

ПЕРЕДАЧА МАЛОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. У. Аракелян, П. М. Готье

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 4, 1995

В настоящей работе мы устанавливаем некоторые аналоги теоремы Адамара о трех окружностях для случая гармонических функций $n \geq 2$ переменных и для трех возможных некоцентрических n -мерных шаров (см. Теоремы 1-2). Эти результаты приводят к теореме единственности для гармонических и голоморфных функций в духе классической теоремы Фрагмена-Линделефа (см. Теоремы 3-6).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция "передачи малости" была развита в основном для голоморфных функций. Ее можно рассматривать в качестве следствия свойства логарифмической субгармоничности модуля голоморфной функции, выраженной в теореме о двух константах (см. [12], гл. III, §2). Эта теорема приводит к теореме Адамара о трех окружностях и к теореме Фрагмена-Линделефа со следующим дополнением :

Пусть f - голоморфная функция в верхней полуплоскости Π , $|f(z)| \leq 1$ для $z \in \Pi$ и $|f(z)| \leq \varepsilon_m$ для $z \in \Pi$, $|z| = R_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m^{-1} \log \varepsilon_m = -\infty, \quad (*)$$

то $f \equiv 0$ в Π .

Для гармонических функций двух (и более) переменных свойство логарифмической субгармоничности их модулей не действительно и приведенное выше утверждение о единственности теряет силу.

Данное исследование было поддержано со стороны NSERC(Канада) и FCAR(Квебек).

Контрпример. Рассмотрим полукольцо

$$\Omega = \{z \in \Pi: 0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty\},$$

и пусть u - гармоническая мера радиальных интервалов $[-r_2, -r_1] \cup [r_1, r_2]$ относительно Ω . По принципу симметрии гармонических функций, u имеет ограниченное гармоническое продолжение на Π такое, что $u(z) = 0$ для $z \in \Pi$, $|z| = r_m$, где $r_m = r_1(r_2/r_1)^{m-1} \rightarrow \infty$.

Таким образом, для гармонических функций двух переменных полуокружность является слишком "тонким" множеством для передачи малости. Для того, чтобы иметь некоторые ориентиры для этого случая, рассмотрим опять условия отмеченного выше утверждения о единственности. Используя решение проблемы Карлемана-Мию (см. [12], гл. IV, §5), мы легко можем вывести из этих условий, что для $m \in N$

$$|f(z)| < \epsilon_m^c \quad \text{при } z \in \Pi, \quad |z - ir_m| \leq \frac{r_m}{2}, \quad (**)$$

где $c > 0$ - некоторая абсолютная константа.

Для ограниченных голоморфных на Π функций условие (**) вместе с (*) снова достаточно для заключения $f \equiv 0$ на Π . Интересно, что это же самое утверждение верно и для гармонических функций. Это легко следует из приведенных далее Теорем 4, 5 (случаи $p = \infty$ и $n = 2$).

В настоящей статье трудности, связанные с отсутствием свойства логарифмической субгармоничности для гармонических функций, обходятся с помощью развития некоторых гармонических аналогов теоремы Адамара о трех окружностях на случай трех n -мерных ($n \geq 2$) и возможно неконцентрических шаров (см. ниже Теоремы 1-2; в связи с этим см. также [4], [5] и [11]). Из этих результатов мы выводим некоторые теоремы единственности в духе классического условия (*). Относительно проблемы единственности см. также [1].

Мы благодарим Луис-Филип Жиро и Манфред Стол за полезные комментарии.

Мы будем использовать следующие обозначения :

$\mathbb{R}^n$ = n -мерное евклидово пространство;

$\mathbb{R}_a^n = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ для $a \in \mathbb{R}^n$;

$\langle x, y \rangle$ = скалярное произведение для $x, y \in \mathbb{R}^n$;

$|x|$ = норма элемента $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$;

$B_{x,r} = B_{x,r}^n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$, $B_r = B_{0,r}$;

$B = B^n (\equiv B_{0,1})$ — открытый единичный шар $\mathbb{R}^n$;

$S_{x,r} = S_{x,r}^n$ = граница $B_{x,r}$, сфера с центром в x и радиуса r , $S_r = S_{0,r}$;

$S = S^n (\equiv S_{0,1})$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$;

$d\nu = d\nu_n$ — n -мерная мера Лебга, $\nu_n(r) \equiv \nu(B_{x,r}) = \nu_n r^n$;

$d\sigma = d\sigma_n$ — $(n-1)$ -мерная поверхностная мера, $\sigma_n(r) \equiv \sigma_n(S_{x,r}) = \sigma_n r^{n-1}$;

Отметим: $\sigma_n = n\nu_n$;

$C(E)$ = множество непрерывных комплекснозначных функций на $E \subset \mathbb{R}^n$;

$\|f\|_{\infty, E} = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$.

Для поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ с $\sigma(X) < +\infty$ и функции $f \in C(S)$ мы полагаем

$\|f\|_{p,S} = \left(\frac{1}{\sigma(S)} \int_S |f|^p d\sigma \right)^{1/p}$, для $0 < p < \infty$;

$L_p(x, r, f) = \|f\|_{p,S}$ для $S = S_{x,r}$ и $L_p(r, f) = L_p(0, r, f)$ для $0 < p \leq \infty$.

Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с $\nu(\Omega) < +\infty$ и функции $f \in C(\Omega)$, мы полагаем

$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\frac{1}{\nu(\Omega)} \int_{\Omega} |f|^p d\nu \right)^{1/p}$, при $0 < p < \infty$;

$A_p(x, r, f) = \|f\|_{p,\Omega}$ для $\Omega = B_{x,r}$ и $A_p(r, f) = A_p(0, r, f)$ при $0 < p \leq \infty$;

$h(\Omega)$ = множество (комплекснозначных) гармонических на Ω функций;

$H(\Omega)$ = множество голоморфных на $\Omega \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ функций.

Мы рассматриваем следующие пространства Харди :

$h^p = \{u \in h(B^n) : \|u\|_p \equiv \sup_{0 \leq r < 1} L_p(r, u) < +\infty\}$;

$H^p = \{f \in H(B^2) : \|f\|_p \equiv \sup_{0 \leq r < 1} L_p(r, f) < +\infty\}$;

$h_p^p = \{u \in h(B^n) : \|u\|_{p,B^n} < +\infty\}$;

$H_p^p = \{f \in H(B^2) : \|f\|_{p,B^2} < +\infty\}$.

§2. СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ И

ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

Для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $m = 0, 1, 2, \dots$, через $\mathcal{P}_m^n$ обозначим семейство всех однородных гармонических на $\mathbb{R}^n$ полиномов точной степени m (и, таким образом, точной степени однородности m). Включение в $\mathcal{P}_m^n$ нулевого полинома 0, имеющего бесконечную степень однородности, превращает $\mathcal{P}_m^n$ в линейное полупространство $h(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $S = S^n$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Сужение $P|_S$, где $P \in \mathcal{P}_m^n$, иногда называется *сферической гармоникой* в $\mathbb{R}^n$ (степени m) (см. [2], [3] или [13]).

В $\mathcal{P}^n = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m^n$ естественно использовать норму $P \rightarrow \|P\|_{2,S}$ наслаждаясь следующим свойством ортогональности: для $P \in \mathcal{P}_i^n$ и $Q \in \mathcal{P}_j^n$

$$\frac{1}{\sigma_n} \int_S P \bar{Q} d\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j, \\ \|P\|_{2,S}^2 & \text{если } i = j \text{ и } Q = P. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим теперь *гармонический элемент* u на $\mathbb{R}^n$ (с центром 0), т. е. функцию u , гармоническую в некоторой окрестности начала координат. Поскольку u — аналитическая функция от вещественных переменных $(x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$, существует $\delta > 0$ такое, что u может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд на $\bar{B}_\delta$, т. е.

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in \bar{B}_\delta \quad (2)$$

с мультииндексами $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Отсюда вытекает следующее однородное разложение u на $\bar{B}_\delta$:

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x), \quad u_m(x) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha x^\alpha. \quad (3)$$

Очевидно, что u_m является однородным полиномом степени m (или $u_m \equiv 0$), и ряд (3) сходится абсолютно и равномерно на $\bar{B}_\delta$.

Заменяя в (3) x на tx , $t \geq 0$, для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$ мы получим разложение по степеням t

$$u(tx) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m u_m(x), \quad |x| \leq \delta, \quad (4)$$

сходящееся абсолютно и равномерно для $|x| \leq \delta$. Из (4) следует единственность разложения (3). Кроме того, применяя к (4) оператор Лапласа Δ для достаточно

малых t , имеем, что $\Delta u_m(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, так что $u_m \in \mathcal{P}_m^n$ для $m = 0, 1, 2, \dots$

Полагая в (5) $x = \theta \in S$ и $t = r \leq \delta$, мы получим следующее разложение в терминах сферических гармоник :

$$u(r\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m u_m(\theta), \quad \text{для } \theta \in S, \quad 0 \leq r \leq \delta, \quad (5)$$

где сходимость абсолютная и равномерная (относительно r и θ). Из (5) и (1) прямым вычислением следует равенство Парсеваля :

$$L_2^2(r, u) = \|u\|_{2, S_r}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \|u_m\|_{2, S}^2, \quad \text{для } 0 \leq r \leq \delta, \quad (6)$$

где $S_r = S_{0,r}$. Обозначим также $B_r = B_{0,r}$ и $B_{\infty} = \mathbb{R}^n$.

Замечание 1. Любой гармонический полином P имеет только конечное число сферических гармоник (остальные тождественно равны нулю). Равенство Парсеваля выполняется для $u = P$ при $0 \leq r \leq \delta$ и в частности для самого P для всех $r \geq 0$.

Кратко подведем итоги. С каждым гармоническим элементом u мы ассоциируем однозначно определенную последовательность $(u_m)_{m=0}^{\infty}$ сферических гармоник $u_m \in \mathcal{P}_m^n$. Абсолютно и равномерно сходящееся разложение (5), а также тождество (6) выполняется для достаточно малого $\delta > 0$. Обратно, любое такое разложение для некоторой последовательности $u_m \in \mathcal{P}_m^n$ определяет гармонический элемент u . Следующая лемма дает дополнительную информацию о взаимосвязи между u и $(u_m)_{m=0}^{\infty}$. Для ее формулировки введем некоторую терминологию. Для $R < +\infty$, скажем что точка $x_0 \in S_R$ является *особой* точкой функции $u \in h(B_R)$, если для любой окрестности ω точки x_0 не существует функции $v \in h(\omega)$, такой, что $u(x) = v(x)$ для $x \in \omega \cap B_R$. В противном случае точку x_0 назовем *регулярной* точкой.

Лемма 1.. Пусть $u \in h(B_R)$ с ассоциированной последовательностью полиномов $u_m \in \mathcal{P}_m^n$. Тогда :

1) Для ряда (3) выполняется формула типа формулы Коши-Адамара :

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{2, S}^{1/m} \leq 1/R, \quad (7)$$

где $1/R = 0$, если $R = \infty$;

2) В случае $R < \infty$ равенство в (7) выполняется только при условии, что u имеет особую точку на S_R ;

3) Ряд (5) сходится к u абсолютно для $x = r\theta \in B_{R'}$ и равномерно относительно $x = r\theta$ на любом замкнутом шаре $\overline{B}_{R'} \subset B_R$;

4) Равенство Парсевала для суммы u в (5) выполняется для всех $0 \leq r < R$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для случая $R < \infty$, и в этом случае можно без ограничения общности считать, что $R = 1$. Поскольку любая непрерывная функция на сфере может быть равномерно приближена линейными комбинациями сферических гармоник (см. [13]), для функции $u \in h(B)$ существует последовательность $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ гармонических полиномов на $\mathbb{R}^n$, так что $\|u - P_k\|_{\infty, \overline{B}_r} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $0 \leq r < 1$. Для $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $P_{m,k}$, $m = 0, 1, \dots$ сферические гармоники для P_k . Фиксируя $r = \delta < 1$ и $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для $u - P_k$ из (6) мы получим, что

$$\|u_m - P_{m,k}\|_{2,S} \leq \delta^{-m} \|u - P_k\|_{2,S_\delta} \leq \delta^{-m} \|u - P_k\|_{\infty,S_\delta} \rightarrow 0 \quad (8)$$

при $k \rightarrow \infty$ (см. также Замечание 1). Для $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем

$$\|P_{m,k}\|_{2,S} \rightarrow \|u_m\|_{2,S}, \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

и полагая $k \rightarrow \infty$ в неравенстве $\|P_{m,k}\|_{2,S} \leq r^{-m} \|P_k\|_{2,S_r}$, получим

$$\|u_m\|_{2,S} \leq r^{-m} \|u\|_{2,S_r}.$$

Мы заключаем, что

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{2,S}^{1/m} \leq 1/r \quad \text{для } 0 < r < 1,$$

что и доказывает (7) при $R = 1$.

Относительно других утверждений леммы: 2) следует прямо из 1) и единственности u_m ; 3) это Следствие 5.23 из [2]; 4) следует из утверждения 3) и из (1) прямым вычислением.

Функцию $L > 0$ на (R_0, R) называют *логарифмически выпуклой* (см. [6], стр. 16), если $\log L$ выпукла. Аналогично, если $0 \leq R_0 < R \leq +\infty$, мы скажем, что

функция $L > 0$ на (R_0, R) логарифмически-выпуклая (лог-выпуклая) функция (от логарифма), если для $r \in (R_0, R)$ и $x = \log r$ функция $x \mapsto \log L(e^x)$ выпуклая. Равносильное условие состоит в том, что для $r_1, r_2 \in (R_0, R)$ и $\alpha \in (0, 1)$

$$L(r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}) \leq L^\alpha(r_1) L^{1-\alpha}(r_2) \quad (9)$$

или что для $r \in (r_1, r_2)$ и α , заданное по $r = r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}$

$$L(r) \leq L^\alpha(r_1) L^{1-\alpha}(r_2), \quad \alpha = \frac{\log(r_2/r)}{\log(r_2/r_1)}. \quad (10)$$

Отметим, что если $L \geq 0$ удовлетворяет условию (10) и $L(r_1) = 0$ для некоторого r_1 , то $L \equiv 0$. Более общо, для функции $L > 0$, удовлетворяющей (10), имеем

$$\inf_{r \in (R_0, R)} \frac{\log L(r)}{|\log r| + 1} > -\infty, \quad (11)$$

где $|\log r|$ может быть заменен 0, если $R_0 \neq 0$ и $R \neq \infty$. Теория выпуклых функций учит (см. [6], секция 3), что функция $L > 0$, удовлетворяющая (10), должна быть непрерывна или даже локально удовлетворять условию Липшица. Кроме того, пределы $L(R_0 + 0)$ и $L(R - 0)$ существуют в $[0, +\infty]$ и в (9) и (10) мы можем положить $r_1 = R_0$ и $L(R_0) = L(R_0 + 0)$, если $0 < R_0$ и $L(R_0 + 0) \in (0, +\infty)$ (соответственно, мы можем положить $r_2 = R$ и $L(R) = L(R - 0)$, если $R < +\infty$ и $L(R - 0) \in (0, +\infty)$).

Предполагая, что L ограничена вблизи $R_0 = 0$, рассмотрим функцию

$$A(r) = \int_0^1 L(rt) d\mu(t), \quad \text{для } r \in (0, R), \quad (12)$$

где μ - положительная мера на $(0, 1)$. Из (10) следует, что для $r_1, r_2 \in (0, R)$ и $\alpha \in (0, 1)$

$$A(r_1^\alpha r_2^{1-\alpha}) \leq \int_0^1 L^\alpha(r_1 t) L^{1-\alpha}(r_2 t) d\mu(t).$$

Применяя неравенство Гельдера (с $p = 1/\alpha$ и $q = 1/(1-\alpha)$) к интегралу в правой части, приходим к условию (9) для A . Итак, имеет место следующая

Лемма 2. Если L - лог-выпуклая функция от $\log$, такова же функция A , определенная по (12).

Примеры

1. Теорема Харди о выпуклости (см. [7], стр. 9, теорему 1.5) утверждает, что для функции f , голоморфной в единичном круге $\mathbb{C} (\equiv \mathbb{R}^2)$ и $0 < p \leq +\infty$

(i) функция $L_p(r, f)$ — неубывающая функция от r ;

(ii) если $f \not\equiv 0$, то функция $L_p(r, f)$ является лог-выпуклой от $\log$.

В случае $p = \infty$, утверждение (ii) — это хорошо известная теорема Адамара о трех окружностях. Случай $p = 0$ также может быть включен, если мы положим

$$L_0(r, f) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right).$$

Тогда оба свойства (i) и (ii) следуют из свойства субгармоничности функции $\log^+ |f|$.

2. Для функции u , гармонической в единичном шаре B в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, свойство (i) выполняется для $p \geq 1$: функция $v = |u|^p$ субгармонична и тогда $L_1(r, v) = L_p^p(r, u)$ — неубывающая функция от r (см. [9], стр. 70, Лемма 4.18). Важно отметить, что свойство (ii) выполняется для $p = 2$ (см. [11], Лемма 2.1). Это сразу следует из теоремы Адамара о трех окружностях, примененной к степенному ряду в тождестве Парсеваля для u .

3. Легко видеть, что для функции $f \in C(B_{x,r})$

$$A_p^p(x, r, f) = \int_0^1 L_p^p(x, rt, f) dt^n.$$

Отсюда и из предыдущей леммы следует, что если функция f обладает свойствами (i) и (ii) (с центром x), то этим двум свойствам удовлетворяет также функция $A_p(x, r, f)$.

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

3.1. Инверсия и преобразование Кельвина

Инверсия относительно сферы $S_{a,\rho}$ — это взаимно-однозначное преобразование $\varphi = \varphi_{a,\rho}: \mathbb{R}_a^n \rightarrow \mathbb{R}_a^n$, определенное по формуле

$$\varphi(x) = a + \frac{\rho^2}{|x - a|^2}(x - a).$$

Точки $x \in \mathbb{R}_a^n$ и $x^* = \varphi(x)$ называются симметричными относительно $S_{a,\rho}$.

Очевидно, $\varphi^{-1} = \varphi$, т. е. $(x^*)^* = x$.

Замечание 2. Для $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ мы отождествим разность $x_2 - x_1$ с вектором с начальной точкой в x_1 и концом в x_2 . Тогда по приведенному выше определению

а) векторы $x - a$ и $x^* - a$ коллинеарны, одинаково направлены и $|x - a||x^* - a| = \rho^2$;

б) если $|x - a| > \rho$, тогда для $r = (|x - a|^2 - \rho^2)^{1/2}$ сферы $S_{x,r}$ и $S_{a,\rho}$ ортогональны; вектор $x^* - a$ является ортогональной проекцией на направление $x - a$ касательных к $S_{x,r}$ векторов с началом в точке a .

Преобразование φ бесконечно дифференцируемо на $\mathbb{R}_a^n$. Чтобы вычислить $\varphi' = \varphi'_{a,\rho}$, достаточно рассмотреть $a = 0$. Очевидно

$$\varphi'(x)v = \frac{\rho^2}{|x|^2}v - \frac{2\rho^2(x,v)}{|x|^4}x \quad \text{для } x \in \mathbb{R}_0^n, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

или

$$\varphi'(x) = \frac{\rho^2}{|x|^2}I - \frac{2\rho^2}{|x|^4}(x, \cdot)x,$$

где I — тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$.

Вычислим Якобиан $J_\varphi(x) = \det \varphi'(x)$. Полагая $x = \sum_1^n x_i e_i$, где $(e_i)_1^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, имеем

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\rho^2}{|x|^2} a_{ij} \right)_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Таким образом

$$J_\varphi(x) = \left(\frac{\rho}{|x|} \right)^{2n} \det(a_{ij}).$$

Полагая $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n = d(x_1, \dots, x_n)$ и записывая элементы последнего столбца a_{in} в виде

$$a_{in} = \delta_{in} - \frac{2x_i x_n}{|x|^2},$$

мы представляем $\det(a_{ij})$ как сумму соответствующих детерминантов:

$$d(x_1, \dots, x_n) = d(x_1, \dots, x_{n-1}) + d'.$$

Детерминант d' может быть легко вычислен. После того, как мы вынесем множитель $-x_n$ из последнего столбца, умножая этот столбец на x_j и прибавляя к j -тому столбцу, j -тый столбец становится равным δ_{ij} . Поэтому $d' = -2(x_n/|x|)^2$

и поскольку $d(x_1) = 1 - 2(x_1/|x|)^2$, мы получим, что $d(x_1, \dots, x_n) = -1$. Окончательно мы имеем, что $J_\varphi(x) = -(\rho/|x|)^{2n}$, $x \in \mathbb{R}_0^n$, а для произвольного $a \in \mathbb{R}^n$

$$J_{\varphi_{a,p}}(x) = -\left(\frac{\rho}{|x-a|}\right)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}_a^n. \quad (13)$$

С каждой функцией $f \in C(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}_a^n$, мы ассоциируем ее *преобразование Кельвина* $f^* = f_{a,p} \in C(\varphi(\Omega))$ (где $\varphi = \varphi_{a,p}$), определенное в $\varphi(\Omega) = \varphi^{-1}(\Omega)$ формулой

$$f^*(y) = \left(\frac{\rho}{|y-a|}\right)^{n-2} \overline{f(\varphi(y))}, \quad y \in \varphi(\Omega) = \varphi^{-1}(\Omega). \quad (14)$$

Главное свойство f^* состоит в том, что $f^* \in h(\varphi(\Omega))$ если $f \in h(\Omega)$. Для $n = 2$ $f^* \in H(\varphi(\Omega))$, если $f \in H(\Omega)$. Кроме того, $(f^*)^* = f$. С помощью замены переменных, учитывая (13) для $0 < p < +\infty$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |x-a|^\beta |f(x)|^p dx &= \int_{\varphi(\Omega)} |y-a|^\beta |f_{a,p}(y)|^p dy, \\ \int_{\varphi(\Omega)} |f_{a,p}(y)|^p dy &= \int_{\Omega} \left(\frac{|x-a|}{\rho}\right)^{2\beta} |f(x)|^p dx, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\beta = (p/2)(n-2) - n = (n/2)(p-2) - p$. Интересно отметить, что β не зависит от n , если $p = 2$ и не зависит от p , если $n = 2$.

Если $0 < d_1 < |y-a| < d_2$ для $y \in \Omega \cup \varphi(\Omega)$, то из первой формулы следует, что

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{-|\beta|} \int_{\Omega} |f|^p d\nu \leq \int_{\varphi(\Omega)} |f^*|^p d\nu \leq \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{|\beta|} \int_{\Omega} |f|^p d\nu$$

или

$$c^{-1} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{-\gamma} \cdot \|f\|_{p,\Omega} \leq \|f^*\|_{p,\varphi(\Omega)} \leq c \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{\gamma} \cdot \|f\|_{p,\Omega}, \quad (16)$$

где

$$\gamma = |\beta|/p = \left| \frac{n}{2} \left(1 - \frac{2}{p}\right) - 1 \right|, \quad c = [\nu(\Omega)/\nu(\varphi(\Omega))]^{1/p}.$$

Из (14) легко видеть, что (16) выполняется также для $p = \infty$, когда $\gamma = \frac{n}{2} - 1$ и $c = 1$.

3.2. Концентрация шаров

Найдем теперь образ $\varphi(\Omega)$ в случае $\Omega = B_{x,r}$. Поскольку $a \notin B_{x,r}$, то длина касательной точки a к сфере $S_{x,r}$ равна

$$\rho_{x,r}(a) = \rho_{x,r} = (|x-a|^2 - r^2)^{1/2}. \quad (17)$$

Заметим, что условие $\zeta \in B_{x,r}$ равносильно условию

$$|\zeta - a|^2 - 2\langle \zeta - a, x - a \rangle + \rho_{x,r}^2 < 0.$$

Полагая $z = \varphi(\zeta)$ для $z \in \varphi(B_{x,r})$ и учитывая, что $|z - a| |\zeta - a| = \rho^2$ и $\zeta = \varphi(z)$, имеем

$$\rho^4 - 2\langle z - a, \rho^2(x - a) \rangle + \rho_{x,r}^2 |z - a|^2 < 0,$$

так что $|z - x'| < r'$, т.е. $\varphi(B_{x,r}) = B_{x',r'}$, где

$$x' = a + \left(\frac{\rho}{\rho_{x,r}} \right)^2 (x - a), \quad r' = \left(\frac{\rho}{\rho_{x,r}} \right)^2 r. \quad (18)$$

Согласно (18) векторы $x' - a$ и $x - a$ коллинеарны и одинаково направлены. Для наблюдателя из точки a шары $B_{x,r}$ и $\varphi(B_{x,r})$ видны под одинаковым углом α . Это следует из равенства

$$\frac{r'}{|x' - a|} = \frac{r}{|x - a|} \equiv \sin(\alpha/2).$$

Рассмотрим теперь шары $B_{x,r} \subset B_{x_0,r_0}$ и пусть $x \neq x_0$. Найдем условия на ρ и $a \notin \overline{B}_{x_0,r_0}$ при которых $\varphi = \varphi_{a,\rho}$ -образы этих шаров становятся концентрическими. Очевидное необходимое условие состоит в том, чтобы границы этих шаров не пересекались и поэтому $|x - x_0| + r < r_0$.

Мы полагаем, что ρ задан соотношением $\rho = \rho_{x_0,r_0}(a)$ (см. (17)). Тогда сферы S_{x_0,r_0} и $S_{a,\rho}$ ортогональны и из (18) имеем, что $x'_0 = x_0$ и $r'_0 = r_0$, так что $\varphi(B_{x_0,r_0}) = B_{x_0,r_0}$. Согласно (17) и (18), образ $B_{x',r'}$ шара $B_{x,r}$ концентричен с B_{x_0,r_0} , если $x' = x_0$, т.е. если

$$\frac{x_0 - a}{\rho^2} = \frac{x - a}{\rho_{x,r}^2}. \quad (19)$$

Можно легко проверить, что (19) можно записать как $\varphi_{a,\rho_{x_0,r_0}}(x_0) = \varphi_{a,\rho_{x,r}}(x)$. Используя Замечание 2, мы приходим к следующей геометрической интерпретации условия (19): векторы $x_0 - a$ и $x - a$ коллинеарны и одинаково направлены; ортогональные проекции на это направление касательных от точки a к сферам S_{x_0,r_0} и $S_{x,r}$ совпадают.



Рассмотрим теперь (19) как уравнение относительно переменной a , и докажем существование и единственность решения. Поскольку векторы $x_0 - a$ и $x - a$ коллинеарны с $x_0 - x$ и выполнено условие $|x - a| > r_0$, мы имеем

$$x_0 - a = \lambda(x_0 - x), \quad x - a = (\lambda - 1)(x_0 - x), \quad (20)$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, такого, что $|\lambda| > r_0 |x - x_0|^{-1}$. Вместе с (20) уравнение (19) эквивалентно

$$\frac{\rho_{x_0, r_0}^2}{\lambda} = \frac{\rho_{x, r}^2}{\lambda - 1}.$$

Учитывая (17) и (20), имеем

$$\frac{r_0^2}{\lambda} = \frac{r^2}{\lambda - 1} + |x - x_0|^2. \quad (21)$$

Квадратное уравнение (21) (относительно переменной λ) имеет два корня $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, причем $\lambda_1 \lambda_2 = r_0^2 |x - x_0|^{-2}$, так что $\lambda = \lambda(a) = \lambda_2$ — единственный корень (21) такой, что $\lambda > r_0 |x - x_0|^{-1}$. Таким образом, чтобы найти точку $a \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую (19), мы можем воспользоваться (20) с $\lambda = \lambda(a)$.

Следующая двусторонняя оценка $\lambda(a)$ будет нам полезна :

$$\frac{2r_0 - r - |x - x_0|}{|x - x_0|} < \lambda(a) < \frac{r_0^2}{|x - x_0|^2}. \quad (22)$$

Вторая оценка в (22) сразу следует из (21). Чтобы доказать первую оценку отметим сначала очевидное неравенство

$$\lambda \geq 2 \frac{r_0}{|x - x_0|} - \frac{r_0^2/\lambda}{|x - x_0|^2}, \quad \text{для всех } \lambda > 0.$$

Остается подставить значение r_0^2/λ из (21) и заметить, что согласно (20)

$$\frac{r}{(\lambda - 1)|x - x_0|} = \frac{r}{|a - x|} < 1.$$

Для a , удовлетворяющего (19), обозначим через $d = d(a)$ расстояние a от B_{x_0, r_0} .

Поскольку для $\lambda = \lambda(a)$

$$d = |a - x_0| - r_0 = \lambda |x - x_0| - r_0,$$

неравенства (22) приводят к

$$0 < \delta_0 < d < \frac{r_0}{|x - x_0|} \delta, \quad (23)$$

где $\delta_0 = r_0 - |x - x_0| - r$, $\delta = r_0 - |x - x_0|$. Используя также формулу (18) для радиуса r' шара $\varphi(B_{x,r})$, мы получим по (19) и (20), что $r'r^{-1} = \lambda(\lambda - 1)^{-1}$. Отсюда и (22) легко вывести оценки

$$\frac{r_0}{2\delta} < \frac{r'}{r} < \frac{r_0}{\delta}, \quad \text{при } r < r'. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{M}$ всех шаров $B_{\bar{x},\bar{r}} \subset B_{x_0,r_0}$, $\varphi = \varphi_{a,\rho}$, образы которых концентричны с B_{x_0,r_0} . Фактически, параметры a и ρ были выбраны таким образом, чтобы обеспечить включение $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}$ для предыдущих двух случаев, когда соответственно $\bar{x} = x_0$, $\bar{r} = r_0$ и $\bar{x} = x$, $\bar{r} = r$. Согласно (18) условие

$$\frac{x_0 - a}{\rho^2} = \frac{\bar{x} - a}{\rho_{\bar{x},\bar{r}}^2} \quad (25)$$

необходимо и достаточно для включения $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}$.

Согласно (25) вектор $\bar{x} - a$ коллинеарен и одинаково направлен с $x_0 - a$ и поэтому с $x_0 - x$. Можно считать, что $\bar{x} - x_0 = \mu(x - x_0)$ для некоторого $\mu \geq 0$ и переписать (25) в виде

$$\frac{\rho_{x_0,r_0}^2}{|a - x_0|} = \frac{\rho_{\bar{x},\bar{r}}^2}{|a - \bar{x}|}$$

или согласно (17)

$$\frac{r_0^2}{|a - x_0|} = \frac{\bar{r}^2}{|a - \bar{x}|} + |\bar{x} - x|. \quad (26)$$

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{M}_0 = \{B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M} : B_{\bar{x},\bar{r}} \subset B_{x,r}\}.$$

Необходимым и достаточным условием для $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}_0$ вместе с (26) является условие $\bar{r} \geq r$. Поскольку $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}$, мы приходим к условию

$$\bar{r}^2 = \left(\frac{r_0^2}{|a - x_0|} - |\bar{x} - x_0| \right) |a - \bar{x}| \geq \left(\frac{r_0^2}{|a - x_0|} - |x - x_0| \right) |a - x| = r^2.$$

Очевидно, что неравенство выполняется тогда и только тогда, если $|a - \bar{x}| \geq |a - x|$, т.е. если $|\bar{x} - x_0| \leq |x - x_0|$ или $\mu \leq 1$ и таким образом $\bar{x} \in [x_0, x]$. Правая часть этого неравенства положительна, а левая часть определяет $\bar{r}^2$ как функцию от $\bar{x}$. Наконец, $B_{\bar{x},\bar{r}} \in \mathcal{M}_0$ тогда и только тогда, если $\bar{x} \in [x_0, x]$ и $\bar{r}$ является положительным корнем (26).

Имеется другое представление $\bar{r}$ без привлечения точки a . Легко проверить, что (26) может быть записано в виде

$$\frac{r_0^2 + |\bar{x} - x_0|^2 - \bar{r}^2}{|\bar{x} - x_0|} = \frac{r_0^2 + |a - x_0|^2}{|a - x_0|}.$$

Правая часть этого равенства не зависит от $\bar{x}$ и $\bar{r}$; заменяя $\bar{x}$ на x и $\bar{r}$ через r , находим

$$\frac{r_0^2 + |\bar{x} - x_0|^2 - \bar{r}^2}{|\bar{x} - x_0|} = \frac{r_0^2 + |x - x_0|^2 - r^2}{|x - x_0|}. \quad (27)$$

Это равенство явным образом определяет $\bar{r}$ в терминах x_0, r_0, x, r и $\bar{x} \in [x_0, x]$.

Полагая теперь $\varphi(B_{x,r}) = B_{x_0,r'}$, из (18) получим

$$\frac{r'}{\bar{r}} = \frac{|a - x_0|}{|a - \bar{x}|} = \frac{|a - x_0|}{|a - x_0| - |\bar{x} - x_0|} < \frac{r_0}{r_0 - |\bar{x} - x_0|}, \quad (28)$$

так как $|a - x_0| > r_0$. Чтобы оценить r' сверху, представим (26) в виде

$$\bar{r}^2 = |a - \bar{x}|^2 - \frac{|a - \bar{x}|}{|a - x_0|} \rho_{x_0, r_0}^2,$$

откуда с учетом (28)

$$(\bar{r}')^2 = r_0^2 - \frac{|\bar{x} - x_0|}{|a - \bar{x}|} \rho_{x_0, r_0}^2.$$

Поскольку для $d = d(a)$

$$|a - x_0| = r_0 + d, \quad \rho_{x_0, r_0}^2 > 2r_0 d, \quad |a - \bar{x}| = (r_0 - |\bar{x} - x_0|) + d,$$

из (23) следует, что

$$\rho_{x_0, r_0}^2 > 2r_0 \delta_0, \quad |a - \bar{x}| < \frac{2r_0}{|\bar{x} - x_0|} (r_0 - |\bar{x} - x_0|).$$

С учетом этих оценок и формулы $(\bar{r}')^2$ получим

$$\left(\frac{\bar{r}'}{r_0}\right)^2 < 1 - \left(\frac{|\bar{x} - x_0|}{r_0}\right)^2 \frac{\delta_0}{r_0 - |\bar{x} - x_0|} = 1 - t.$$

Так как $0 < t < 1$, из оценки $\log(1 - t)^{-1} > t$ имеем

$$\log \frac{r_0}{\bar{r}'} > \frac{|\bar{x} - x_0|^2}{2r_0^2} \cdot \frac{\delta_0}{r_0 - |\bar{x} - x_0|}. \quad (29)$$

Подведем итоги предыдущей дискуссии. Для не касающихся и неконцентрических шаров $B_{x,r} \subset B_{x_0,r_0}$, (20) определяет точку $a \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{x_0,r_0}$, где $\lambda = \lambda(a) -$

наибольший корень (21). Далее определим ρ из условия $\rho = \rho_{x_0, r_0}(a)$ (см. (17)).

Тогда для инверсии $\varphi = \varphi_{a, \rho}$ имеем, что $\varphi(B_{x_0, r_0}) = B_{x_0, r_0}$ и $\varphi(B_{x, r}) = B_{x_0, r'}$.

Мы доказали, что для любой $\bar{x} \in [x_0, x]$ и для $\bar{r} > 0$, удовлетворяющего (26) или (27), $\varphi = \varphi_{a, \rho}$ -образы шаров $B_{x, r} \subset B_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B_{x_0, r_0}$ концентричны с B_{x_0, r_0} :

$$\varphi(B_{x, r}) = B_{x_0, r'} \subset \varphi(B_{\bar{x}, \bar{r}}) = B_{x_0, \bar{r}'} \subset \varphi(B_{x_0, r_0}) = B_{x_0, r_0}.$$

§4. ЛОГ-ВЫПУКЛОСТЬ (НЕКОНЦЕНТРИЧНЫЕ ШАРЫ)

Обозначим через $B_r = B_{0, r}$ открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке 0 и радиуса r ; $B_1 = B = B^n$ — это единичный шар в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь обсужденные выше не касающиеся и неконцентричные шары. Для простоты будем полагать, что $B_{x_0, r_0} = B$, т.е. $x_0 = 0$, $r_0 = 1$. Тогда отмеченные выше параметры зависят лишь от x и r . Итак, мы рассматриваем шары $B_{x, r} \subset B_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B$ для $\bar{x} \in [0, x]$, имеющие концентрические $\varphi = \varphi_{a, \rho}$ -образы

$$B_{r'} = \varphi(B_{x, r}) \subset B_{\bar{r}'} = \varphi(B_{\bar{x}, \bar{r}}) \subset B = \varphi(B). \quad (30)$$

Возьмем функцию $f \in C(B)$ с $\|f\|_{p, B} < +\infty$ для некоторого $p \in (0, +\infty]$ и ее преобразование Кельвина $f^* = f_{a, \rho}$ с параметрами a и ρ как выше. Поскольку $\varphi(B) = B$, из (14) и (16) следует, что $f^* \in C(B)$ и $\|f^*\|_{p, B} < +\infty$. Подчиним функцию $A_p(r) = A_p(r, f^*)$ на $[0, 1]$ следующим условиям:

- (i) A_p не убывает;
- (ii) A_p является лог-выпуклой от $\log$.

Согласно (ii) и (10) для A_p с $r_1 = r'$, $r = \bar{r}'$ и $r_2 = 1$ получим

$$A_p(\bar{r}', f^*) \leq A_p^\alpha(r', f^*) A_p^{1-\alpha}(1, f^*), \quad (31)$$

где

$$\alpha = \frac{\log(1/\bar{r}')}{\log(1/r')}. \quad (32)$$

Из (i) следует, что в (31) можно заменить α произвольным $\omega \in (0, \alpha]$. Согласно (18) $r'/r = |a|/|a - x|$, $\bar{r}'/\bar{r} = |a|/|a - \bar{x}|$, где $\bar{r} > 0$ — корень уравнения (27) (с $x_0 = 0$, $r_0 = 1$). Кроме того, $a = \lambda x$, где λ (см. (21)) — больший корень уравнения $1/\lambda = r^2/(\lambda - 1) + |x|^2$.

Для того, чтобы переписать (31) в терминах f , мы должны оценить $A_p(\bar{r}', f^*)$ снизу и $A_p(r', f^*)$ вместе с $A_p(1, f^*)$ сверху. Отметим сначала, что для некоторого $y \in B$ из (23) следует, что $\delta_0 < |y - a| < 2 + d < 2|x|^{-1}$.

Применяя (16) для $\Omega = B_{r'}$ с $d_1 = \delta_0$ и $d_2 = 2|x|^{-1}$ и учитывая, согласно (24) $r < r'$ и отсюда в (16) $c < 1$, получим

$$A_p(r', f^*) \leq \left(\frac{2}{\delta_0|x|} \right)^7 A_p(x, r, f).$$

Аналогично, согласно (28), (30) и (16) имеем

$$A_p(\bar{r}', f^*) \geq \left(\frac{2}{\delta_0|x|} \right)^{-7} (1 - |\bar{x}|)^{n/p} A_p(\bar{x}, \bar{r}, f), \quad A_p(1, f^*) \leq \left(\frac{2}{\delta_0|x|} \right)^7 A_p(1, f).$$

Подставляя последние три оценки в (31), для $0 < \omega \leq \alpha$ мы приходим к следующему "приближенному" условию лог-выпуклости:

$$A_p(\bar{x}, \bar{r}, f) \leq A_p^\omega(x, r, f) A_p^{1-\omega}(1, f) \cdot \left[\left(\frac{2}{|x|} \right)^{2\gamma} (1 - |\bar{x}|)^{-n/p} \right] \delta_0^{-2\gamma}, \quad (33)$$

где $\gamma = |\beta|/p$, $2\beta = p(n-2) - 2n$. Из (32), (27), (29) (для $x_0 = 0$ и $r_0 = 1$) можно усмотреть некоторое конкретное значение $\omega \in (0, \alpha]$, определенное формулой

$$\omega = \frac{|\bar{x}|^2}{2(1 - |\bar{x}|)} \cdot \frac{\delta_0}{\log \frac{1-|\bar{x}|}{(r/2)}}, \quad \text{где } \delta_0 = 1 - |x| - r. \quad (34)$$

Применяя (15) в (31), представим вместо (33) более точную версию лог-выпуклости для неконцентрических шаров. Полагая $d\mu_a = |x - a|^{2\beta} dx$, получим для $0 < \omega \leq \alpha$

$$\int_{B_{\bar{x}, \bar{r}}} |f|^p d\mu_a \leq \left(\int_{B_{x, r}} |f|^p d\mu_a \right)^\omega \left(\int_B |f|^p d\mu_a \right)^{1-\omega}. \quad (35)$$

Напомним теперь, что наши условия (i) и (ii) фактически выполнены в следующих двух случаях (см. §2, Примеры 1-3):

1). Если $p = 2$ и $f \in h(B)$, где $B = B^n$ - единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, то (i) и (ii) следуют из Примера 2. Если $f \in h_\nu^2$, то $f^* \in h_\nu^2$.

2). Если $n = 2$ и $f \in H(B)$, $p > 0$, где B - единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то (i) и (ii) следуют из Примеров 1 и 3. Если $f \in H_\nu^p$, то $f^* \in H_\nu^p$.

Следующие теоремы резюмируют (31)-(35).

Теорема 1. Пусть $f \in h^2_\nu$ в $B = B^n$, $n \geq 2$, $\overline{B}_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B$, $\bar{x} \in [0, x]$ и $\bar{r} > 0$ – корень уравнения (27) (с $x_0 = 0$, $r_0 = 1$). Пусть $\omega \in (0, \alpha]$, где α определяется по (32) (в частности, ω может быть выбран согласно (34)). Тогда, для $p = 2$ условия (33) и (35) выполняются с $\beta = -2$ и $\gamma = 1$.

Теорема 2. Пусть $f \in H^p_\nu$ в единичном круге $B \subset \mathbb{C}$ для некоторого $p \in (0, +\infty]$, $\overline{B}_{\bar{x}, \bar{r}} \subset B$, $\bar{x} \in [0, x]$ и $\bar{r} > 0$ – корень уравнения (27) (с $x_0 = 0$, $r_0 = 1$). Пусть $\omega \in (0, \alpha]$, где α определяется по (32) (в частности, ω может быть выбрано согласно (34)). Тогда условия (33) и (35) выполняются с $\beta = -2$ и $\gamma = 2/p$.

Замечание 3. В Теоремах 1 и 2 условия (33) и (35) могут быть рассмотрены как аналоги хорошо-известной теоремы Адамара о трех окружностях в новой ситуации (гармонические функции многих переменных, неконцентрические шары). Условие (33) представляется более “приближенным”, а условие (35) более точным, особенно для $\omega = \alpha$.

§5. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Из Теорем 1 и 2 мы можем вывести некоторые результаты о единственности.

Теорема 3. Пусть $u \in h^2_\nu$ в $B = B^n$, $n \geq 2$, $B_{x_m, r_m} \subset B$ и $A_2(x_m, r_m, u) \leq \varepsilon_m$, для $m \in \mathbb{N}$. Если для некоторой константы $c > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\rho_m \log \varepsilon_m + c \log \frac{1}{1 - |x_m|} \right) = -\infty, \quad \text{где} \quad \rho_m = \frac{1 - |x_m|}{\log \frac{1 - |x_m|}{(r_m/2)}}, \quad (36)$$

то $u \equiv 0$ в B .

Доказательство. Классический вариант теоремы единственности для $u \in h(B)$ утверждает, что если $u(x) = 0$ для $x \in \overline{B}_{x_0, \sigma_0} \subset B$, то $u \equiv 0$ в B . Последнее условие может быть заменено на $A_2(x_0, \sigma_0, u) = 0$. Используя аргумент компактности, мы заключаем: для фиксированной $u \in h(B)$, $u \not\equiv 0$ и $\tau \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, 1 - \tau)$ существует константа $a = a_{\tau, \sigma} > 0$, такая, что

$$a_{\tau, \sigma} < A_2(x, \sigma, u) \quad \text{для} \quad x \in \overline{B}_\tau. \quad (37)$$

Докажем, что допущение $u \not\equiv 0$ противоречит предположениям Теоремы 3.

Пусть сначала $r_m \neq 0$. Тогда $1 - |x_m| \geq r_m > 2\sigma$ для некоторого $\sigma > 0$ и подпоследовательности $m = m_k \rightarrow \infty$. Из (36) заключаем, что $\varepsilon_{m_k} \rightarrow 0$. Однако

$$A_2(x_{m_k}, \sigma, u) \leq A_2(x_{m_k}, r_{m_k}, u) \leq \varepsilon_{m_k},$$

что противоречит условию (37) с $\tau = 1 - 2\sigma$ для $k > k_\sigma$.

Предположим теперь, что $r_m \rightarrow 0$ и $|x_m| \neq 1$. Тогда $1 - |x_m| > 4\sigma$ для некоторого $\sigma > 0$ и $m = m_k \rightarrow \infty$. Из (36) следует что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \varepsilon_{m_k}}{\log(1/r_{m_k})} = -\infty. \quad (38)$$

Полагая $\tau = 1 - 4\sigma$, рассмотрим константу $b_\sigma > 1$, для которой

$$A_2(x, e\sigma, u) < b_\sigma \quad \text{для} \quad x \in \overline{B}_\tau. \quad (39)$$

Применим теперь свойство (10) лог-выпуклости к функции $L(r) = A_2(x, r, u)$ (см. §2, примеры 1—3). Поскольку $r_{m_k} < \sigma$ для $k > k_\sigma$, в (10) можно выбрать $r_1 = r_{m_k}$ для $k > k_\sigma$, $r = \sigma$ и $r_2 = e\sigma$. Используя также (37) и (39), получим

$$\log \frac{a_{\tau, \sigma}}{b_\sigma} < \alpha_k \log \varepsilon_{m_k}, \quad \text{где} \quad \alpha_k = \left(\log \frac{e\delta}{r_{m_k}} \right)^{-1}.$$

Левая часть этой оценки конечна и не зависит от k . Это противоречит условию (38).

Для завершения доказательства остается только рассмотреть случай $|x_m| \rightarrow 1$. Можно считать, что $1 - |x_m| \geq 2r_m$ для $m \in \mathbb{N}$ (иначе можно заменить B_{x_m, r_m} на $B_{x_m, r_m/2}$, не изменяя условия (36)). Применим Теорему 1 с (33) к функции $f = u$ и к шарам $B_{x_m, r_m} \subset B_{\bar{x}_m, \bar{r}_m} \subset B$, где $\bar{x}_m = \frac{1-2\sigma}{|x_m|} x_m$ с достаточно малым фиксированным $\sigma \in (0, 1/4)$ и $\bar{r}_m$, определенным по (26) или (27) (с $x_0 = 0$, $r_0 = 1$, $x = x_m$, $r = r_m$ и $\bar{x} = \bar{x}_m$). Поскольку $|x_m| \rightarrow 1$, имеем, что $|x_m| > 1 - \sigma$ для $m > m_\sigma$. Тогда $\bar{r}_m > |x_m - \bar{x}_m| > \sigma$ и $B_{x_m, \sigma} \subset B_{\bar{x}_m, \bar{r}_m}$. Из (37) для $\tau = 1 - 2\sigma$ и $x = \bar{x}_m$ (полагая $a_{\tau, \sigma} = a_\tau$) следует, что

$$a_\sigma < A_2(\bar{x}_m, \sigma, u) \leq A_2(\bar{x}_m, \bar{r}_m, u), \quad m > m_\sigma. \quad (40)$$

Поскольку $\delta_0 = 1 - |x_m| - r_m \geq \frac{1}{2}(1 - |x_m|)$, можно в (33) и (34) заменить δ_0 на $\frac{1}{2}(1 - |x_m|)$. Из (34) следует

$$\omega \geq \omega_m = \frac{1}{32\sigma} \rho_m, \quad m > m_\sigma. \quad (41)$$

Полагая $b = 1 + A_2(1, u)$ и применяя (40), из (33) с $p = 2$ и $\gamma = 1$ для $m > m_\sigma$ получим

$$\varepsilon_m^{\omega_m} (1 - |x_m|)^{-1} > b_\sigma, \quad \text{где} \quad b_\sigma = \frac{\sigma^{n/2} a_\sigma}{16b}.$$

Отсюда и из (41) для $m > m_\sigma$ имеем

$$\rho_m \log \varepsilon_m + 64\sigma \log \frac{1}{1 - |x_m|} > c_\sigma \quad (42)$$

с $c_\sigma = 32\sigma \log b_\sigma$. Для константы $c > 0$ в (36) можно выбрать σ так, чтобы $64\sigma < c$.

Тогда (42) противоречит (36). Это доказывает Теорему 3.

Совершенно аналогично, теорему единственности для голоморфных функций можно вывести из Теоремы 2 с условием (33).

Теорема 4. Пусть $f \in H_p^r$ в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}$ для некоторого $p \in (0, +\infty]$, $B_{x_m, r_m} \subset B$ и $A_p(x_m, r_m, f) \leq \varepsilon_m$ для $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что условие (36) выполнено для некоторой константы c , полагая, что $c > 0$, если $p \neq \infty$ и $c = 0$ (см. (45)), если $p = \infty$. Тогда $f \equiv 0$ в B .

Замечание 4. В Теоремах 3 и 4 условие (36) может быть заменено более простым условием

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(r_m \log \varepsilon_m + c \frac{1}{1 - |x_m|} \right) = -\infty, \quad (43)$$

которое в Теореме 4 для $p = \infty$ принимает крайне простой вид :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m \log \varepsilon_m = -\infty. \quad (44)$$

Это следует из очевидной оценки $\rho_m \geq (r_m/2)$.

Пример 4. Условие (44) точное. Чтобы показать это, выберем произвольную последовательность $x_m \in (0, 1)$, $x_m \rightarrow 1$, положим $2r_m = 1 - x_m$ и выберем $f \in H(B)$, $B = B^2 \subset \mathbb{C}$, $\|f\|_{\infty, B} = 1$ по формуле

$$f(z) = \exp \left(-A \frac{1+z}{1-z} \right), \quad A > 0.$$

Легко видеть, что для $\varepsilon_m = \|f\|_{\infty, B_{x_m, r_m}}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m \log \varepsilon_m = -\frac{2}{3}A,$$

откуда следует, что для каждой последовательности $\alpha_m \in (0, 1)$, $\alpha_m \rightarrow 1$ и x_m , подчиненной условию $(1 - x_m)^{1-\alpha_m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ мы имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} r_m^{\alpha_m} \log \varepsilon_m = -\infty.$$

Следующее условие заменяет условие (36) в Теореме 4 для равномерной нормы $p = \infty$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m \log \varepsilon_m = -\infty \quad \text{с} \quad \rho_m = \frac{1 - |x_m|}{\log \frac{1 - |x_m|}{(r_m/2)}}. \quad (45)$$

Для наиболее интересного случая $|x_m| \rightarrow 1$, условия (45) и (44) равносильны при условии $1 - |x_m| = O(r_m)$ при $m \rightarrow \infty$ (Пример 4).

Для общего случая рассмотрим произвольную последовательность $\alpha_m \in (0, 1)$ такую, что $\alpha_m \rightarrow 1$, и построим функцию $f \in H(B)$, $B = B^2 \subset \mathbb{C}$, $\|f\|_{\infty, B} = 1$ (так что $f \neq 0$), удовлетворяющую слегка более слабому, чем (45) условию:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 - |x_m|)^{\alpha_m}}{\log \frac{1 - |x_m|}{r_m}} \log \varepsilon_m = -\infty. \quad (46)$$

Для $m \in \mathbb{N}$ определим $x_m \in (0, 1)$, $x_m \rightarrow 1$ из

$$(1 - x_m)^{1-\alpha_m} = m^{-4} \quad (47)$$

и выберем $r_m \in (0, 1 - x_m)$ произвольным образом; чтобы избежать трудностей со знаменателем в (46), мы теперь считаем, что $2r_m \leq 1 - x_m$.

Записывая через $[t]$ целую часть числа $t > 0$, рассмотрим последовательность натуральных чисел

$$N_m = [(1 - x_m)^{-\frac{1+\alpha_m}{2}}], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (48)$$

Согласно (47) и (48), $N_m(1 - x_m) \leq m^{-2}$, что обеспечивает сходимость ряда $\sum N_m(1 - x_m)$. Это позволяет определить функцию f как произведение Бляшке:

$$f(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x_m - z}{1 - x_m z} \right)^{N_m}, \quad |z| < 1.$$

Очевидно, для $z \in B_{x_{r_m}, r_{r_m}}$

$$|f(z)| \leq \varepsilon_m = \left(\frac{r_m}{1 - x_m} \right)^{N_m}.$$

Выражение под знаком предела в (46) равно $-(1-x_m)^{\alpha_m} N_m$. Согласно (48) и (47), оно эквивалентно $-m^2 \rightarrow -\infty$. Что доказывает (46).

Из случая $p = \infty$ Теоремы 4 напрашивается вопрос. Является ли присутствие константы $c > 0$ реально необходимым в условии (36) Теорем 3 и 4 (случай $p \neq \infty$), или выбор $c = 0$ достаточен? Мы не имеем ответа на этот вопрос для Теоремы 4 (случай $p \neq \infty$). Тем не менее, для Теоремы 3 ответ положителен (см. Теорему 6). Рассмотрим сначала равномерный вариант этой теоремы.

Теорема 5. Пусть $u \in h_p^\infty$ в $B = B^n$, $n \geq 2$ и $\|u\|_\infty \leq \varepsilon_m$ в $B_{x_m, r_m} \subset B$ для $m \in \mathbb{N}$. Тогда из условия (45) следует, что $u \equiv 0$ в B .

Доказательство. Так как $\|u\|_{2,\Omega} \leq \|u\|_{\infty,\Omega}$ для $\Omega \subset B$, имеем, что $u \in h_p^2(B)$ и $A_2(x_m, r_m, u) \leq \varepsilon_m$ для $m \in \mathbb{N}$. Если $|x_m| \neq 1$, то условия (45) и (36) становятся равносильными для некоторой подпоследовательности $m = m_k \rightarrow \infty$, и Теорема 5 следует из Теоремы 3.

Рассмотрим теперь главный случай $x_m \rightarrow 1$ и допустим $u \not\equiv 0$ в B . Применим Теорему 1 с условием (35) (полагая там $p = 2$ и $\beta = -2$) к функции $f = u$ и к шарам $B_{x_m, r_m} \subset B_{x_m, \bar{r}_m} \subset B$, $m \in \mathbb{N}$.

Предположим, что $1 - |x_m| \geq 2r_m$ для $m \in \mathbb{N}$ (иначе, можно просто заменить r_m через $r_m/2$). Как и в доказательстве Теоремы 1, выберем $\bar{x}_m = \frac{1-2\sigma}{|x_m|} x_m$, но теперь $\sigma = 32^{-1}$. Согласно (41), положим в (35) $\omega = \rho_m$, $m \in \mathbb{N}$. Определим $\bar{r}_m$ по (27) с $x_0 = 0$, $r_0 = 1$, $x = x_m$, $r = r_m$ и $\bar{x} = \bar{x}_m$. В частности, $\bar{r}_m > |x_m - \bar{x}_m| > \sigma$ для $m \geq m_1$. Наконец, положим $a_m = \lambda_m x_m$, где $\lambda = \lambda_m$ — больший корень уравнения

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{r_m^2}{\lambda - 1} + |x_m|^2.$$

Таким образом, согласно (35) при $m \geq m_1$

$$\int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 d\mu_{a_m} \leq \left(\int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 d\mu_{a_m} \right)^{\rho_m} \left(\int_B |u|^2 d\mu_{a_m} \right)^{1-\rho_m}. \quad (49)$$

Из (23) для $x \in B$ следует, что

$$|x - a_m| < 2 + d(a_m) < 2 + \frac{1 - |x_m|}{|x_m|} < 3.$$

Поскольку $d\mu_{a_m} = |x - a_m|^{-4} dx > 3^{-4} dx$

$$\int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 d\mu_{a_m} > 3^{-4} \int_{B_{x_m, r_m}} |u|^2 dx > 3^{-4} \int_{B_{x_m, r}} |u|^2 dx > a, \quad (50)$$

где $a > 0$ — не зависящая от m константа. Последнее утверждение следует из предшествующего (37) утверждения (с $\sigma = 32^{-1}$ и $\tau = 1 - 2\sigma$). Из (49) и (50), используя оценку $\|u\|_\infty \leq \varepsilon_m$ в B_{x_m, r_m} и положив $M = 1 + \|u\|_{\infty, B}$, получим

$$a < \varepsilon_m^{p_m} M \int_B |x - a_m|^{-4} dx \quad \text{для } m \geq m_1. \quad (51)$$

Ограничим временно наше внимание случаем $n \geq 5$. Теперь последний интеграл сходится, если позволить a_m быть произвольной точкой $\mathbb{R}^n$, и интеграл достигает своего максимума при $a_m = 0$, так что

$$\int_B |x - a_m|^{-4} dx < \int_B |x|^{-4} dx = \frac{\sigma_n}{n-4},$$

где σ_n — поверхностная мера на S^n . Отсюда и из (51) для $n \geq 5$

$$\frac{(n-4)a}{M\sigma_n} < \varepsilon_m^{p_m}, \quad m \geq m_1.$$

Левая часть этой оценки положительна и не зависит от m . Для достаточно больших m это противоречит условию (45), согласно которому $\varepsilon_m^{p_m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Это доказывает теорему для $n \geq 5$.

Доказательство Теоремы 5 для остальных размерностей $n = 2, 3$ и 4 следует из утверждения: *если Теорема 5 верна для некоторой размерности $n_0 > 2$, то она верна также для всех размерностей n между 2 и n_0 .*

Для доказательства мы используем вложение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n_0}$, полагая $\mathbb{R}^{n_0} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$; $l = n_0 - n$. Функция $u \in h_v^\infty(B^n)$ может быть продолжена до функции $u \in h_v^\infty(B^n \times B^l)$ по формуле

$$u(x, y) = u(x), \quad \text{для } x \in B^n \text{ и } y \in B^l. \quad (52)$$

Применяя Теорему 5 с $n = n_0$ к продолженной функции u и n_0 -мерным шарам

$$B_{(x_m, 0), r_m}^{n_0} \subset B^{n_0}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (53)$$

и учитывая, что $\|u\|_\infty \leq \varepsilon_m$ остается в силе для m -того шара, мы получим, что $u \equiv 0$ в B^{n_0} и поэтому в B^n . Это завершает доказательство Теоремы 5.

Теперь докажем L^2 -нормный вариант Теоремы 5, используя процедуру вложения для всех размерностей $n \geq 2$. Мы приходим к следующей теореме, которая усиливает как Теорему 3, так и Теорему 5.

Теорема 6. Пусть $u \in h^2_\nu$ в B^n , $n \geq 2$, $\|u\|_2 \leq \varepsilon_m$ в $B^n_{x_m, r_m} \subset B^n$ для $m \in \mathbb{N}$. Тогда из условия (45) следует, что $u \equiv 0$ в B^n .

Доказательство. Сравним условия (36) и (45). Аналогично доказательству Теоремы 3, мы можем ограничиться случаем $|x_m| \rightarrow 1$. Пусть $u \not\equiv 0$ в B^n . Вложив $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+5}$ и используя (52) для $l = 5$, мы найдем продолжение функции $u \in h^2_\nu(B^n)$ к функции $u \in h^2_\nu(B^n \times B^5)$. Как в доказательстве Теоремы 5, рассмотрим точки $a_m = \lambda_m x_m$, где $\lambda = \lambda_m > 1$ – наибольший корень уравнения

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{r_m^2}{\lambda - 1} + |x_m|^2,$$

соответствующий шарам $B^n_{x_m, r_m}$, $m \in \mathbb{N}$. Используем подготовительный материал доказательства Теоремы 5, включая оценки (49) и (50). Роль точек a_m для случая продолженной функции u и для $(n+5)$ -мерных шаров (53) играют точки $(a_m, 0) \in \mathbb{R}^{n+5}$. Пусть для $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^5$

$$\psi_{a_m}(x, y) = |(x, y) - (a_m, 0)|^{-4} = (|x - a_m|^2 + |y|^2)^{-2}, \quad (54)$$

так что $d\mu_{a_m} = \psi_{a_m} d\nu_{n+5}$. Из (49) и (50), для $m \in \mathbb{N}$

$$\alpha < \left(\int_{B^{n+5}_{(x_m, 0), r_m}} |u|^2 \psi_{a_m} d\nu_{n+5} \right)^{\rho_m} \left(\int_{B^{n+5}} |u|^2 \psi_{a_m} d\nu_{n+5} \right)^{1-\rho_m}, \quad (55)$$

где $\alpha > 0$ – константа, не зависящая от $m \geq m_1$.

Нам будет удобно распространять интегралы (55) на произведение множеств. Более точно, мы расширим первый интеграл на $B^n_{x_m, r_m} \times B^5$, а второй – на $B^n \times B^5$. Согласно (54)

$$\psi_{a_m}(x, y) \leq |y|^{-4}, \quad \text{для } x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^5.$$

Из (55) и (52), для $m \geq m_1$, применяя теорему Фубини, получим

$$\alpha < \left(\int_{B^n_{x_m, r_m}} |u(x)|^2 dx \right)^{\rho_m} \left(\int_{B^n} |u(x)|^2 dx \right)^{1-\rho_m} \int_{B^5} |y|^{-4} dy. \quad (56)$$

Поскольку $r_m < 1$, первый интеграл не превосходит $\nu_n \varepsilon_m$ (где ν_n – объем B^n). Второй интеграл конечен и так как $u \not\equiv 0$ в B^n можно считать его равным

1. Третий интеграл *сходящийся* и фактически равен σ_5 – поверхностной мере сферы S^5 . Поэтому из (56)

$$\frac{a}{\sigma_5} < (\nu_n \varepsilon_m)^{p_m}, \quad m \geq m_1.$$

Здесь левая часть положительна и независима от $m \in \mathbb{N}$, между тем правая часть согласно (45) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Это противоречие доказывает Теорему 6.

Замечание 5. Применяя нашу технику вложения, Примеры 4 и 5 могут быть прямо использованы для демонстрации точности условия (45) в Теоремах 5 и 6 для всех размерностей n .

Замечание 6. Пусть $n = 2$, тогда, для $p = \infty$ Теорема 5 усиливает Теорему 4, а для $p = 2$ Теорема 6 распространяет Теорему 4 на случай *гармонических функций*.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. H. Armitage, T. Bagby and P. M. Gauthier, "Note on the decay of solutions of elliptic equations", Bull. London Math. Soc. vol. 17, pp. 554 — 556, 1985.
2. S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.
3. М. Брело, Основы Классической Теории Потенциала, М., Мир, 1964.
4. R. G. M. Brummelhuis, "Logarithmic convexity of L^2 norms for solutions of elliptic equations, Indag. Math. N.S., vol. 4, pp. 423 — 429, 1993.
5. R. G. M. Brummelhuis, Three-spheres Theorem for Second Order Elliptic Equations, preprint Leiden University, 1993.
6. W. F. Donoghue, Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York, 1969.
7. P. L. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, 1970.
8. У. Хейман, П. Кеннеди, Субгармонические Функции, М., Мир, 1980.
9. L. L. Helms, Introduction to Potential Theory, Wiley, New York, 1969.
10. J. Korevaar, Chebyshev-type Quadratures : use of complex analysis and potential theory, Complex potential theory, NATO-ASI, Series C, vol. 439, ed. P. M. Gauthier, Kluwer, Dordrecht, 1994.
11. J. Korevaar and J. L. M. Meyers, "Logarithmic convexity for supremum norms of harmonic functions", Bull. London Math. Soc., vol. 121, pp. 353 — 362, 1994.
12. Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ, М.– Л., 1941.
13. И. Стейн, Г. Вейс, Введение в Гармонический Анализ на Евклидовых Пространствах, М., Мир, 1974.

28 Мая 1995

Ереванский государственный университет
e-address : arakel@pnas.sci.am,

Монреальский университет
e-address : gauthier@ere.umontreal.ca