О СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ОДНОГО КЛАССА КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ф. Э. Мелик–Адамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 3, 1995

В работе рассматривается оператор типа $W^*(r)\,J\,\dfrac{d}{dr}(W(r)\,x(r,\lambda))$, где $W(r)$ – $(2n\times 2n)$–матрица–функция, W^* – матрица, сопряженная с W, J – $(2n\times 2n)$–матрица такая, что $J^* = -J = J^{-1}$. Важное понятие акселеранты матрицы–функции было предложено М. Г. Крейном, который дал необходимые и достаточные условия для того, чтобы матричная мера была спектральной мерой акселеранты. Основной результат выглядит так : для любой акселеранты существуют оператор $W^*(r)\,J\,\dfrac{d}{dr}(W(r)\,x(r,\lambda))$ и начальное самосопряженное условие, при которых множество спектральных функций совпадает с множеством спектральных мер акселеранты.

1. Пусть $H(t)$, $t\in(-2N,2N)$ – эрмитова суммируемая $(n\times n)$–матричная функция (м–функция) такая, что $H^*(t)=H(-t)$; $H\in L^1_{n\times n}(-2N,2N)$. Она определяет в пространстве $L^2_{n\times l}(0,2N)$ ограниченный самосопряженный оператор

$$(\mathbf{H}f)(t)=\int_0^{2N} H(t-s)\,f(s)\,ds.$$

Рассмотрим м–функцию $\Pi(t)$, связанную с $H(t)$ равенством

$$\Pi(t)=-\frac{1}{2}|t|\,I_k-\int_0^t (t-s)\,H(s)\,ds,\quad \Pi(t)=\Pi^*(-t);\quad t\in(-2N,2N),\tag{1}$$

где I_n – единичная $(n\times n)$–матрица.

Это равносильно тому, что $\Pi(t)$ имеет абсолютно непрерывную производную в интервалах $(-2N,0)$, $(0,2N)$ и $\Pi'(\pm 0)=\mp\frac{1}{2}I_n$, $\Pi''(t)=-H(t)$ почти всюду. Для этих м–функций эквивалентны следующие два условия :

1) оператор $\mathbf{I}+\mathbf{H}$ неотрицателен, т.е.

$$\int_0^{2N} g^*(t)\,g(t)\,dt+\int_0^{2N}\int_0^{2N} g^*(t)\,H(t-s)\,g(s)\,ds\,dt\geq 0,\quad g\in L^2_{n\times l}(0,2N);$$

2) ядро $K(t,s) = \Pi(t-s) - \Pi(t) - \Pi^*(s)$ неотрицательно определенное :

$$\int_0^{2N}\int_0^{2N} f^*(t)\,K(t,s)\,f(s)\,ds\,dt \geq 0, \quad f\in C_{n\times l}[0,2N].$$

Это следует из равенства

$$\int_0^{2N}\int_0^{2N} f^*(t)K(t,s)f(s)dsdt = \int_0^{2N} g^*(t)g(t)dt + \int_0^{2N}\int_0^{2N} g^*(t)H(t-s)g(s)dsdt,$$

где

$$g(t) = \int_t^{2N} f(s)\,ds.$$

м–функция $H(t)$ называется акселерантой, если выполнено условие 1).

Условие 2) выполняется тогда и только тогда, когда функция $\Pi(t)$ допускает представление (см. [1])

$$\Pi(t) = -\beta + i\alpha t + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i\lambda t} - 1 - \frac{i\lambda t}{1+\lambda^2}\right)\frac{\Sigma(\lambda)}{\lambda^2}, \qquad -\infty<\lambda<\infty, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \geq 0$ – $(n\times n)$-эрмитовы матрицы и $\Sigma(\lambda)$ – неубывающая матричная мера на $\mathbb{R}^1$ удовлтворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\Sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty. \tag{3}$$

Отсюда ясно, что справедливо также представление

$$K(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(e^{i\lambda t}-1\right)\left(e^{-i\lambda s}-1\right)}{\lambda^2}\,d\Sigma(\lambda).$$

Следовательно

$$\int_0^{2N} g^*(t)\,g(t)\,dt + \int_0^{2N}\int_0^{2N} g^*(t)\,H(t-s)\,g(s)\,ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^{2N} e^{-i\lambda t}\,g(t)\,dt\right)^* d\Sigma(\lambda)\left(\int_0^{2N} e^{-i\lambda s}\,g(s)\,ds\right).$$

Матричная мера $\Sigma(\lambda)$ называется спектральной мерой акселеранты $H(t)$.

Следующее утверждение принадлежит М. Г. Крейну [1].

Утверждение 1. *Матричная мера $\Sigma(\lambda)$, удовлетворяющая условию (3), является спектральной мерой некоторой акселеранты тогда и только тогда, когда м-функция $\Pi(t)$, определенная равенством (2), допускает представление (1). При этом акселерантой является функция $H(t) = -\Pi''(t)$.*

В работе [2] было показано, что м–функция $H(t)$ является акселерантой тогда и только тогда, когда существует R–матричная функция $iF(z)$, допускающая представление

$$F(z) = I + 2\int_0^{2N} H(t)\, e^{izt}\, dt + e^{2izn}\,\Psi(z), \qquad z \in C_+,$$

где $\Psi(z)$ – голоморфная в верхней полуплоскости м–функция, допускающая внутри угла $|\pi/2 - \arg z| < \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ оценку $|\Psi(z)| = O(|z|)$ при $|z| \to \infty$. При этом в представлении R–функции $iF(z)$

$$iF(z) = \alpha + \beta z - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda + z} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right) d\Sigma(\lambda), \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

матричная мера $\Sigma(\lambda)$ является спектральной мерой акселеранты $H(t)$.

В [2] было дано описание м–функций $F(z)$, а следовательно и спектральных мер акселеранты $H(t)$, в виде дробно–линейного преобразования м–функций из $H^{\infty}_{n\times n}(C_+)$. Матрица этого преобрзования определяется с помощью ядер $R^{\pm}_{2N}(t,s)$ операторов $\mathbf{I} + \mathbf{H}^{\pm}$:

$$R^{\pm}_{2N}(t,s) + \int_0^{2N} H^{\pm}(t-u)\, R^{\pm}_{2N}(u,s)\, du = H^{\pm}(t-s),$$

$$R^{\pm}_{2N}(t,s) + \int_0^{2N} R^{\pm}_{2N}(t,u)\, H^{\pm}(u-s)\, du = H^{\pm}(t-s),$$

где $H^+(t) = H(t)$, а $H^-(t)$ так называемая дуальная акселеранта, однозначно определяющаяся акселерантой $H(t)$.

2. С акселерантой связаны различные классы канонических дифференциальных уравнений и операторов. Рассмотрим каноническое уравнение

$$J\frac{dx(r,\lambda)}{dr} - V(r)\,x(r,\lambda) = \lambda x(r,\lambda), \quad 0 < r < N, \quad J^* = -J = J^{-1}, \tag{4}$$

где $V(r) = V^*(r), V \in L^1_{2N\times 2N}(0,\rho)\,(\rho < N)$ – эрмитовый локально–суммируемый потенциал. Уравнению (4) мы ставим в соответствие локально–суммируемую акселеранту, множество спектральных мер которой совпадает с множеством спектральных функций оператора, порожденного дифференциальным уравнением (4) (см. [3]).

В [4] и [5] заданной акселеранте ставятся в соответствие два различные канонические уравнения. В [4] таким является каноническое уравнение с гамильтонианом

$$J\,\frac{dx(r,\lambda)}{dr} = \lambda H(r)\cdot x(r,\lambda). \tag{5}$$

Однако в [5], по–видимому, рассмотрено более адекватное дифференциальное уравнение

$$W^*(r)\,J\,\frac{d}{dr}\,(W(r)\,x(r,\lambda)) = \lambda\,x(r,\lambda), \qquad W^*(r)\,J\,W(r) = J; \quad 0 < r < N. \tag{6}$$

Уравнение (6) является промежуточным относительно (4) и (5), в том смысле, что при $H(r) = J\,W(r)\,W^*(r)\,J$ уравнение (5) сводится к (6). В свою очередь, уравнение (6) при абсолютно непрерывном $W(r)$ сводится к уравнению (4).

Уравнение вида (6) характеризуется тем свойством, что матричное решение $U(r,\lambda)$ этого уравнения удовлетворяет тождеству

$$\frac{d}{dr}\,(U^*(r,\overline{\mu})\,J\,U(r,\lambda)) = (\lambda-\mu)\,U^*(r,\overline{\mu})\,U(r,\lambda). \tag{7}$$

Обратно, любая м–функция $U(r,\lambda)$, удовлетворяющая тождеству (7), является матричным решением уравнения (6) при $W(r) = U^*(r,0)\,J$.

Пусть задана акселеранта $H(t)$, $t \in (-2N, 2N)$. Перейдем к построению м–функции $U(r,\lambda)$, удовлетворяющей тождеству (7). В его основу положен следующий результат работы [5].

Пусть задана м–функция $\Gamma \in L^1_{n\times n}(0,\infty)$, порождающая по формуле

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty \Gamma(t+s)\,f(s)\,ds, \qquad f \in L^2_{n\times l}(0,\infty).$$

сжимающий ганкелев оператор Γ ($\|\Gamma\| < 1$) в пространстве $L^2_{n\times l}(0,\infty)$. Определим $(2n\times 2n)$–матрицу–функцию $K(r,t)$ из уравнения

$$K^*(r,t) - \int_r^\infty \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t+s) \\ \Gamma(t+s) & 0 \end{bmatrix} K^*(r,s)\,ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*(t+r) \\ \Gamma(t+r) & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < r < t < \infty. \tag{8}$$

Тогда м-функция

$$U(r,\lambda) = U_0(r,\lambda) + \int_r^\infty K(r,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt, \qquad U_0(r,\lambda) = \exp(-\lambda\, Jt)$$

удовлетворяет тождеству (7).

Положим $\Gamma_{2r}(t) = \Gamma(2r+t)$, $(0 < t < \infty)$ и через $K_{2r}(t,s) = K^*_{2r}(s,t)$ обозначим резольвентное ядро оператора $I - \Gamma^\Delta_{2r}$, где ганкелев оператор Γ^Δ_{2r} порожден $(2n \times 2n)$–матрицей–функцией

$$\Gamma^\Delta_{2r} = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma^*_{2r}(t) \\ \Gamma_{2r}(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} K_{2r}(t,s) - \int_0^\infty \Gamma^\Delta_{2r}(t+u)\, K_{2r}(u,s)\, du &= \Gamma^\Delta_{2r}(t+s), \\ K_{2r}(t,s) - \int_0^\infty K_{2r}(t,u)\, \Gamma^\Delta_{2r}(u+s)\, du &= \Gamma^\Delta_{2r}(t+s). \end{aligned} \tag{9}$$

Легко видеть, что м–функция $K(r,t)$ из (8) представляется в виде $K(r,t) = K_{2r}(0, t-r)$, $r < t < \infty$. Отсюда для м–функции $U(r,\lambda)$ получаем

$$U(r,\lambda) = \left(I + \int_0^\infty K_{2r}(0,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt\right) U_0(r,\lambda). \tag{10}$$

В частности, если м–функция $\Gamma(t)$ $2N$–финитна ($\Gamma(t) = 0$ при $t > 2N$), то имеем

$$K_{2r}(0,t) - \int_0^{2N-2r-1} K_{2r}(0,t)\, \Gamma^\Delta_{2r}(u+t)\, du = \Gamma^\Delta_{2r}(t),$$

$$U(r,\lambda) = \left(I + \int_0^{2N-2r} K_{2r}(0,t)\, U_0(t,\lambda)\, dt\right) U_0(r,\lambda), \quad 0 < r < N.$$

3. В этом пункте мы докажем утверждения об акселерантах из $L_{n\times n}(-2N, 2N)$.

Утверждение 2. *Формулы (11) и (14) устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством м–функций* $\Gamma \in L^1_{n\times n}(0, 2N)$, *порождающих сжимающие ганкелевы операторы и множеством пар дуальных акселерант* $H^\pm \in L^1_{n\times n}(-2N, 2N)$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \in L^1_{n\times n}(0, 2N)$ – м–функция, удовлетворяющая нашим предположениям. Следуя работе [2], построим м–функцию $C(t) = \Gamma(2N-t)$,

$(0 < t < 2N)$ и рассмотрим операторы C_{2r}, действующие в пространствах $L^2_{n\times l}(0, 2r)$ по формуле

$$(\mathbf{C}_{2r} f)(t) = \int_0^t C(t-s) f(s)\, ds, \quad 0 < t < 2r < 2N.$$

Легко проверить соотношение

$$\Gamma_{2r} = \mathbf{U}_{2N-2r} \mathbf{C}_{2N-2r}, \quad 0 < t < 2r < 2N, \tag{11}$$

где U_a – оператор "зеркального отражения" в пространстве $L^2_{n\times l}(0, a)$:

$$(\mathbf{U}_a f)(t) = f(a - t).$$

Определим теперь м–функции $H^{\pm}(t)$, как решения уравнений Вольтерра

$$C(t) + \int_0^t C(t-s) H^{+}(s)\, ds + H^{+}(t) = 0, \quad 0 < t < 2N, \tag{12_+}$$

$$C(t) + \int_0^t C(t-s) H^{-}(s)\, ds - H^{-}(t) = 0, \quad 0 < t < 2N, \tag{12_-}$$

и введем операторы

$$(\widetilde{\mathbf{H}}^{\pm}_{2r} f)(t) = \int_0^t H^{\pm}(t-s) f(s)\, ds. \tag{13}$$

Теперь соотношения $(12_{\pm})$ можно представить в виде

$$\mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}_{2r} = (\mathbf{I} \pm \mathbf{C}_{2r})^{-1}(\mathbf{I} \mp \mathbf{C}_{2r}) = (\mathbf{I} \pm \mathbf{C}_{2r})(\mathbf{I} \mp \mathbf{C}_{2r})^{-1}. \tag{14}$$

Следовательно, вместе с $(12_{\pm})$ справедливы также равенства

$$C(t) + \int_0^t H^{+}(t-s) C(s)\, ds + H^{+}(t) = 0, \tag{$12'_+$}$$

$$C(t) + \int_0^t H^{-}(t-s) C(s)\, ds - H^{-}(t) = 0. \tag{$12'_-$}$$

Продолжив $H^{\pm}(t)$ на $(-2N, 0)$ эрмитовым образом $(H(t) = H^*(-t))$, имеем

$$\mathrm{Re}(\mathbf{I} + 2\widetilde{\mathbf{H}}^{\pm}_{2r}) = \mathbf{I} + \mathbf{H}^{\pm}_{2r} = (\mathbf{I} \pm \mathbf{C}^*_{2r})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^*_{2r}\, \mathbf{C}_{2r})(\mathbf{I} \pm \mathbf{C}_{2r})^{-1}, \quad 0 < r < N,$$

где оператор $\mathbf{H}_{2r}$ действует по формуле

$$(\widetilde{\mathbf{H}}^{\pm}_{2r} f)(t) = \int_0^{2r} H^{\pm}(t-s) f(s)\, ds, \quad f \in L^2_{n\times l}(0, 2r); \quad r \le N.$$

Отсюда и из (11) следует эквивалентность условий $\|\Gamma\| < 1$, $\|\mathbf{C}_{2N}\| < 1$ и $\mathbf{I} + \mathbf{H}^{\pm}_{2N} > 0$. Учитывая обратимость приведенных построений приходим к утверждению.

Замечание 1. Обозначив в (12_+) $H^+(t) = H(t)$, мы можем решить это уравнение относительно $C(t)$. Используя $C(t)$ в (12_-) найдем дуальную акселеранту $H^-(t)$. Этот порядок действия можно обратить.

Обозначим через $R^\pm_{2r}(t,s) = (R^\pm_{2r}(s,t))^*$ резольвентные ядра операторов $\mathbf{I}+\mathbf{H}^\pm_{2r}$:

$$\begin{aligned} &R^\pm_{2r}(t,s) + \int_0^{2r} H^\pm(t-u)\, R^\pm_{2r}(u,s)\, du = H^\pm(t-s), \\ &R^\pm_{2r}(t,s) + \int_0^{2r} R^\pm_{2r}(t,u)\, H^\pm(u-s)\, du = H^\pm(t-s), \end{aligned} \tag{15}$$

и выявим связь между м–функциями $K_{2p}(t,0)$ и $R^\pm_{2N-2r}(t,0)$. В силу (11) имеем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{2N-2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & -\Gamma^*_{2r} \\ -\Gamma_{2r} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{2N-2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}^*_{2N-2r} \\ \mathbf{C}_{2N-2r} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

так, что в силу (10), $K_{2r}(t,0)$ можно определить из уравнения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}^*_{2N-2r} \\ \mathbf{C}_{2N-2r} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{2N-2r} \end{bmatrix} K_{2r}(t,0) = \begin{bmatrix} 0 & C^*(2N-2r-t) \\ C(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Записав это уравнение в виде

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}-\mathbf{C}^*_{2N-2r} & \mathbf{I}+\mathbf{C}^*_{2N-2r} \\ \mathbf{I}-\mathbf{C}_{2N-2r} & -(\mathbf{I}-\mathbf{C}_{2N-2r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{U}_{2N-2r} \\ \mathbf{I} & \mathbf{U}_{2N-2r} \end{bmatrix} K_{2r}(t,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & C^*(2N-2r-t) \\ C(t) & 0 \end{bmatrix}$$

и применив к обеим частям оператор

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I}+\mathbf{C}^*_{2N-2r})^{-1} & (\mathbf{I}+\mathbf{C}^*_{2N-2r})^{-1} \\ (\mathbf{I}-\mathbf{C}^*_{2N-2r} & -(\mathbf{I}-\mathbf{C}_{2N-2r})^{-1} \end{bmatrix},$$

получим

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{H}^+_u & 0 \\ 0 & \mathbf{I}+\mathbf{H}^-_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{U}_u \\ \mathbf{I} & \mathbf{U}_u \end{bmatrix} K_{2r}(t,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{I}+\mathbf{C}^*_u)^{-1}\, C(t) & (\mathbf{I}+\mathbf{C}^*_u)^{-1}\, C^*(u-t) \\ -(\mathbf{I}-\mathbf{C}^*_u)^{-1}\, C(t) & -(\mathbf{I}-\mathbf{C}_u)^{-1}\, C^*(u-t) \end{bmatrix},$$

где $u = 2N-2r$.

Из $(12_\pm)$ следует, что $(\mathbf{I} \pm \mathbf{C}_{2N-2r})^{-1}\, C(t) = \mp H^\pm(t)$. Из уравнения $(12'_\pm)$ получаем

$$C^*(2N-2r-t) + \int_t^{2N} C^*(s-t)\,(H^\pm(2N-2r-t))^*\, ds \pm (H^\pm(2N-2r-t))^* = 0.$$

Таким образом, $(\mathbf{I} \pm \mathbf{C}^*_{2N-2r})^{-1} C^*(2N-2r-t) = \pm(H^{\pm}(2N-2r-t))^*$. Отсюда

$$K_{2r}(t,0) = -\frac{1}{2}\times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{U}_{2N-2r} \\ \mathbf{I} & \mathbf{U}_{2N-2r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}+\mathbf{H}^+)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{I}+\mathbf{H}^-)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^+(t) & (H^+(2N-2r-t))^* \\ H^-(t) & -(H^-(2N-2r-t))^* \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} R^+_u(t,0) + R^-_u(t,0) & R^+_u(t,u) - R^-_u(t,u) \\ R^+_u(u-t,0) - R^-_u(u-t,0) & R^+_u(u-t,u) + R^-_u(u-t,u) \end{bmatrix}, \quad u = 2N-2r.$$

Рассмотрим теперь м–функцию $\widetilde{U}(r,\lambda) = U(N-r,-\lambda)\,U_0(N,\lambda)$. Она вместе с $U(r,\lambda)$ удовлетворяет тождеству (7) и следовательно является матрицантом некоторого канонического уравнения вида (6). Учитывая выражение (10) и эрмитовость ядер $K_{2r}(t,s)$ и $R^{\pm}_{2r}(t,s)$, получим

$$\widetilde{U}(r,\lambda) = U_0(r,\lambda) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2r} \begin{bmatrix} R^+_{2r}(0,t) + R^-_{2r}(0,t) & R^+_{2r}(0,2r-t) - R^-_{2r}(0,2r-t) \\ R^+_{2r}(2r,t) - R^-_{2r}(2r,t) & R^+_{2r}(2r,2r-t) + R^-_{2r}(2r,2r-t) \end{bmatrix} U_0(r-t,\lambda)\,dt. \tag{16}$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению :

Утверждение 3. *Каждая акселеранта $H \in L_{n\times n}(-2N,2N)$ порождает в интервале $(0,N)$ каноническое уравнение вида (6) с матрицантом вида (16).*

Замечание 2. Как следует из (16), замена акселеранты $H(t) = H^+(t)$ на $H(t) = H^-(t)$ (см. замечание 1) приводит $\widetilde{U}(r,\lambda)$ к $J\,\widetilde{U}(r,\lambda)\,J$ и следовательно, м–функцию $W(r)$ из (6) приводит к $J\,W(r)\,J$.

4. В этом пункте мы описываем связь между спектральными мерами акселеранты $H(t)$ и спектральными функциями операторв, порожденных дифференциальным выражением

$$(\mathbf{D}x)(r) = W^*(r)J\,\frac{d}{dr}(W(r)x(r)), \qquad W^*(r)\,J\,W(r) = J; \quad 0 < r < N.$$

Пусть $\mathbf{D}$ – оператор, определенный этим выражением на многообразии N–финитных вектор–функций $x(r) \in L^2_{2n\times l}(0,N)$ $((W(r)\,x(r))' \in L^2_{2n\times l}(0,N))$, которые в нуле удовлетворяют некоторому самосопряженному граничному условию. Известно (см., например, [6]), что такие граничные условия задаются в виде $\mathbf{P}x(0) = x(0)$, где $\mathbf{P}$ – ортопроектор в C^{2n}, проектирующий на J–нейтральное гипермаксимальное подпространство $\mathbf{P}C^{2n}$ $(\mathbf{JP}+\mathbf{PJ}=\mathbf{J})$. Не умаляя общности можо рассмотреть случай, когда

$$\mathbf{P}_+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим уравнение

$$W^*(r)J\frac{d}{dr}(W(r)x(r)) - \lambda x(r,\lambda) = f(r),$$

где $f(r)$ – N-финитная функция из $L^2_{2n\times l}(0,N)$. Ясно, что

$$x(r,\lambda) = \widetilde{U}(r,\lambda)J\int_r^N \widetilde{U}^*(s,\lambda)\,f(s)\,ds, \qquad f(s) = \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{bmatrix}$$

является N-финитным решением этого уравнения. Поэтому $x(r,\lambda)$ будет принадлежать области определения оператора $\mathbf{D}$ тогда и только тогда, когда

$$0 = (\mathbf{I}-\mathbf{P})x(0,\lambda) = (\mathbf{I}-\mathbf{P})J\int_0^N \widetilde{U}^*(s,\lambda)\,f(s)\,ds = J\mathbf{P}\int_0^N \widetilde{U}^*(s,\lambda)\,f(s)\,ds.$$

Таким образом, выражение

$$\Phi_\Delta(f,\lambda) = P\int_0^N \widetilde{U}^*(s,\lambda)\,f(s)\,ds = \begin{bmatrix} \Phi(f,\lambda) \\ \Phi(f,\lambda) \end{bmatrix}$$

является направляющим функционалом для оператора $\mathbf{D}$ (см. [1]). Подставляя сюда значение $\widetilde{U}^*(r,\lambda)$ из (16) и проведя соответсвующие замены переменных и порядка интегрирования, получаем для $\Phi(f,\lambda)$ представление

$$\Phi(f,\lambda) = \int_0^N e^{i\lambda t}\left[f_1(t) - \int_t^N \left(R^+_{2r}(r-t,0)\,f_1(r) + R^+_{2r}(r-t,2r)\,f_2(r)\right)\,dr\right]dt +$$
$$+\int_0^N e^{-i\lambda t}\left[f_2(t) - \int_t^N \left(R^+_{2r}(r+t,0)\,f_1(r) + R^+_{2r}(r+t,2r)\,f_2(r)\right)\,dr\right]dt.$$

Рассмотрим вольтерровы операторы

$$(\mathbf{R}f)(r) = \int_0^r R(r,t)\,f(t)\,dt \quad \text{и} \quad (\mathbf{R}^*f)(t) = \int_t^N (R^*(r,t))^*\,f(r)\,dr,$$

где

$$R^*(r,t) = \begin{bmatrix} R^+_{2r}(r-t,0) & R^+_{2r}(r-t,2r) \\ R^+_{2r}(r+t,0) & R^+_{2r}(r+t,2r) \end{bmatrix}, \qquad r>t$$

Обозначив $E^*(r,\lambda) = \left[e^{i\lambda r}I_n, e^{-i\lambda r}I_n\right]$, получим следующее представление для направляющего функционала $\Phi(f,\lambda)$:

$$\Phi(f,\lambda) = \int_0^N E^*(t,\lambda)(\mathbf{I}-\mathbf{R}^*)\,f(t)\,dt.$$

Пусть теперь $\Sigma(\lambda)$ есть спектральная функция оператора $\mathbf{D}$. Используя метод направляющих функционалов М. Г. Крейна (см. [1]), получим

$$(f,f)=\int_0^N \begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix} dt=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^*(f,\lambda)\,d\Sigma(\lambda)\,\Phi(f,\lambda).$$

Положив $f=(\mathbf{I}-\mathbf{R}^*)^{-1}g$ и

$$\widetilde{g}(t)=\begin{cases} g_1(N-t) & \text{при} \quad 0<t<N\\ g_2(t-N) & \text{при} \quad N<t<2N\end{cases} \qquad \left(g(t)=\begin{bmatrix} g_1(t)\\ g_2(t)\end{bmatrix}\right),$$

получим

$$\Phi(f,\lambda)=\int_0^N E^*(t,\lambda)\,g(t)\,dt=$$

$$=\int_0^N \left(e^{i\lambda t}g_1(t)+e^{-i\lambda t}g_2(t)\right)dt=e^{i\lambda N}\int_0^{2N} e^{-i\lambda t}\widetilde{g}(t)\,dt.$$

С другой стороны, $(f,f)=((\mathbf{I}+\widehat{\mathbf{H}}g,g)$, где $\mathbf{I}+\widehat{\mathbf{H}}=(\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}^*)^{-1}$. $(2n\times 2n)$-матричное ядро $\widehat{H}(r,t)$ оператора $\widehat{\mathbf{H}}$ определяется уравнением

$$\widehat{H}(r,t)=R^*(r,t)+\int_0^r \widehat{H}(u,t)\,R^*(r,u)\,du, \qquad r>t.$$

Заметим, что (15) можно преобразовать к виду

$$\begin{bmatrix} R^+_{2r}(r-t,0) & R^+_{2r}(r-t,2r)\\ R^+_{2r}(r+t,0) & R^+_{2r}(r+t,2r)\end{bmatrix}+$$

$$+\int_0^r \begin{bmatrix} H(u-t) & H(-u-t)\\ H(u+t) & H(-u+t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^+_{2r}(r-u,0) & R^+_{2r}(r-u,2r)\\ R^+_{2r}(r+u,0) & R^+_{2r}(r+u,2r)\end{bmatrix}du=$$

$$=\begin{bmatrix} H(r-t) & H(-r-t)\\ H(r+t) & H(-r+t)\end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\widehat{H}(r,t)=\begin{bmatrix} H(r-t) & H(-r-t)\\ H(r+t) & H(-r+t)\end{bmatrix}$$

и, следовательно, получаем

$$((\mathbf{I}+\widehat{\mathbf{H}}g,g)=$$

$$=\int_0^N \begin{bmatrix} g_1(t)\\ g_2(t)\end{bmatrix}^*\left(\begin{bmatrix} g_1(t)\\ g_2(t)\end{bmatrix}+\int_0^N \begin{bmatrix} H(u-t) & H(-u-t)\\ H(u+t) & H(-u+t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1(u)\\ g_2(u)\end{bmatrix}du\right)dt=$$

$$=(\widetilde{g},\widetilde{g})+\int_0^{2N}\int_0^{2N}\widetilde{g}^*(t)H(t-u)\,\widetilde{g}(u)\,du\,dt.$$

Таким образом, для спектральной функции $\Sigma(\lambda)$ оператора $\mathbf{D}$ окончательно получаем соотношение

$$(\widetilde{g},\widetilde{g})+\int_0^{2N}\int_0^{2N}\widetilde{g}^*(t)H(t-u)\,\widetilde{g}(u)\,du\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{2N}\widetilde{g}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right)^* d\Sigma(\lambda)\left(\int_0^{2N}\widetilde{g}(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\right).$$

Это соотношение определяет матричную меру акселеранты $H(t)$. Итак справедливо

Утверждение 4. *Множество спектральных функций $\Sigma(\lambda)$ оператора* D *совпадает с множеством спектральных мер соответствующей акселеранты $H(t)$.*

Из утверждений 1 и 2 следует необходимое и достаточное условие для того, чтобы матричная мера $\Sigma(\lambda)$ была спектральной функцией оператора D. Если задана спектральная функция $\Sigma(\lambda)$, то с помощью (16) можно построить матрицант $\widetilde{U}(r,\lambda)$ и, следовательно, оператор D.

ABSTRACT. The present paper considers operator of the type $W^*(r)J\times \times\frac{d}{dr}(W(r)\,z(r,\lambda))$, where $W(r)$ is an $(2n\times 2n)$–matrix–function, W^* is the matrix adjoint to W, J is a $(2n\times 2n)$–matrix such that $J^*=-J=J^{-1}$. An important concept of an accelerant of a matrix–function was proposed by M. G. Krein who gave necessary and sufficient conditions for a matrix measure to be a spectral measure of an accelerant. The main result is as follows : For each accelerant there exists an operator $W^*(r)\,J\,\frac{d}{dr}(W(r)\,z(r,\lambda))$ and an initial selfadjoint condition for which the set of spectral functions coincides with the set of spectral measures of the accelerant.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, "Про эрмітові оператори з напрямними функционалами", Збірник праць математики АН УССР, т. 10, стр. 83 — 105, 1948.
2. М. Г. Крейн, Ф. Э. Мелик–Адамян, "Матрично-континуальные аналоги задач Шура и Каратеодори–Теплица", Изв. АН АрмССР, т. 21, № 2, стр. 107 – 141, 1986.
3. Ф. Э. Мелик–Адамаян, "К теории матричных акселерант и спектральных матричных функций канонических дифференциальных систем, ДАН Арм ССР, т. 15, № 4, стр. 145 — 151, 1967.
4. M. G. Krein and Heinz Langer, "On some continuation problems which are closely related to the theory of operators in space $\prod_{\infty}$," IV Journal of Operator Theory, vol. 13, pp. 299 — 417, 1985.
5. Ф. Э. Мелик–Адамян, "Об одном классе канонических дифференциальных операторов", Изв. АН АрмССР, т. 24, № 6, стр. 570 – 592, 1989.
6. Ф. Э. Мелик–Адамян, "О канонических дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве", Изв. АН АрмССР, т. 12, № 1, стр.. 10 — 31, 1977.

20 апреля 1995 Ереванский государственный университет