

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛЕЙ С АППРОКСИМАТИВНО-КОНЕЧНОМЕРНЫМ СЛОЕМ

М. И. Заславская

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 3, 1995

В статье исследуются равномерные алгебры операторных полей с аппроксимативно-конечномерным слоем A при условии, что A содержит конечное число двусторонних идеалов. Доказывается, что указанные алгебры порождаются конечным семейством равномерных алгебр комплекснозначных функций и алгеброй A .

1. Будем рассматривать равномерные алгебры функций, заданных на некотором компакте со значениями в аппроксимативно-конечномерных алгебрах (или AF -алгебрах). Общая теория равномерных алгебр операторных полей рассматривается в работах Фелла [1], Тейлора ([2], [3]). Равномерные алгебры операторных полей с постоянным слоем исследуются в работах В. А. Арзуманяна и С. А. Григоряна ([4] — [6]). Равномерные алгебры с аппроксимативно-конечномерным слоем были рассмотрены в статье [7], где было установлено, что равномерные алгебры с простым AF -слоем порождаются равномерными алгебрами комплекснозначных функций, что позволяет перенести на них многие известные свойства функциональных алгебр.

В настоящей статье исследуются дальнейшие свойства равномерных алгебр с аппроксимативно-конечномерным слоем A , связанные с количеством идеалов в алгебре A ; доказывается, что при некоторых условиях указанные алгебры также порождаются равномерными алгебрами комплекснозначных функций.

2. Для удобства приведем некоторые известные определения и вспомогательные утверждения, а также некоторые определения из [7].

A C^* -алгебра A ([8], стр. 27) называется аппроксимативно-конечномерной

алгеброй (или, кратко, AF -алгеброй), если она представима в виде индуктивного предела последовательности вложенных конечномерных алгебр с общей единицей : $A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ при всех n ([9], стр. 196). Каждая из алгебр A_n изоморфна при этом прямой сумме полных матричных алгебр $A_n \sim \bigoplus_{j=1}^{r_n} M_j^n$ ([10], стр. 7). Будем предполагать фиксированным некоторый изоморфизм указанного ряда и отождествлять элементы A_n с изображающими их числовыми матрицами. Через B_n будем обозначать коммутативную подалгебру A_n , состоящую из всех диагональных матриц, входящих в A_n . Через B обозначаем алгебру $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n}$.

Пусть T – какой-либо компакт, A – C^* -алгебра с единицей. Через $C(T, A)$ будем обозначать алгебру всех непрерывных функций $x(t)$, отображающих T в A ; норма функции x определяется как $\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|_A$. Под равномерной алгеброй с A -слоем на компакте T (или равномерной A -алгеброй на T) будем понимать любую замкнутую подалгебру M алгебры $C(T, A)$, содержащую все функции-константы и удовлетворяющую следующему условию разделения точек компакта T : для любых $t_1, t_2 \in T$ и $a_1, a_2 \in A$ существует функция $x \in M$ такая, что $x(t_1) = a_1$, $x(t_2) = a_2$.

Пусть D – некоторая нормированная алгебра, U – множество объектов такое, что для любых $u \in U$, $d \in D$ определено произведение $u \circ d \in D$. Пусть $D_1 \in D$. Тогда через $[U, D_1]$ будем обозначать замыкание (в топологии D) множества всех конечных сумм вида $\sum_{j=1}^n u_j \circ d_j$, где $u_j \in U$, $d_j \in D_1$ при $1 \leq j \leq n$.

Равномерную A -алгебру M на T будем называть рассекаемой ([6], [7]), если существует такая алгебра U комплекснозначных непрерывных функций на T , что $M = [U, M_1]$, где M_1 – множество всех функций-констант из M . Иногда вместо $[U, M_1]$ будем писать $[U, A]$, где множество констант A соответствует множеству M_1 . Во всем дальнейшем изложении будем считать фиксированными : некоторую AF -алгебру $A = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}$, соответствующие алгебры A_n и B_n при всех n , алгебру $B = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n}$, компакт T , некоторую равномерную алгебру M с A -слоем на компакте T . Следуя [7] введем оператор $P_n : A_n \rightarrow B_n$ следующим образом :

$$P_n(a) = \sum_{i=1}^{r_n} e_{ii}^n a e_{ii}^n,$$

где e_{ii} — диагональная матричная единица из A_n , r_n — размерность матриц из A_n , $a \in A_n$.

Заметим, что $P_n(a) = P_{n+k}(a)$ при любом $a \in A_n$ и при любом k . В дальнейшем будем рассматривать P_n на всей алгебре A , задавая его таким же равенством, как было только что указано. Ясно, что P_n — B_n -билинейное положительное отображение и $P_n(e) = e$, где e — единичный элемент из A . Отсюда следует, что P_n — условное ожидание из A_n в B_n (см. [4], стр. 68).

Как было показано в [7], последовательность $P_n(a)$ сходится по норме при $n \rightarrow \infty$ к пределу $P(a)$. Легко показать, что $P(a)$ — условное ожидание из A в B .

Пусть U_n — группа унитарных вещественных матриц из A_n с неотрицательными коэффициентами, и пусть $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Через T_u при $u \in U$ обозначим внутренний автоморфизм алгебры A_n (а также A), определяемый равенством $T_u(a) = u^* a u$ при $a \in A_n$. Легко видеть, что автоморфизмы T_u при $u \in U_n$ являются также автоморфизмами алгебр B_n и B . Полученное семейство автоморфизмов T_u при $u \in U_n$ образует конечную группу G_n для каждого фиксированного n . Положим $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$; тогда G есть группа внутренних автоморфизмов алгебр A и B .

Если Y — пространство максимальных идеалов алгебры B , то по теореме Гельфанда–Наймарка ([10], стр. 28) коммутативная алгебра B изоморфна алгебре $C(Y)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на компакте Y . Поэтому каждый автоморфизм T алгебры B порождает естественным образом гомеоморфизм $\tilde{T}$ компакта Y на себя, определяемый следующим соотношением: для всяких $y \in Y$, $f \in C(Y)$ имеет место $f(\tilde{T}(y)) = (Tf)(y)$. Через $G(y)$ будем обозначать орбиту элемента $y \in Y$ относительно всех гомеоморфизмов $\tilde{T}$, порождаемых автоморфизмами рассматриваемого типа, т.е. $G(y) = \{\tilde{T}(y), T \in G\}$.

3. Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения, при помощи которых устанавливаются взаимосвязи между двусторонними идеалами алгебры A , замкнутыми идеалами алгебры B и замкнутыми инвариантными подмножествами компакта Y .

Обозначим через Δ множество всех нетривиальных двусторонних замкну-

тых идеалов алгебры A , через Θ – множество всех нетривиальных замкнутых идеалов алгебры B , инвариантных относительно всех автоморфизмов T_u при $u \in U$, через Ξ – множество всех собственных непустых замкнутых подмножеств компакта Y , инвариантных относительно всех гомеоморфизмов $\tilde{T}$, порождаемых автоморфизмами $T_u \in G$.

В силу соответствия, установленного теоремой Гельфанда–Наймарка, каждый идеал $J \in \Theta$ изоморфен множеству функций, обращающихся в нуль на некотором подмножестве компакта Y . Мы будем обозначать это подмножество через $\text{supp } J$. Через Ω будем обозначать отображение, определяемое соотношением $\Omega(I) = \text{supp } P(I)$, где $I \in \Delta$.

Лемма 3.1. При любом $I \in \Delta$ будет $P(I) = I \cap B$ и $P(I) \in \Theta$.

Доказательство. Пусть $I \in \Delta$. Тогда для любого $x \in I$ имеем $P(x) \in I$, $P(x) \in B$, откуда $P(x) \in I \cap B$. Обратно, если $y \in I \cap B$, то $y \in B$, $P(y) = y \in B$, а потому $y \in P(I)$. Таким образом, $P(I) = I \cap B$. Легко проверить, что $P(I) \in \Theta$.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. Отображение, сопоставляющее каждому идеалу $I \in \Delta$ идеал $P(I) \in \Theta$, является взаимно-однозначным соответствием между Δ и Θ .

Доказательство. Согласно лемме 3.1 рассматриваемое отображение является отображением из Δ в Θ . Пусть $J \in \Theta$. Рассмотрим множество $\tilde{I} = [U, J]$. Тогда $\tilde{I}$ есть замыкание множества сумм вида $\sum_{i=1}^n u_i x_i$, где $u_i \in U$, $x_i \in J$. Докажем, что $\tilde{I} \in \Delta$. Очевидно, что $\tilde{I}$ – замкнутое множество, и линейная комбинация элементов из $\tilde{I}$ принадлежит $\tilde{I}$. В условиях леммы (см. [7]) имеет место соотношение $A = [U, B]$. Пусть $y = \sum_{i=1}^n u_i x_i$, где $u_i \in U$, $x_i \in J$, и $z = \sum_{j=1}^m \tilde{u}_j z_j$, где $\tilde{u}_j \in U$, $z_j \in B$. Тогда $yz = \sum_{i=1}^n u_i x_i \sum_{j=1}^m \tilde{u}_j z_j = \sum_{i,j=1}^{i=n, j=m} u_i x_i \tilde{u}_j z_j = \sum_{i,j=1}^{i=n, j=m} u_i \tilde{u}_j w_{ij} z_j = \sum_{k=1}^{n+m} \tilde{u}_k v_k \in \tilde{I}$, где все w_{ij} и все v_k принадлежат J (здесь мы воспользовались инвариантностью J относительно всех T_{u_j}). Теперь предельным переходом получаем, что $yz \in \tilde{I}$ при любых $y \in \tilde{I}$, $z \in A$. Аналогичным образом доказывается, что $zy \in \tilde{I}$ при $y \in \tilde{I}$, $z \in A$. Поэтому $\tilde{I} \in \Delta$. Если $J \in \Theta$ и $I = [U, J]$, то $P(\tilde{I}) = J$. Действительно, если $y = \sum_{i=1}^n u_i x_i$, где $u_i \in U$, $x_i \in J$, то

$P(y) = \sum_{i=1}^n P(u_i x_i) = \sum_{i=1}^n P(u_i) x_i \in J$. Для проверки этого можно начать с легко проверяемого соотношения $P(ux) = P(u)x$, имеющего место при всех $u \in U$, $x \in B$. Отсюда следует, что $P(\tilde{I}) \subseteq J$. Затем из соотношений $J \subseteq \tilde{I}$, $P(J) = J$ получаем $P(\tilde{I}) = J$.

Пусть $I_1 \in \Delta$, $I_2 \in \Delta$, $P(I_1) = P(I_2) = J \in \Theta$. Для любого n рассмотрим идеалы $I_1^n = I_1 \cap A_n$, $I_2^n = I_2 \cap A_n$ в A_n и идеал $J^{(n)} = J \cap B_n$ в B_n . В силу общих теорем о структуре идеалов в конечномерных алгебрах, идеалы I_1^n и I_2^n определяются некоторыми матричными блоками алгебры A_n . С учетом соотношения $P(I_1^n) = P(I_2^n)$ эти блоки совпадают при $I_1^{(n)}$ и $I_2^{(n)}$, и следовательно, $I_1^{(n)} = I_2^{(n)}$. Так как это уравнение выполняется для любого n , то получаем $I_1 = I_2$. Наконец, из соотношения $P(A) = B$ заключаем, что идеал $P(I)$ нетривиален в том и только том случае, когда нетривиален идеал I . Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Отображение Ω есть взаимно-однозначное соответствие между Δ и Ξ .*

Доказательство. Согласно лемме 3.2, P определяет взаимно-однозначное соответствие между Δ и Θ . Для каждого $J \in \Theta$ однозначно определено замкнутое множество $\text{supp } J$, и, очевидно, для каждого непустого замкнутого собственного подмножества $Y_1 \subseteq Y$ однозначно определен идеал J такой, что $\text{supp } J = Y_1$. При этом инвариантности J относительно всех автоморфизмов T соответствует инвариантность $\text{supp } J$ относительно порожденных ими гомеоморфизмов $\tilde{T}$ и обратно. Лемма доказана.

4. Будем говорить, что AF -алгебра A принадлежит классу Γ_1 , если в A имеется единственный нетривиальный замкнутый двусторонний идеал. Будем говорить, что AF -алгебра A принадлежит классу Γ_2 , если в A имеются два и только два замкнутых двусторонних нетривиальных идеала.

Лемма 4.1. *Пусть A — AF -алгебра, Y — компакт ее максимальных идеалов.*

Тогда :

а) если $A \in \Gamma_1$, то существуют множества $Y_1 \subseteq Y$ и $Y_2 \subseteq Y$, инвариантные относительно всех гомеоморфизмов T , порожденных автоморфизмами $T_u \in G$ и

такие, что $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $Y_1 \cup Y_2 = Y$, $\overline{Y_1} = Y_1$, $\overline{Y_2} = Y$.

б) если $A \in \Gamma_2$, то существуют множества $Y_1 \subseteq Y$ и $Y_2 \subseteq Y$, принадлежащие Ξ и удовлетворяющие одному из следующих условий: (i) либо $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ и $Y_1 \cup Y_2 = Y$, (ii) либо $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y$, $\overline{Y \setminus Y_2} = Y$, $\overline{Y_1 \setminus Y_2} = Y_2$.

Доказательство. Пусть $A \in \Gamma_1$, и пусть I — единственный нетривиальный замкнутый двусторонний идеал алгебры A . В этом случае, по лемме 3.3, Ξ одноэлементно и состоит лишь из $\Omega(I)$. Положим $Y_1 = \Omega(I)$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Тогда $Y_1 \cup Y_2 = Y$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, причем Y_1 и Y_2 непусты. Из $Y_1 \in \Xi$ следует, что Y_1 и Y_2 инвариантны относительно всех гомеоморфизмов $\tilde{T}$, порожденных автоморфизмами группы G . В силу $Y_1 \in \Xi$ имеем $\overline{Y_1} = Y_1$. В силу одноэлементности Ξ , множество Y_2 может совпадать только с Y или с Y_1 ; но $\overline{Y_2}$ не может совпадать с Y_1 ввиду того, что $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Следовательно, $\overline{Y_2} = Y$. Пусть теперь $A \in \Gamma_2$. В этом случае существуют в точности два нетривиальных замкнутых идеала I_1 и I_2 алгебры A . Ясно, что идеалы I_1 и I_2 либо имеют лишь нулевое пересечение, либо один из них содержится в другом (иначе идеал $I_1 \cap I_2$ был бы еще одним нетривиальным замкнутым двусторонним идеалом алгебры A). Если $I_2 \subseteq I_1$, то $\Omega(I_2) \supseteq \Omega(I_1)$; в этом случае, положив $Y_1 = \Omega(I_1)$, $Y_2 = \Omega(I_2)$, имеем $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y$; $Y_1 \in \Xi$, $Y_2 \in \Xi$. Далее $\overline{Y \setminus Y_2}$, очевидно, инвариантно относительно гомеоморфизмов $\tilde{T}$; Ξ в рассматриваемом случае двухэлементно, а потому имеем $\overline{Y \setminus Y_2} = Y$.

Если $I_1 \cap I_2 = \{\emptyset\}$, то, как легко видеть, $\Omega(I_1) \cap \Omega(I_2) = \emptyset$ и $\Omega(I_1) \cup \Omega(I_2) = Y$. Положив $Y_1 = \Omega(I_1)$, $Y_2 = \Omega(I_2)$, получим, что Y_1 и Y_2 удовлетворяют условию (i). В частности, соотношение $Y_1 \cup Y_2 = Y$ вытекает из следующих соображений. Если бы существовало $Y_3 \in Y \setminus \{Y_1 \cup Y_2\}$, то, в силу инвариантности Y_1 и Y_2 относительно гомеоморфизмов указанного выше вида, множество $Y_1 \cup Y_2$ принадлежало бы Ξ , что противоречит двухэлементности Ξ . Лемма доказана.

5. Рассмотрим условные ожидания P_n , определенные в разделе 2. Всякое $P_n : A_n \rightarrow B_n$ порождает условное ожидание Π_n из $C(T, A_n)$ в $C(T, B_n)$, определяемое равенством $\Pi_n(x) = P_n(x(t))$. Нетрудно показать, что при любой фиксированной функции $x \in C(T, A)$ последовательность $\Pi_n(x)(t)$ равномерно по t сходится при

$n \rightarrow \infty$ к некоторой функции из $C(T, B)$, а потому можем рассматривать условное ожидание $\Pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n$ из $C(T, A)$ в $C(T, B)$. Будем обозначать множество $\Pi(M) \subseteq C(T, B)$ через M_Π . Будем рассматривать также группу автоморфизмов Ψ алгебры M , порожденную группой G , которая определена в разделе 2. Каждый такой автоморфизм T_u определяется равенством $(T_u x)(t) = u^* x(t) u$, где $u \in U$, $x \in M$. Ясно, что $T_u M_\Pi = M_\Pi$ при любом $u \in U$.

Группа G естественным образом порождает также группу гомеоморфизмов на множестве $Y \times T$. Каждый такой гомеоморфизм преобразует естественным образом компоненту y пары (y, t) , а компоненту t оставляет неизменной. При этом орбитой точки $(y, t) \in Y \times T$ относительно указанной пары будет множество всевозможных $\tilde{T}(y) \times \{t\}$, где $\tilde{T}$ — всевозможные гомеоморфизмы только что описанного типа, порожденные автоморфизмами T_u группы G .

Лемма 5.1. Пусть $A \in \Gamma_1$, и пусть I — единственный нетривиальный замкнутый двусторонний идеал в A . Тогда существуют две равномерные алгебры $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq C(T)$ такие, что

$$M_\Pi = [\mathcal{U}_1, B] + [\mathcal{U}_2, I \cap B].$$

Доказательство. Согласно лемме 3.2 имеем: $J = P(I) = I \cap B$ — единственный замкнутый идеал алгебры B , инвариантный относительно автоморфизмов T_u при $u \in U$. Положим $Y_1 = \text{supp } J = \Omega(I)$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Тогда $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $\bar{Y} = Y_1$, $Y_1 \subseteq \bar{Y}_2 = Y$, и Y_1, Y_2 инвариантны относительно гомеоморфизмов $\tilde{T}$, порожденных автоморфизмами T_u при $u \in U$. Для любого $y_1 \in Y_1$ имеем: $\overline{G(y_1)} = Y_1$ (в противном случае $\overline{G(y_1)} \in \Xi$, в множестве Ξ было бы более одного элемента, что противоречит условию). Таким же образом убеждаемся в том, что $\overline{G(y_2)} = Y$ при $y_2 \in Y_2$.

Пусть $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$. Положим $\mathcal{U}_1 = M_\Pi|_{T_{y_1}}$, $\mathcal{U}_2 = M_\Pi|_{T_{y_2}}$, где $T_y = \{y\} \circ T$. В рассматриваемых условиях каждое максимальное множество антисимметрии алгебры M_Π содержится в некотором T_y при $y \in Y$, и каждое множество антисимметрии алгебры M_Π является обобщенным множеством пика, поэтому каждая алгебра $M_\Pi|_{T_y}$ при $y \in Y$ замкнута на T_y в равномерной норме (см. [7]).

Из доказательства теоремы 3.7 статьи [7] следует, что $\mathcal{U}_2 = \mathcal{M}_{\Pi}|_{T_y}$ для любого $y \in G(y_2)$.

Покажем, что $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$. Пусть $f(t) \in \mathcal{U}_1$, тогда найдется такая функция $F(y, t) \in \mathcal{M}_{\Pi}$, что $F(y_1, t) = f(t)$. На основании равномерной непрерывности F , а также исходя из соотношения $\overline{G(y_2)} = Y$, имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\tilde{y} \in G(y_2)$ такой, что $|F(y_1, t) - F(\tilde{y}, t)| < \varepsilon$ при всех $t \in T$. Но $F(\tilde{y}, t) \in \mathcal{U}_2$. Из замкнутости $\mathcal{U}_2$ имеем, что $F(y_1, t) \in \mathcal{U}_2$. Таким образом, $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$. Покажем теперь, что $[\mathcal{U}_1, B] + [\mathcal{U}_2, J] \subseteq \mathcal{M}_{\Pi}$. В самом деле, пусть $F(y, t) \in [\mathcal{U}_1, B] + [\mathcal{U}_2, J]$. Тогда существуют $f_1(t, y) \in [\mathcal{U}_1, B]$ и $f_2(t, y) \in [\mathcal{U}_2, J]$ такие, что $F(y, t) = f_1(t, y) + f_2(t, y)$. Покажем, что $F(y, t) \in \mathcal{M}_{\Pi}$. Достаточно показать, в соответствии с теоремой Бишоп-Шилова, что для любого $\tilde{y} \in Y$ $F(y, t)|_{T_{\tilde{y}}} \in \mathcal{M}|_{T_{\tilde{y}}}$. Имеем $Y = Y_1 \cup Y_2$. Пусть $\tilde{y} \in Y_1 = \text{supp } J$, тогда $F(y, t)|_{T_{\tilde{y}}} = f_1(t, \tilde{y}) \in \mathcal{U}_1 = \mathcal{M}|_{T_{\tilde{y}}}$. Пусть теперь $\tilde{y} \in Y_2$, тогда $F(\tilde{y}, t) = f_1(t, \tilde{y}) + f_2(t, \tilde{y}) \in \mathcal{U}_2 = \mathcal{M}|_{T_{\tilde{y}}}$, т.к. $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$. Тем самым доказано, что

$$[\mathcal{U}_1, B] + [\mathcal{U}_2, J] \subseteq \mathcal{M}_{\Pi}.$$

Докажем теперь, что $\mathcal{M}_{\Pi} \subseteq [\mathcal{U}_1, B] + [\mathcal{U}_2, J]$. Рассмотрим алгебры, индуцированные алгебрами $\mathcal{M}_{\Pi}$ и $[\mathcal{U}_1, B]$ на множестве $T \circ Y_1 = T \circ \{\text{supp } J\}$. Аналогично [7] легко убедиться в том, что множества антисимметрии обеих индуцированных алгебр лежат на множествах T_y , а потому эти алгебры совпадают. Пусть $F(y, t) \in \mathcal{M}_{\Pi}$. Тогда, ввиду совпадения указанных алгебр, существует $G(t, y) \in [\mathcal{U}_1, B]$ такая, что $(F(y, t) - G(t, y))|_{T \circ \text{supp } J} = 0$. Из определения алгебры $\mathcal{U}_2$ следует, что при каждом $y_2 \in Y$ будет $F(y_2, t) - G(t, y_2) \in \mathcal{U}_2$, но при каждом $y_1 \in Y_1 = \{\text{supp } J\}$ будет $F(y_1, t) - G(t, y_1) = 0$. Таким образом, при всяком $\tilde{y} \in Y = Y_1 \cup Y_2$ имеет место соотношение $(F(y, t) - G(t, y))|_{T_{\tilde{y}}} \in [\mathcal{U}_2, J]|_{T_{\tilde{y}}}$. А поскольку максимальные множества антисимметрии алгебры $[\mathcal{U}_2, J]$ лежат на множествах T_y , то по теореме Бишоп-Шилова заключаем, что $F(y, t) - G(t, y) \in [\mathcal{U}_2, J]$. Следовательно, $F(y, t) \in [\mathcal{U}_1, B] + [\mathcal{U}_2, J]$. Лемма доказана.

Лемма 5.2. Пусть $A \in \Gamma_2$. Тогда справедливо утверждение :

а) либо существует два непересекающихся идеала J_1 и J_2 алгебры B и две равномерные подалгебры $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ алгебры $C(T)$ такие, что $[\mathcal{U}_1, J_1] + [\mathcal{U}_2, J_2] = \mathcal{M}_{\Pi}$,

б) либо существуют два идеала $J_1 \subseteq J_2 \subseteq B$ и три равномерные подалгебры $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ алгебры $C(T)$ такие, что $\mathcal{M}_\Pi = [\mathcal{U}_0, B] + [\mathcal{U}_1, J_1] + [\mathcal{U}_2, J_2]$, где $J_1 = B \cap I_1, J_2 = B \cap I_2, I_1, I_2$ — идеалы в A .

Доказательство. Пусть $A \in \Gamma_2$, и пусть I_1 и I_2 — идеалы алгебры A ; пусть $J_1 = I_1 \cap B$ и $J_2 = I_2 \cap B$ — соответствующие идеалы алгебры B . Аналогично доказательству леммы 4.1 заключаем, что имеет место один из двух случаев: либо идеалы алгебры A не пересекаются, либо один из них содержится в другом.

Рассмотрим вначале первый случай. Положим $Y_1 = \text{supp } J_1, Y_2 = \text{supp } J_2$. Так же, как в доказательстве леммы 4.1 заключаем, что $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset, Y = Y_1 \cup Y_2, \overline{Y}_1 = Y_1, \overline{Y}_2 = Y$, при этом для любого $y_i \in Y_i$ при $i = 1, 2$ имеем $\overline{G(y_i)} = Y_i$.

Зафиксируем каким-либо образом $y_1 \in Y_1$ и $y_2 \in Y_2$. Положим $\mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_\Pi|_{T_{y_1}}$ и $\mathcal{U}_2 = \mathcal{M}_\Pi|_{T_{y_2}}$. Тогда алгебры $\mathcal{M}_\Pi$ и $[\mathcal{U}_1, J_1] + [\mathcal{U}_2, J_2]$ совпадают (их равенство доказывается в точности таким же методом, как и аналогичное равенство в доказательстве леммы 5.1).

Для второго случая будем считать, не нарушая общности, что $I_1 \subseteq I_2$. Тогда $J_1 \subseteq J_2$; положим $Y_1 = \text{supp } J_1, Y_2 = \text{supp } J_2$. Имеем $Y \supseteq Y_1 \supseteq Y_2$. Зафиксируем какие-либо элементы $y_0 \in Y \setminus Y_1, y_1 \in Y_1 \setminus Y_2, y_2 \in Y_2$. Положим $\mathcal{U}_0 = \mathcal{M}_\Pi|_{T_{y_0}}, \mathcal{U}_1 = \mathcal{M}_\Pi|_{T_{y_1}}, \mathcal{U}_2 = \mathcal{M}_\Pi|_{T_{y_2}}$. Тогда, аналогично доказательству леммы 5.1, устанавливается, что $\mathcal{U}_2 \supset \mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_0$ и $\mathcal{M}_\Pi = [\mathcal{U}_1, J_1] + [\mathcal{U}_2, J_2]$. Лемма доказана.

6. Основная теорема. Пусть A — AF -алгебра, $\mathcal{M} \subseteq C(T)$ — равномерная алгебра с A -слоем на компакте T . Тогда если $A \in \Gamma_1$, то существуют две равномерные алгебры $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq C(T)$ такие, что $\mathcal{M}_\Pi = [\mathcal{U}_1, A] + [\mathcal{U}_2, I]$, где I — единственный нетривиальный замкнутый двусторонний идеал алгебры A .

Если $A \in \Gamma_2$, то имеет место одно из следующих двух условий:

1) либо найдутся две равномерные алгебры $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq C(T)$ и два непересекающихся идеала $I_1, I_2 \subseteq A$ такие, что

$$\mathcal{M}_\Pi = [\mathcal{U}_1, I_1] + [\mathcal{U}_2, I_2];$$

2) либо найдутся три равномерные алгебры $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subseteq C(T)$ и идеалы

$I_1 \subset I_2 \subset A$ такие, что

$$\mathcal{M}_\Pi = [\mathcal{U}_0, A] + [\mathcal{U}_1, I_1] + [\mathcal{U}_2, I_2].$$

Доказательство вытекает из соотношения $\mathcal{M} = [\mathcal{M}_\Pi, A]$, справедливого для всякой равномерной A -алгебры с AF -слоем ([7], теорема 3.2), из леммы 5.1, 5.2, и из соотношений $A = [\mathcal{U}, B]$, $I = [\mathcal{U}, J]$. Последнее соотношение было установлено по ходу доказательства леммы 3.2 для всякого идеала I алгебры A и соответствующего идеала $J = I \cap B$ алгебры B .

ABSTRACT. The paper investigates uniform algebras of operator fields with approximately finite-dimensional fibre A under the condition that A contains a finite number of two-sided ideals. It is proved that the chosen algebras are generated by finite family the uniform algebras of complex valued functions and the algebra A .

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Fell, "The structure of algebras of operator fields", Acta Math., vol. 106, № 3—4, pp. 233 — 280, 1961.
2. D. C. Taylor, "Interpolation in algebras of operator fields", J. of Funct. Anal., vol. 10, № 2, pp. 159 — 190, 1972.
3. D. C. Taylor, "A general Hoffman-Werner theorem for algebras of operator fields", Proc. of AMS, vol. 52, pp. 212 — 216, 1972.
4. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, "Спектр равномерных алгебр операторных полей", Изв. АН Арм.ССР, т. 21, № 6, стр. 23—79, 1986.
5. В. А. Арзуманян, С. А. Григорян, "Границы равномерных алгебр операторных полей", Изв. АН Арм.ССР, т. 25, № 5, стр. 422 — 438, 1990.
6. V. A. Arzumanyan, S. A. Grigorian, "Noncommutative uniform algebras", J. Operator Theory, vol. 43, pp. 101 — 109, 1990.
7. С. А. Григорян, М. И. Заславская, "Равномерные алгебры операторных полей с AF -слоем", Изв. НАН Армении, т. 29, № 5, стр. 13 — 20, 1994.
8. O. Bratteli, D. Robinson, Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Springer-Verlag, 1979.
9. O. Bratteli, "Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras", Trans. AMS, vol. 171, pp. 195 — 234, 1972.
10. А. М. Вершик, С. В. Керов, "Локальные полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0 -функтор", Итоги науки и техники. Совр. проблемы мат., т. 26, стр. 3 — 56 1985.
11. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, М. "Мир", 1973.

18 ноября 1994

Институт математики
НАН Армении