданову область $\Omega = \hat{\mathbf{C}} \setminus E_1^o$, ограниченную контуром $\Gamma \cup \{\zeta_0\}$, положительно ориентированном относительно E_1. Применим к области Ω и функции f аппроксимационную Лемму 1.4, полагая там $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1/3$. Мы можем выбрать функцию $g \in H_X(\hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\})$, $g(\infty) = 0$ так, что для $F = f - g \in$ $\in H_X(\hat{\mathbf{C}} \setminus \{\zeta_0\})$, $F(\infty) = 0$ согласно (1.30) имели

$$||F(\zeta)|| < \exp(-|\zeta - \zeta_o|^{-1/3}), \quad \zeta \in \Omega. \tag{2.11}$$

Нам остается только построить функцию φ_F. Пусть $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ – коэффиценты разложения F около ∞. Тогда

$$F_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^n F(\zeta)\,d\zeta \quad \text{для } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.12}$$

Формула (2.12) – это формула Коши для коэффициентов элемента F после деформации контура интегрирования к точке ζ_0 с учетом голоморфности подынтегральной функции и оценки (2.11). Искомую целую функцию φ_F, удовлетворяющую условиям $\varphi_F(n) = F_n$ для $n \in \mathbb{N}_0$, определим формулой

$$\varphi_F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^z F(\zeta)\,d\zeta \quad \text{для } z \in \mathbb{C}, \tag{2.13}$$

где $\zeta^z = \exp(z\log\zeta)$ с фиксированной выше ветвью логарифма на O. Подынтегральная функция здесь голоморфна по ζ на O, целая по z и непрерывна по (ζ, z). В случае $\zeta_0 \neq 0$, она для $\zeta \in \Gamma$ и $z \in \mathbb{C}$ удовлетворяет, с учетом (2.11), оценке

$$||\zeta^z F(\zeta)|| \leq \exp(\sigma|z|), \quad \sigma = \sup_{\zeta\in\Gamma}|\log\zeta|. \tag{2.14}$$

Отсюда следует, что φ_F – целая функция экспоненциального типа $\leq \sigma$.

В случае $\zeta_0 = 0$ положим $\Gamma_1 = \Gamma \cap D_1(0)$, $\Gamma_2 = \Gamma\setminus\Gamma_1$ и если $\Gamma_2 \neq \emptyset$, то разобьем интеграл (2.13) на два интеграла по Γ_1 и Γ_2, соответственно. Очевидно, что I_2 имеет оценку вида (2.14). Для оценки интеграла I_1 заметим, с учетом (1.21), что $\dfrac{\log\zeta}{\log|\zeta|} \to 1 + \omega i$ при $\zeta \to 0$, $\zeta \in \Gamma_1$. Поэтому существуют константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что

$$|\log\zeta| < c_1 \log\left(\frac{1}{|\zeta|}\right) + c_2 \quad \text{для } \zeta \in \Gamma_1.$$

Полагая $|\zeta| = t^3$, для $z \in \mathbb{C}$ и $\zeta \in \Gamma_1$ с учетом (2.11) получим оценку

$$||\zeta^z F(\zeta)|| < \exp(c_2|z|) \sup_{t\in(0,1]} \left(t^{-3c_1|z|}e^{-t}\right) < (|z|+2)^{c_3(|z|+1)},$$

где $c_3 > 0$ – некоторая константа. Из этой оценки следует, что при $\zeta_0 = 0$ φ_F является целой функцией порядка ≤ 1.

Остается доказать, что функция φ_F удовлетворяет условию (2.3), и если $\zeta_0 = 0$, то $\sigma_{\varphi_F}(\Delta) < +\infty$ для $\Delta = \Delta\left(-\beta - \frac{\pi}{2}, -\beta + \frac{\pi}{2}\right)$. С этой целью для $\zeta \in E_1 \setminus E$ обозначим через w_ζ одну из ближайших к ζ точек из ∂E, так что

$\log\zeta - \log w_\zeta \to 0$, когда $\zeta \to \zeta_0$. Для числа $\varepsilon > 0$, выберем $\rho > 0$ так, что $|\log\zeta - \log w_\zeta| < \varepsilon$ для $\zeta \in \Gamma \cap D_\rho(0)$. Это неравенство сохраняется всюду на некоторой гладкой кривой $\Gamma_\varepsilon \subset O \setminus E$ такой, что $\Gamma_\varepsilon \cap D_\rho(0) = \Gamma \cap D_\rho(0)$, а часть $\Gamma_\varepsilon \setminus D_\rho(0)$ лежит в достаточно малой окрестности ∂E и гомотопна части $\Gamma \setminus D_\rho(0)$. Тогда для $z \in \mathbf{C}$ и $\zeta \in \Gamma_\varepsilon$ имеем

$$|\zeta^z| \leq \exp[\,\mathrm{Re}\,(z \log w_\zeta + \varepsilon|z|)] \leq \exp(H(z) + \varepsilon|z|), \tag{2.15}$$

где H – опорная функция Минковского для множества $L^*(E)$. Кроме того, с учетом (2.11)

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\varepsilon} ||F(\zeta)||\,|d\zeta| < +\infty. \tag{2.16}$$

Заменив в (2.13) контур интегрирования Γ на Γ_ε, с учетом (2.15) и (2.16) получим оценку

$$||\varphi_F(z)|| \leq M_\varepsilon \exp[H(z) + \varepsilon|z|] \quad \text{для } z \in \mathbf{C}.$$

Отсюда для $\theta \in \mathbb{R}$ и $r > 0$ имеем, что

$$r^{-1}\log||\varphi_F(re^{i\theta})|| \leq K_{L^*(E)}(\theta) + \varepsilon + r^{-1}\log M_\varepsilon. \tag{2.17}$$

Из ограниченности функции $K_{L^*(E)}(\theta)$ при $|\theta + \beta| \leq \pi/2$ и из (2.17) следует, что $\sigma_{\varphi_F}(\Delta) < \infty$ при $\zeta_0 = 0$. Наконец, из (2.17) имеем, что $h_{\varphi_F}(\theta) \leq K_{L^*(E)}(\theta) + \varepsilon$ для $\theta \in \mathbb{R}$, откуда ввиду произвольности ε получим, что функция φ_F удовлетворяет условию (2.3). Это завершает доказательство Теоремы 2.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. U. Arakelyan(Arakelian), "Approximation by entire functions and analytic continuation", Progress in Approximation Theory, Springer-Verlag, pp. 295 - - 313, 1992.
2. E. Lindelöf, Le Calcul de Residues et ses Applications a'la Theorie des Fonctions, Paris, 1905.
3. P. Dienes, Taylor Series, Clarendon Press, Oxford, 1931.
4. Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, М., Наука, 1967.
5. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, Степенные Ряды : Аналитическое Продолжение и Локализация Особенностей, Изд. ЕГУ, Ереван, 1991.
6. Н. У. Аракелян, "Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов" , Мат. Сборник, т. 5, № 1, стр. 24–44, 1984.
7. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, " Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. Ан Арм. ССР, Математика, т. 22, № 1, стр. 3–21, 1987.
8. Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, " Локализация особенностей степенных

рядов на границе круга сходимости, II", Изв. Ан Арм. ССР, Математика, т. 23, № 3, стр. 123–137, 1988.
9. F. Carlson, "Sur une classe de series de Taylor", Diss., Upsala, 1914.
10. F. Carlson, "Über ganzvertige ganze funktionen", Math. Z., v. 11, pp. 1 – 23, 1921.
11. Б. Я. Левин, Распределение Корней Целых Функций, М., Гостехиздат, 1956.
12. R. P. Boas, Entire Functions, Academic Press, New York, 1954.
13. Э. Хилле, Р. Филлипс, "Функциональный Анализ и Полугруппы", М., Иностр. Лит., 1962.
14. G. Polya, "Untersuchungen uber Lücken und Singularitäten von Potenzreihen", Math. Z., vol. 29, pp. 549 – 640, 1929.
15. Е. Титчмарш, Теория Функций, М., Наука, 1980.
16. T. Carleman, "Sur un theoreme de Weierstrass," Ark. Mat. Astr. Fys., vol. 20, no. 4, pp. 1 – 5, 1927.
17. N. U. Arakelian, "Approximation complexe et proprietes des functions analytiques", Proc. Internat. Congr. Math. (Nice 1970), Gauthier-Villars, Paris, v. 2, pp. 595 – 600, 1971.
18. Н. У. Аракелян, П. М. Готье, "О касательном приближении голоморфными функциями", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 17, № 6, стр. 421–441, 1982.
19. М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми", ДАН СССР, т. 47, стр. 239 — 241, 1945.
20. С. Н. Мергелян, "Равномерные приближения функций комплексного переменного", Успехи мат. наук, т. 7, № 2 (48), стр. 31 – 122, 1952.
21. L. Brown, P. M. Gauthier, W. Seidel, "Complex approximation for vector-valued functions with an application to boundary behaviour", Trans. Amer. Math. Soc., v. 191, pp. 149 – 163, 1974.
22. J. Dufresnoy, Ch. Pisot, "Prolongement analitique de la serie de Taylor", Ann. Sci. Ecole Norm. Super., ser. 3, v. 68, pp. 105 – 124, 1951.
23. W. Gawronski, R. Trauthner, "Analytische Fortsetzungen von Potenzreihen", Serdica Math. Publ., Bulgar, v. 2, no. 4, pp. 369 – 374, 1976.

28 Мая 1995 Ереванский государственный университет