ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

А. А. Вагаршакян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 3, 1995

Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(-\infty,\infty)$, а $\widehat{f}(x)$ – ее преобразование Фурье :

$$\widehat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(t)\,dt.$$

Обозначим через CA дополнение борелева множества $A\subset(-\infty,\infty)$. В статье М. Бенедикса [1] доказано следующее. Пусть существуют два множества A и B, для которых имеем

$$f(x)=0 \text{ п.в. на } CA \text{ и } \widehat{f}(x)=0 \text{ п.в. на } CB.$$

Тогда из условий $m(A)<\infty$ и $m(B)<\infty$ следует, что $f(x)=0$ п.в. на $(-\infty,+\infty)$. Первые результаты в этом направлении получены А. Берлингом в [3]. В данной статье получены новые результаты в этом направлении.

1°. Сначала мы приводим новое представление для преобразования Фурье. Обозначим через T оператор

$$T\colon\ L_2(-\infty,\infty)\to L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]),$$

действующий по формуле

$$(Tf)(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}+n\sqrt{2\pi}\right)e^{-iny}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(Tf)(x,y)|^2\,dx\,dy=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} + n\sqrt{2\pi}\right)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Мы также рассматриваем оператор

$$S: L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]) \to L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]),$$

действующий по формуле

$$(SF)(x,y) = \exp\left(\frac{xy}{2\pi} i\right) F(y,-x).$$

Теорема 1. *Для любого* $f(x) \in L_2(-\infty,+\infty)$ $Tf = ST\widehat{f}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение теоремы для гладких функций $f(x)$ и $\widehat{f}(x)$.

Учитывая хорошо известную формулу из [2]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z+an) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi}{a} n\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{a} nz\right),$$

можем написать

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z+an) e^{-itan} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi}{a} n + t\right) \exp\left(\frac{2\pi}{a} inz + itz\right).$$

Полагая $a = \sqrt{2\pi}$, $z = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$, $t = \frac{y}{\sqrt{2\pi}}$, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} + n\sqrt{2\pi}\right) e^{-iny} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{y}{\sqrt{2\pi}} + n\sqrt{2\pi}\right) \exp\left(inx + i\frac{xy}{2\pi}\right).$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$(Tf)(x,y) = \exp\left(i\frac{xy}{2\pi}\right)(T\widehat{f})(y,-x).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть множество* $E \subseteq (-\infty,+\infty)$ *удовлетворяет следующему условию : если точка* x *принадлежит множеству* E, *то все точки* $x + n\sqrt{2\pi}$, $n = \pm 1, \ldots$ *тоже принадлежат множеству* E. *Тогда из условия*

$$f(x) = \widehat{f}(x) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad CE \quad \text{следует} \quad f(x) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad (-\infty,+\infty)$$

тогда и только тогда, когда $m(E) = 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что если $m(E) > 0$, то существует нетривиальная функция из $L_2(-\infty, +\infty)$, которая вместе со свом преобразованием Фурье почти всюду обращается в нуль на множестве CE. Заметим, что множество $F = E \cap [-\pi, \pi]$ имеет положительную меру. Обозначим через $\mathcal{X}(x, y)$ характеристическую функцию множества $F \times F$. Функция

$$f(x) = (T^{-1}\mathcal{X})(x)$$

удовлетворяет требованиям теоремы.

2°. В данном параграфе мы обобщаем равенство Парсеваля, позволяющее получить новые результаты относительно первоначальной проблемы Берлинга. Обозначим

$$E_\alpha = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{\alpha}n - \alpha, \frac{\pi}{\alpha}n + \alpha\right), \qquad 0 < \alpha < \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Теорема 3. *Если* $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ *и*

$$f(x) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad CE_\alpha, \quad \text{при некотором} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

то для того же числа α

$$\int_{E_\alpha} |\hat{f}(x)|^2\, dx = \frac{1}{n} \int_{E_\alpha} |f(x)|^2\, dx.$$

Доказательство. Хорошо известно, что если $f(x) \in L_2(-\alpha, \alpha)$ и $f(x) = 0$ п.в. вне $(-\alpha, \alpha)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}\left(\frac{\pi}{\alpha}n\right)\right|^2 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)|^2\, dx.$$

Так как преобразование Фурье функции $f(x)e^{-ixt}$ равно $\hat{f}(x + t)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}\left(\frac{\pi}{\alpha}n + t\right)\right|^2 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)|^2\, dx.$$

Следовательно

$$\frac{2\alpha^2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left|\hat{f}\left(\frac{\pi}{\alpha}n + t\right)\right|^2 dt = \int_{E_\alpha} |\hat{f}(x)|^2 dx.$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, обращающиеся в нуль вне интервалов $(\frac{\pi}{\alpha}n-\alpha, \frac{\pi}{\alpha}n+\alpha)$ и $(\frac{\pi}{\alpha}m-\alpha, \frac{\pi}{\alpha}m+\alpha)$ соответственно, где $m \neq n$. Имеем

$$\int_{E_\alpha} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{E_\alpha}\left(\int_{\frac{\pi}{\alpha}n-\alpha}^{\frac{\pi}{\alpha}n+\alpha} f(t)e^{-itx}dt\right)\left(\int_{\frac{\pi}{\alpha}m-\alpha}^{\frac{\pi}{\alpha}m+\alpha}\overline{g(s)}e^{isx}ds\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{E_\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\frac{\pi}{\alpha}n+t)e^{-ix(\frac{\pi}{\alpha}n+t)}dt\right)\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\overline{g}(\frac{\pi}{\alpha}m+s)e^{ix(\frac{\pi}{\alpha}m+s)}ds\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\frac{\pi}{\alpha}n+t)\overline{g}(\frac{\pi}{\alpha}m+s)\left(\int_{E_\alpha} e^{ix(\frac{\pi}{\alpha}(m-n)+s-t)}dx\right)ds\,dt.$$

Далее имеем

$$\int_{E_\alpha} e^{ix(\frac{\pi}{\alpha}(m-n)+s-t)}dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{i(\frac{\pi}{\alpha}k+x)(\frac{\pi}{\alpha}(m-n)+s-t)}dx =$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{\alpha}k(\frac{\pi}{\alpha}(m-n)+s-t)}\right)\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ix(\frac{\pi}{\alpha}(m-n)+s-t)}dx =$$

$$= 4\alpha^2\frac{\sin(\pi(m-n)+\alpha(s-t))}{\pi(m-n)+\alpha(s-t)}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\frac{\pi}{\alpha}(m-n)-2\alpha k+s-t)\right),$$

где δ – дельта функция. Так как $\frac{\pi}{2\alpha^2}$ – натуральное число, то в последней сумме при $s,t \in (-\alpha,\alpha)$ ненулевой вклад дает слагаемое, соответсвующее индексу

$$k = \frac{\pi}{2\alpha^2}(m-n).$$

Следовательно

$$\int_{E_\alpha} e^{ix(\frac{\pi}{\alpha}(m-n)+s-t)}dx = 4\alpha^2\frac{\sin(\pi(m-n)+\alpha(s-t))}{\pi(m-n)+\alpha(s-t)}\delta(s-t) = 0,$$

так как $m \neq n$. Поэтому

$$\int_{E_\alpha}\widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}\,dx = 0.$$

Отсюда непосредственно следует наша теорема.

Из теории преобразования Фурье в $L_2(-\infty,+\infty)$ известно ([4]), что существуют четыре подпространства собственных функций, соответствующие собственным значениям $1, i, -1, -i$ оператора Фурье. Ниже доказывается теорема единственности в подпространстве собственных функций для оператора Фурье, отвечающем собственному значению 1. Аналогичные утверждения имеют место и для подпространств, отвечающих собственным значениям $i, -1, -i$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x) \in L_2(-\infty,+\infty)$ совпадает со своим преобразованием Фурье. Пусть*

$$E = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k\sqrt{2\pi n} + a, k\sqrt{2\pi n} + b),$$

где $n \geq 2$ – натуральное число, и

$$0 < b - a < [\sqrt{n}]\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Если $f(x) = 0$ п.в. на CE_α, то $f(x) = 0$ п.в. на $(-\infty,\infty)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Обозначим $E_\alpha(t) = \{x + t;\ x \in E_\alpha\}$. При $p = [\sqrt{n}]$ имеет место включение

$$E \subseteq F = E_\alpha(a+\alpha) \cup E_\alpha(a+3\alpha) \cup \cdots \cup E_\alpha(a+\alpha+2\alpha(p-1)).$$

Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_2(-\infty,\infty)$ и обращается в нуль п.в. на CF. Для $j = 0,1,\ldots,p-1$ определим

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \in E_\alpha(a+\alpha+2\alpha j) \\ 0, & \text{при } x \notin E_\alpha(a+\alpha+2\alpha j). \end{cases}$$

Ясно, что $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{p-1} f_j(x)$. В силу теоремы 2

$$\left(\int_F |\sum_{j=0}^{p-1} \widehat{f}_j(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq \sum_{j=0}^{p-1}\left(\int_F |\widehat{f}_j(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \sum_{j=0}^{p-1}\left(p\int_{E_\alpha} |\widehat{f}_j(x)|^2\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1}\left(\frac{p}{n}\int_{E_\alpha(a+\alpha+2\alpha j)} |\widehat{f}_j(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \frac{p}{\sqrt{n}}\left(\int_F |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

В случае $p \geq 2$ имеет место строгое неравенство являющееся следствием линейной независимости функций $f_j(x)$, $j = 0,\ldots,p-1$.

Условие $f(x) = \widehat{f}(x)$ можно написать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_F e^{-ixt} f(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{CF} e^{-ixt} f(t)\,dt, \quad x \in F.$$

Так как $f(x) = 0$ п.в. на CF, то

$$\left(\int_F |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_F |\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_F e^{-ixt} f(t)dt|^2\,dx\right)^{1/2} < \frac{p}{\sqrt{n}}\left(\int_F |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Следовательно, $f(x) = 0$ п.в. на F.

Следствие. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ и

$$E = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (k\sqrt{2\pi n} - a, k\sqrt{2\pi n} + a),$$

где $n \geq 2$, $0 < a < [\sqrt{n}]\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Если $f(x) = \widehat{f}(x) = 0$ п.в. на CE_a, то $f(x) = 0$ п.в. на $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Всякую функцию $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{4} f_k(x),$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{4}\left(f(x) + \widehat{f}(x) + f(-x) + \widehat{f}_0(x)\right),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}\left(f(x) - i\widehat{f}(x) - f(-x) + i\widehat{f}_0(x)\right),$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}\left(f(x) - \widehat{f}(x) + f(-x) - \widehat{f}_0(x)\right),$$

$$f_4(x) = \frac{1}{4}\left(f(x) + i\widehat{f}(x) - f(-x) - i\widehat{f}_0(x)\right).$$

Здесь $f_0(x) = f(-x)$. Заметим, что все функции $f_k(x)$ обращаются в нуль вне множества E. Получаем

$$\widehat{f}_1(x) = f_1(x), \quad \widehat{f}_2(x) = if_2(x), \quad \widehat{f}_3(x) = -f_3(x), \quad \widehat{f}_4(x) = -if_4(x).$$

Из теоремы 4 следует, что $f_k(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, $f(x) = 0$ п. в. на $(-\infty, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Benedicks, "The support of functions and distributions with a spectral gap", Math. Scand., vol. 55, pp. 285 – 309, 1984.
2. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Equations I, Springer - Verlag, 1983.
3. Б. Эрикке, В. П. Хавин, "Принцип недетерминированности в гармоническом анализе", Итоги науки и техники, Совр. Проб. Матем., т. 72, стр. 181 — 260, 1985.
4. E. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Moscow, 1948.

27 апреля 1995

Институт математики
НАН Армении