

ЗАДАЧА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н. Е. Товмасян, Т. М. Кошелева

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 30, № 3, 1995

Рассматривается неправильно эллиптическое уравнение

$$A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D$$

с граничными условиями

$$\operatorname{Re} (a_0(x, y)u(x, y)) = f_0(x, y), \quad \operatorname{Re} \left(a_1(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial N} \right) = f_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$ и Γ — граница D .

В работе получено необходимое и достаточное условие, при котором рассматриваемая задача корректна. Указан эффективный метод решения этой задачи.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе основным предметом изучения является уравнение

$$A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

рассматриваемое в области $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$. Коэффициенты A_0, A_1, A_2 — комплексные числа. Мы рассмотрим случай, когда уравнение (1) эллиптическое, т.е. $A_2 \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 = 0 \quad (2)$$

не имеет вещественных корней.

Уравнение (1) называется *правильно эллиптическим*, если оно эллиплично и число корней характеристического уравнения (2) с $\text{Im} \lambda > 0$ и $\text{Im} \lambda < 0$ равно. В противном случае эллиптическое уравнение называется *неправильно эллиптическим*.

Пусть $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ – граница области D . Решение уравнения (1) ищется в классе функций, бесконечно дифференцируемых в замкнутой области $D \cup \Gamma$ и регулярных в бесконечности. Функция $u(x, y)$ называется *регулярной в бесконечности*, если

$$|u(x, y)| \leq c, \quad \left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{c}{r}, \quad \left| \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right| \leq \frac{c}{r},$$

при $r \geq r_0$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, r_0 – достаточно большое положительное число и c – постоянная. В работах [1] и [2] доказаны однозначная разрешимость задачи Дирихле и фредгольмовость задач Неймана и Пуанкаре для правильно эллиптических уравнений второго порядка в односвязных областях. В работе [1] доказано, что эти классические задачи для неправильно эллиптических уравнений не являются нормально разрешимыми, а соответствующие однородные задачи в области D имеют бесконечное число линейно независимых решений.

В данной работе рассматривается задача Римана-Гильберта для уравнения (1). Граничные условия этой задачи берутся в следующем виде :

$$\text{Re} [a_0(x, y)u(x, y)] = f_0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3)$$

$$\text{Re} \left[a_1(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial N} \right] = f_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (4)$$

где $a_0(x, y)$, $a_1(x, y)$, $f_0(x, y)$ и $f_1(x, y)$ – заданные бесконечно дифференцируемые функции на Γ , N – внутренняя нормаль в точке $(x, y) \in \Gamma$. Мы предполагаем $a_0(x, y) \neq 0$, $a_1(x, y) \neq 0$ при $(x, y) \in \Gamma$. Задача (1), (3), (4) при $f_0 \equiv 0$ и $f_1 \equiv 0$ называется *однородной*. Для заданной пары функций $a_0(x, y)$ и $a_1(x, y)$ задача (1), (3), (4) называется *корректной*, если для любых бесконечно дифференцируемых функций $f_0(x, y)$ и $f_1(x, y)$ она имеет единственное решение.

Основная цель данной работы – описать множество функций $a_0(x, y)$ и $a_1(x, y)$, при котором задача (1), (3), (4) для неправильно эллиптических уравнений корректна, и вывести формулу решения этой задачи. Мы рассматриваем также задачу (1), (3), (4) в круге и вне эллипса.

§1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВНЕ КРУГА

Обозначим через λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения (2). Если уравнение (1) неправильно эллиптическое, то возможны следующие случаи :

- 1) $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$ (5)
- 2) $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2;$
- 3) $\operatorname{Im} \lambda_1 < 0, \quad \operatorname{Im} \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2;$
- 4) $\operatorname{Im} \lambda_1 < 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2.$

Мы будем рассматривать только случаи 1) и 2), так как случаи 3) и 4) исследуются аналогичным образом.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (6)$$

1) Пусть имеет место условие (5). Обозначив

$$W = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (7)$$

уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8) определяется формулой (см. [1])

$$W(x, y) = \varphi(x + \lambda_1 y), \quad (x, y) \in D. \quad (9)$$

Здесь $\varphi(\zeta)$ — аналитическая функция относительно комплексной переменной $\zeta \in D_1$, где D_1 — образ области D при отображении $\zeta = x + \lambda_1 y$. Так как решение $u(x, y)$ регулярно в бесконечности, то из (8) и (9) следует, что в окрестности бесконечности функция $\varphi(x + \lambda_1 y)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x + \lambda_1 y)| \leq \frac{c_0}{|x + \lambda_1 y|}, \quad (x, y) \in D,$$

где c_0 — постоянная. Поэтому

$$\varphi(x + \lambda_1 y) = \frac{c_1}{x + \lambda_1 y} + \psi(x + \lambda_1 y), \quad (10)$$

где $\psi(x + \lambda_1 y)$ — аналитическая функция относительно $x + \lambda_1 y$ при $(x, y) \in D$ и удовлетворяет оценке

$$|\psi(x + \lambda_1 y)| \leq \frac{c_2}{|x + \lambda_1 y|^2}, \quad r \geq r_0.$$

Из (7), (9) и (10) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c_1}{x + \lambda_1 y} + \psi(x + \lambda_1 y). \quad (11)$$

Теперь решим уравнение (11) относительно функции $u(x, y)$. Частное решение уравнения (11) определяется формулой

$$u(x, y) = c[\ln(x + \lambda_1 y) - \ln(x + \lambda_2 y)] + \varphi_1(x + \lambda_1 y),$$

где

$$c = \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \varphi_1(x + \lambda_1 y) = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_{x + \lambda_1 y}^{\infty} \psi(\zeta) d\zeta.$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

определяется формулой $u(x, y) = \varphi_2(x + \lambda_2 y)$, где $\varphi_2(\zeta)$ аналитична при $\zeta \in D_2$, где D_2 — образ области D при отображении $\zeta = x + \lambda_2 y$. Следовательно, общее решение уравнения (11) в области D запишется в виде

$$u(x, y) = c \ln \frac{x + \lambda_1 y}{x + \lambda_2 y} + \varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y). \quad (12)$$

Таким образом, общее решение уравнения (1), регулярное в бесконечности, определяется формулой (12), где c — произвольная комплексная постоянная, φ_1 и φ_2 — произвольные аналитические функции, удовлетворяющие оценкам

$$|\varphi_1(x + \lambda_1 y)| \leq \frac{c}{|x + \lambda_1 y|}, \quad |\varphi_2(x + \lambda_2 y)| \leq c_0, \quad r \geq r_0, \quad (13)$$

где c_0 — постоянная.

2) Рассмотрим теперь случай $\text{Im} \lambda_1 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$. Подставляя (9) в (7) с λ_1 вместо λ_2 , получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x + \lambda_1 y), \quad (x, y) \in D, \quad (14)$$

где $\varphi_1 = \varphi$. Общее решение уравнения (14), регулярное в бесконечности, определяется формулой

$$u(x, y) = y\varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_1 y), \quad (x, y) \in D, \quad (15)$$

где $\varphi_2(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция при $\zeta \in D_2$, ограниченная в окрестности бесконечности. Следовательно, в этом случае общее решение уравнения (1), регулярное в бесконечности, определяется формулой (15), где φ_1 и φ_2 удовлетворяют неравенствам (13).

Замечание. Из метода получения формул (12) и (15) следует, что, если решение $u(x, y)$ бесконечно дифференцируемо в замкнутой области $D \cup \Gamma$, то функции $\varphi_1(x + \lambda_1 y)$ и $\varphi_2(x + \lambda_2 y)$ также бесконечно дифференцируемы в этой области.

§2. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА В КРУГЕ

Пусть $D_0 = \{z : |z| < 1\}$ и $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, $z = x + iy$. Рассмотрим следующую краевую задачу Римана–Гильберта : найти аналитические в круге D_0 функции $\psi_0(z)$ и $\psi_1(z)$, бесконечно дифференцируемые в замкнутой области $D_0 \cup \Gamma$ и удовлетворяющие следующим условиям :

$$\text{Re} [b_0(z)\psi_0(z)] = g_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad (16)$$

$$\text{Re} [b_1(z)\psi_1(z)] = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \quad (17)$$

$$\psi'_0(0) + \psi_1(0) = 0, \quad (18)$$

где $b_0(z) = a_0(x, -y)$, $b_1(z) = (x + iy)a_1(x, -y)$, $g_0(z) = f_0(x, -y)$, $g_1(z) = f_1(x, -y)$ и $a_j(x, y)$, $f_j(x, y)$, $j = 0, 1$ – функции, входящие в граничные условия (3) и (4).

Основная цель этого параграфа – получить условие корректности задачи (16) – (18).

Замечание. В следующем параграфе мы покажем, что задача (1), (3), (4) приводится к задаче (16) – (18). Задача (16), (17) без дополнительного условия (18) полностью исследована в монографии [3], где выписан явный вид решений этой задачи.

Пусть n_0 и n_1 – индексы функций $b_0(z)$ и $b_1(z)$ на Γ . Под *индексом* функции $b(z)$ на Γ понимается приращение аргумента $b(z)$, деленное на 2π , когда точка (x, y) обходит контур Γ один раз против часовой стрелки.

Из результатов монографии [3] следует, что задача (16), (17) имеет решение для любых бесконечно дифференцируемых функций $g_0(z)$ и $g_1(z)$ тогда и только тогда, когда

$$n_0 \leq 0, \quad n_1 \leq 0. \quad (19)$$

При выполнении этих условий соответствующие однородные задачи (16) и (17) имеют соответственно $(-2n_0 + 1)$ и $(-2n_1 + 1)$ линейно независимых решений. Здесь и в дальнейшем линейная независимость понимается в поле вещественных чисел. Из результатов [3] следует, что задача (16), (17) для любой заданной пары функций $b_0(z)$ и $b_1(z)$ не является корректной.

Пусть $\omega_0(z)$ и $\omega_1(z)$ – ненулевые решения однородных задач (16) и (17) соответственно при $n_0 = 0$ и $n_1 = 0$. Имеет место следующая

Лемма 1. Для того чтобы задача (16) – (18) была корректной, необходимо и достаточно выполнение условий

$$n_1 = n_0 = 0, \quad (20)$$

$$\operatorname{Im} \frac{\omega'_0(0)}{\omega_1(0)} \neq 0. \quad (21)$$

Доказательство. Из вышеприведенного результата монографии [3] следует, что (19) является необходимым условием корректности задачи (16) – (18). Пусть это условие выполнено. Тогда общее решение однородной задачи (16), (17) запишется в виде (см. [3])

$$\psi_0(z) = \sum_{k=1}^{-2n_0+1} c_k \alpha_k(z), \quad (22)$$

$$\psi_1(z) = \sum_{k=1}^{-2n_1+1} d_k \beta_k(z), \quad (23)$$

где $\alpha_k(z)$, $k = 1, \dots, -2n_0 + 1$ — линейно независимые решения однородной задачи (16), а $\beta_k(z)$, $k = 1, \dots, -2n_1 + 1$ — линейно независимые решения однородной задачи (17); c_k , $k = 1, \dots, -2n_0 + 1$ и d_j , $j = 1, \dots, -2n_1 + 1$ — произвольные вещественные постоянные. Подставляя (22) и (23) в (18) и приравнявая действительные и мнимые части к нулю, получим систему двух уравнений относительно постоянных c_k и d_j . Ясно, что ранг основной матрицы этой системы меньше или равен 2. Поэтому число линейно независимых решений этой системы больше или равно $2(-n_0 - n_1)$. Отсюда и из (19) следует, что для корректности задачи (16) — (18) необходимо выполнение условия (20).

Пусть теперь выполнено условие (20). Тогда общее решение задачи (16), (17) запишется в виде (см. [3])

$$\psi_0(z) = \Phi_0(z) + c_0 \omega_0(z), \quad (24)$$

$$\psi_1(z) = \Phi_1(z) + c_1 \omega_1(z), \quad (25)$$

где $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ — частные решения задачи (16), (17), $\omega_0(z)$ и $\omega_1(z)$ — нетривиальные решения однородной задачи (16), (17), c_0 и c_1 — произвольные вещественные постоянные. В [3] доказано, что внутри единичного круга $\omega_j(z) \neq 0$. Подставляя $\psi_0(z)$ и $\psi_1(z)$ из (24) и (25) в (18), получим

$$c_0 \omega'_0(0) + c_1 \omega_1(0) = -\Phi'_0(0) - \Phi_1(0), \quad (26)$$

и наконец

$$c_0 \frac{\omega'_0(0)}{\omega_1(0)} + c_1 = -\frac{\Phi'_0(0)}{\omega_1(0)} - \frac{\Phi_1(0)}{\omega_1(0)}. \quad (27)$$

Уравнение (27) относительно вещественных чисел c_0, c_1 однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (21). Лемма 1 доказана.

Отметим, что условие (21) не зависит от выбора нетривиальных решений однородной задачи (16), (17).

Покажем, что из условия (20) не следует условие (21), т.е. условия (20) и (21), вообще говоря, независимы.

Пример 1. При $b_0(z) = b_1(z) = 1$ возьмем $\omega_0(z) = \omega_1(z) = i$. Тогда очевидно, что условие (21) не выполняется.

Пример 2. Пусть

$$b_0(z) = \left(1 + \frac{i}{2}z\right)^{-1}, \quad b_1(z) = 1.$$

Для решений $\omega_0(z) = i\left(1 + \frac{i}{2}z\right)$ и $\omega_1(z) = i$ легко видеть, что условие (21) выполняется.

Таким образом, условие (20) необходимо, но не достаточно для корректности задачи (16) – (18).

В работе [4] показано, что любую задачу (16) – (18) можно привести к виду

$$\operatorname{Re} [z^{n_0} \Phi_0^{-1}(z) \psi_0(z)] = g_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad (28)$$

$$\operatorname{Re} [z^{n_1} \Phi_1^{-1}(z) \psi_1(z)] = g_1(z), \quad z \in \Gamma, \quad (29)$$

$$\psi'_0(0) + \psi_1(0) = 0, \quad (30)$$

где n_0 и n_1 – индексы функций $b_0(z)$ и $b_1(z)$ на Γ ; $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$ – аналитические функции в D_0 и

$$\Phi_0(z) \neq 0, \quad \Phi_1(z) \neq 0, \quad \text{при } |z| \leq 1.$$

При $n_0 = n_1 = 0$

$$\psi_0(z) = i\Phi_0(z), \quad \psi_1(z) = i\Phi_1(z)$$

является решением однородной задачи (28), (29). Следовательно, необходимое и достаточное условие корректности задачи (28) – (30) запишется в виде

$$n_0 = n_1 = 0, \quad \operatorname{Im} \frac{\Phi'_0(0)}{\Phi_1(0)} \neq 0.$$

§3. О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1) ВНЕ КРУГА

В этом параграфе задачу (1), (3), (4) приведем к задаче (16) – (18) и сформулируем условие корректности задачи (1), (3), (4). Напомним, что $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$, $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ и λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения (2). Рассмотрим следующие случаи :

$$1) \operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \operatorname{Im} \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Подставляя общее решение (12) в граничные условия (3), (4), получим

$$\operatorname{Re} \left[a_0(x, y)(\varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y)) + c \ln \frac{x + \lambda_1 y}{x + \lambda_2 y} \right] = f_0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [a_1(x, y)((x + \lambda_1 y)\varphi'_1(x + \lambda_1 y) + (x + \lambda_2 y)\varphi'_2(x + \lambda_2 y))] = \\ = f_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (32)$$

Представим $x + \lambda_j y$ в виде

$$x + \lambda_j y = \frac{\lambda_j + i}{2}(z + \mu_j \bar{z}), \quad j = 1, 2, \quad (33)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

$$\mu_j = \frac{i - \lambda_j}{i + \lambda_j}, \quad j = 1, 2. \quad (34)$$

Так как $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, то $|\mu_j| < 1$, $j = 1, 2$. Из (33) имеем

$$x + \lambda_j y = \frac{\lambda_j + i}{2} \left(z + \frac{\mu_j}{z} \right), \quad \text{при } |z| = 1. \quad (35)$$

Обозначим

$$\sigma_j(z) = \varphi_j \left(\frac{\lambda_j + i}{2} \left(z + \frac{\mu_j}{z} \right) \right), \quad j = 1, 2, \quad |z| > 1, \quad (36)$$

$$\Phi_0(z) = \sigma_1(z) + \sigma_2(z) + c \ln \frac{(\lambda_1 + i)(z^2 + \mu_1)}{(\lambda_2 + i)(z^2 + \mu_2)}, \quad |z| > 1, \quad (37)$$

$$\Phi_1(z) = \sum_{j=1}^2 \frac{z^2(z^2 + \mu_j)}{z^2 - \mu_j} \sigma'_j(z), \quad |z| > 1. \quad (38)$$

В обозначениях (35) – (38) краевые условия (31) и (32) запишутся в виде

$$\operatorname{Re} [a_0(z)\Phi_0(z)] = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad (39)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{a_1(z)}{z} \Phi_1(z) \right] = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \quad (40)$$

где $a_j(z) = a_j(x, y)$ и $f_j(z) = f_j(x, y)$, $j = 0, 1$. Из (36) – (38) следует, что функции $\sigma_j(z)$ и $\Phi_{j-1}(z)$, $j = 1, 2$ аналитичны в области D , $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ ограничены в окрестности бесконечности, а $\sigma_1(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Таким образом, задачу (1), (3), (4) свели к системе уравнений (37), (38) относительно функций $\sigma_1(z)$,

$\sigma_2(z)$ и постоянной c , где $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ — общие решения краевой задачи Римана-Гильберта (39), (40) вне D в классе ограниченных аналитических функций.

Решим систему (37), (38) относительно $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$. Из (37) имеем

$$\sigma_2(z) = \Phi_0(z) - \sigma_1(z) - c \ln \frac{(\lambda_1 + i)(z^2 + \mu_1)}{(\lambda_2 + i)(z^2 + \mu_2)}. \quad (41)$$

Подставляя σ_2 из (41) в (38), получим

$$\Phi_1(z) = \frac{2z^4(\mu_2 - \mu_1)}{(z^2 - \mu_1)(z^2 - \mu_2)} \sigma_1'(z) + c \frac{2z^3(\mu_1 - \mu_2)}{(z^2 + \mu_1)(z^2 - \mu_2)} + \frac{z^2(z^2 + \mu_2)}{z^2 - \mu_2} \Phi_0'(z). \quad (42)$$

Так как $|z| \rightarrow \infty$, $\sigma_1(z) \rightarrow 0$, то $\sigma_1'(z) \rightarrow 0$ и $z\sigma_1'(z) \rightarrow 0$. Переходя к пределу в (42) при $|z| \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (\Phi_1(z) - z^2 \Phi_0'(z)) = 0. \quad (43)$$

Умножая обе части (42) на z и переходя к пределу, получим

$$c = \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)} \lim_{|z| \rightarrow \infty} z(\Phi_1(z) - z^2 \Phi_0'(z)). \quad (44)$$

Из (43) следует, что предел

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z(\Phi_1(z) - z^2 \Phi_0'(z))$$

существует. Обозначим

$$\Phi_2(z) = \Phi_1(z) - c \frac{2z^3(\mu_1 - \mu_2)}{(z^2 + \mu_1)(z^2 - \mu_2)} - \frac{z^2(z^2 + \mu_2)}{z^2 - \mu_2} \Phi_0'(z).$$

Пусть выполнены условия (43) и (44). Тогда функция $\Phi_2(z)$ аналитична в области $|z| > 1$ и удовлетворяет неравенству

$$|\Phi_2(z)| \leq \frac{c_0}{|z|^2}, \quad |z| \geq 1,$$

где c_0 — постоянная. Из (42) находим

$$\sigma_1(z) = - \int_z^\infty \frac{(\zeta^2 - \mu_1)(\zeta^2 - \mu_2)}{2(\mu_2 - \mu_1)\zeta^4} \Phi_2(\zeta) d\zeta. \quad (45)$$

Подставляя c и $\sigma_1(z)$ из (44) и (45) в (41), получим $\sigma_2(z)$. Из (36) функция $\varphi_j(x + \lambda_j y)$ определяется через $\sigma_j(z)$:

$$\varphi_j(x + \lambda_j y) = \sigma_j(\gamma_j(x + \lambda_j y)), \quad j = 1, 2,$$

где

$$\gamma_j(\zeta) = \frac{i(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + (\lambda_j + i)^2 \mu_j})}{\lambda_j + i}. \quad (46)$$

Под корнем в (46) понимается та ветвь, которая непрерывна вне отрезка, соединяющего точки $-i(i + \lambda_j)\sqrt{\mu_j}$ и $i(i + \lambda_j)\sqrt{\mu_j}$ и

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\zeta^2 + (\lambda_j + i)^2 \mu_j}}{\zeta} = 1.$$

Обозначим

$$\psi_j(z) = \Phi_j\left(\frac{1}{z}\right), \quad j = 0, 1. \quad (47)$$

Так как $\Phi_j(z)$ аналитична в области $|z| > 1$ и ограничена в окрестности бесконечности, то функция $\psi_j(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$. В задаче (39), (40), (43), делая замену искомых функций по формуле (47), получим задачу (16) – (18).

В обозначениях (47) равенство (44) примет вид

$$c = \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)} [\psi'_1(0) + \psi''_0(0)].$$

Таким образом, задача (1), (3), (4) эквивалентна задаче (16) – (18), причем число линейно независимых решений однородной задачи (1), (3), (4) и задачи (16) – (18) совпадает. Задача (16) – (18) исследована в §2. Из эквивалентности этих задач и леммы 1 получим следующую теорему.

Теорема 1. Для корректности задачи (1), (3), (4) необходимо и достаточно, чтобы имели место следующие условия :

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 1, \quad \operatorname{Im} \frac{\omega'_0(0)}{\omega_1(0)} \neq 0,$$

где m_0 и m_1 – индексы функций $a_0(z)$ и $a_1(z)$ на контуре Γ , а $\omega_0(z)$ и $\omega_1(z)$ – функции, входящие в условие (21).

2) Пусть $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Подставляя общее решение (15) в граничное условие (3), (4), получим

$$\operatorname{Re} [a_0(x, y)(y\varphi_1(x + \lambda_1 y) + \varphi_2(x + \lambda_2 y))] = f_0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [a_1(x, y)(y\varphi_1(x + \lambda_1 y) + y(x + \lambda_1 y)\varphi_1'(x + \lambda_1 y) + (x + \lambda_1 y)\varphi_2'(x + \lambda_1 y))] = \\ = f_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (49)$$

Так как $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, то

$$y = \left(z - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{2i}, \quad \text{при } |z| = 1. \quad (50)$$

Обозначим

$$\sigma_j(z) = \varphi_j \left(\frac{\lambda_j + i}{2} \left(z + \frac{\mu_1}{z} \right) \right), \quad j = 1, 2, \quad |z| > 1, \quad (51)$$

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \sigma_1(z) + \sigma_2(z), \quad |z| > 1, \quad (52)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2i}(z^2 - 1)\sigma_1(z) + \frac{1}{2i} \frac{z(z^2 + \mu_1)\sigma_1'(z)}{z^2 - \mu_1}(z^2 - 1) + \frac{z^2(z^2 + \mu_1)}{z^2 - \mu_1}\sigma_2'(z), \quad |z| > 1, \quad (53)$$

где μ_1 определяется формулой (34). В обозначениях (51) – (53) условия (48) и (49) запишутся в виде

$$\operatorname{Re} [a_0(z)\Phi_0(z)] = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad (54)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{a_1(z)}{z} \Phi_1(z) \right] = f_1(z), \quad z \in \Gamma. \quad (55)$$

Из (52) и (53) следует, что функции $\sigma_j(z)$ и $\Phi_{j-1}(z)$, $j = 1, 2$ аналитичны в области $|z| > 1$, $\sigma_2(z)$ ограничена в окрестности бесконечности, а $\sigma_1(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Из (52) имеем

$$\sigma_2(z) = \Phi_0(z) - \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \sigma_1(z), \quad |z| > 1. \quad (56)$$

Подставляя $\sigma_2(z)$ из (56) в (53), получим

$$\Phi_1(z) = \frac{z^2(1 + \mu_1)i}{z^2 - \mu_1} \sigma_1(z) + \frac{z^2(z^2 + \mu_1)}{z^2 - \mu_1} \Phi_0'(z). \quad (57)$$

Следовательно, $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ аналитичны в области $|z| > 1$ и ограничены в окрестности бесконечности. Переходя к пределу в (57) при $|z| \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (\Phi_1(z) - z^2 \Phi_0'(z)) = 0. \quad (58)$$

Пусть выполнено условие (58). Обозначим

$$\Phi_2(z) = \Phi_1(z) - \frac{z^2(z^2 + \mu_1)}{z^2 - \mu_1} \Phi'_0(z).$$

Из (58) для функции $\Phi_2(z)$ получим оценку

$$|\Phi_2(z)| \leq \frac{c_0}{|z|}, \quad |z| \geq 1, \quad (59)$$

где c_0 — постоянная. Из (56) и (57) функции $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ единственным образом выражаются через $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$. Из (51) имеем

$$\varphi_j(x + \lambda_1 y) = \sigma_j(\gamma_1(x + \lambda_1 y)), \quad j = 1, 2,$$

где $\gamma_1(\zeta)$ определяется формулой (46). Делая в (54), (55) и (58) замену (47), получим задачу (16) — (18). Применяя лемму 1, получим следующее утверждение :
В случае 2) Теорема 1 остается верной.

§4. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (1) ВНЕ ЭЛЛИПСА

Пусть

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} > 1 \right\},$$

а Γ — эллипс

$$\Gamma = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 \right\}, \quad p \geq q > 0. \quad (60)$$

Рассмотрим задачу (1), (3), (4) в области D . Используя замену $x = p\xi$, $y = q\eta$, эту задачу приводим к следующей задаче вне круга :

$$\frac{A_0}{p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{A_1}{pq} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{A_2}{q^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad |\zeta| > 1, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (61)$$

$$\operatorname{Re} [a_0(p\xi, q\eta)u(\xi, \eta)] = f_0(p\xi, q\eta), \quad |\zeta| = 1, \quad (62)$$

$$\operatorname{Re} \left[a_1(p\xi, q\eta) \left(\frac{\xi}{p^2} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\eta}{q^2} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \right] = \sqrt{\frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\eta^2}{q^2}} f_1(p\xi, q\eta), \quad |\zeta| = 1. \quad (63)$$

Исследование задачи (61) — (63) не отличается от задачи (1), (3), (4), поэтому приведем только результаты.

Пусть $\delta_0(z)$ и $\delta_1(z)$ – нетривиальные решения однородной задачи (16) – (18)

при

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 1, \quad g_0(z) = g_1(z) \equiv 0,$$

$$b_0(z) = a_0(px, -qy), \quad b_1(z) = (x + iy)a_1(px, -qy).$$

Напомним, что m_0 и m_1 – индексы функций $a_0(x, y)$ и $a_1(x, y)$ на Γ .

Теорема 2. Для корректности задачи (1), (3), (4) вне эллипса (60) необходимо и достаточно выполнение условия

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 1, \quad \operatorname{Im} \frac{\delta'_0(0)}{\delta_1(0)} \neq 0.$$

§5. ЗАДАЧА В КРУГЕ

Здесь мы рассмотрим задачу (1), (3), (4) в круге, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = i$, т.е. для уравнения Бицадзе :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad |z| < 1, \quad (64)$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Общее решение уравнения (64) в круге $|z| < 1$ определяется (см. [1]) формулой

$$u(x, y) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z), \quad (65)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – произвольные аналитические функции в этом круге. Подставляя общее решение (65) в (3), (4), получим

$$\operatorname{Re} [a_0(z)(\varphi(z) + \bar{z}\psi(z))] = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad (66)$$

$$\operatorname{Re} [a_1(z)(z\varphi'(z) + \bar{z}\psi(z) + \psi'(z))] = -f_1(z), \quad z \in \Gamma, \quad (67)$$

где $a_j(z) = a_j(x, y)$, $f_j(z) = f_j(x, y)$, $j = 0, 1$. Обозначим

$$\Phi_0(z) = z\varphi(z) + \psi(z), \quad (68)$$

$$\Phi_1(z) = z^2\varphi'(z) + \psi(z) + z\psi'(z). \quad (69)$$

В данных обозначениях условия (66) и (67) запишутся в виде

$$\operatorname{Re} \left[\frac{a_0(z)}{z} \Phi_0(z) \right] = f_0(z), \quad z \in \Gamma, \quad (70)$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{a_1(z)}{z} \Phi_1(z) \right] = -f_1(z), \quad z \in \Gamma. \quad (71)$$

Таким образом, задача (64), (3), (4) приводится к системе уравнений (68), (69), где $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ – общие решения задачи Римана–Гильберта (70), (71). Теперь решим систему (68), (69) относительно $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Из (68) имеем

$$\psi(z) = \Phi_0(z) - z\varphi(z). \quad (72)$$

Подставляя $\psi(z)$ из (72) в (69), получим

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) - 2z\varphi(z) + z\Phi'_0(z), \quad |z| < 1. \quad (73)$$

Подставляя в (73) $z = 0$, получим

$$\Phi_1(0) - \Phi_0(0) = 0. \quad (74)$$

Пусть выполнено условие (74). Тогда из (72) и (73) однозначным образом определим функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ через $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$. Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна задаче Римана–Гильберта (70), (71), (74). Исследование последней задачи не отличается от исследования задачи (16) – (18). Поэтому здесь приведем только результат.

Пусть $\beta_0(z)$ и $\beta_1(z)$ – нетривиальные решения однородной задачи (70), (71) при $m_0 = m_1 = 1$, где m_j – индекс функции $a_j(z)$ на Γ , $j = 0, 1$.

Лемма 2. Для того чтобы задача (70), (71), (74) была корректной, необходимо и достаточно выполнение условий

$$m_0 = m_1 = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} \frac{\beta_0(0)}{\beta_1(0)} \neq 0. \quad (75)$$

Следствие. Для того чтобы задача (64), (3), (4) была корректной, необходимо и достаточно выполнение условий (75).

Из полученных результатов следует, что корректность задачи Римана–Гильберта для неправильно эллиптического уравнения (1) вне круга и эллипса

не зависит от коэффициентов этого уравнения, а зависит только от функций $a_0(x, y)$ и $a_1(x, y)$, входящих в граничные условия (3), (4).

Результаты данного параграфа показывают, что условия корректности задачи Римана-Гильберта вне круга и внутри существенно отличаются друг от друга. Вопрос о справедливости полученных нами результатов для уравнения Бицадзе в круге остается открытым для неправильно эллиптических уравнений.

ABSTRACT. The paper deals with the improper elliptic equation

$$A_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D$$

with boundary conditions

$$\operatorname{Re} (a_0(x, y)u(x, y)) = f_0(x, y), \quad \operatorname{Re} \left(a_1(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial N} \right) = f_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

where $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$ and Γ is the boundary of D .

We obtain necessary and sufficient conditions for correctness of this problem. An effective method of solution of this problem is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Бицадзе, Уравнения Математической Физики, Наука, Москва, 1976.
2. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scient., Singapore, 1994.
3. Н. И. Мухелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Наука, Москва, 1968.
4. И. Н. Векуа, Обобщенные Аналитические Функции, Физматгиз, Москва, 1959.

21 апреля 1995

Ереванский инженерный университет,
Мелитопольский педагогический институт, Украина