КАТЕГОРИИ БИНАРОВ
И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

С. Г. Далалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 3, 1995

Определяются категории бинаров $\mathcal{C}^T$ типа T и с помощью забывающего функтора и процедуры вспоминания строятся инъективные функторы $\mathcal{F}(D,\mathcal{C}^T) e \mathcal{F}(D,\mathcal{C})^T$ для произвольной категории $\mathcal{C}$ и предкатегории D. При некоторых ограничениях на тип T или категорию $\mathcal{C}$ эти функторы обратимые.

1. а) Рассматривается категория $\mathcal{C}$ с конечными произведениями. Это означает, что для любых объектов A_0 и A_1 однозначно определены объект $P = A_0 \times A_1$ и морфизмы–проекции Pp_0A_0 и Pp_1A_1. Эта совокупность называется произведением A_0 и A_1, если она удовлетворяет условию универсальности : для каждой пары морфизмов Ww_0A_0 и Ww_1A_1 существует единственный морфизм $W < w_0, w_1 > P$ такой, что $< w_0, w_1 > p_i = w_i$ $(i = 1, 2)$.

б) Для любого семейства объектов A_i, $i = 0, 1, ..., n$ и произвольной последовательности $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ первых n натуральных чисел по индукции можно определить объект P^α и проекции $P^\alpha p_i^\alpha A_i$, удовлетворяющие аналогичному свойству универсальности, которые представляют произведение данного семейства объектов, отвечающее перестановке α. Рассмотрим подпоследовательности $\beta = (\beta_1, ..., \beta_k)$ и $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_l)$, составленные из членов последовательности α, соответственно меньших α_n и больших α_n, с тем же порядком β_i и γ_i, что и в α. Построим произведения $(P^\beta p_i^\beta A_i,\ i = 0, 1, ..., \alpha_n - 1)$, $(P^\gamma p_i^\gamma A_i,\ i = \alpha_n, ..., n)$ и $(P^\alpha p_\beta^\alpha P^\beta, P^\alpha p_\gamma^\alpha P^\gamma)$. Определим

$$p_i^\alpha = \begin{cases} p_\beta^\alpha p_i^\beta, & \text{если} \quad i < \alpha_n \\ p_\gamma^\alpha p_i^\gamma, & \text{если} \quad i \geq \alpha_n. \end{cases}$$

Согласно свойству универсальности, для любого семейства морфизмов Ww_iA_i $(i = 0, 1, ..., n)$ существует единственный морфизм $W < w_0, ..., w_n >_\alpha P^\alpha$ такой, что $< w_0, ..., w_n >_\alpha p_i^\alpha = w_i$, $i = 0, 1, ..., n$.

Обозначим $(f_0 \times f_1 \times ... \times f_n)_\alpha =< p_o f_0, p_1 f_1, ..., p_n f_n >_\alpha$ для произвольного семейства морфизмов $A_i f_i B_i$, $i = 0, 1, ..., n$.

в) По свойству универсальности для произвольных двух перестановок α и δ первых n натуральных чисел существует единственный изоморфизм $P^\alpha a_\delta^\alpha P^\delta$, удовлетрворяющий равенствам $a_\delta^\alpha p_i^\delta = p_i^\alpha$ (ассоциирующий изоморфизм).

г) Пусть $A_i = A$ при всех $i = 0, 1, ..., n$. Существует единственный изоморфизм $P^\alpha t_\varphi P^\alpha$ при любой биекции индексов φ, определяемый условиями $t_\varphi p_i^\alpha =$ $= p_{i\varphi}$ (переставляющий изоморфизм). В частности, если $n = 1$, имеем единственный нетождественный перетсавляющий изоморфизм $t =< p_1, p_0 >$.

2. а) Пусть $(Pp_iA,\ i = 0, 1)$ – квадрат объекта A. Всякий морфизм $P\mu A$ называется бинарной операцией на A, а пара (A, μ) – бинаром.

б) В конструкции 1.б) положим $A_i = A$ для всех i. Определим $P^\alpha \mu^\alpha A$ рекуррентно :

$$\mu^\alpha = \left((P_\beta^\alpha \mu^\beta) \times (P_\gamma^\alpha \mu^\gamma) \right) \mu.$$

При $n = 2$, α может быть $(1, 2)$ или $(2, 1)$. Соответственно, $\mu^{(1,2)} = (1 \times \mu)\mu$ и $\mu^{(2,1)} = (\mu \times 1)\mu$, где $1 = 1_A$ – тождественный морфизм объекта A. Операция μ называется ассоциативной, если

$$(1 \times \mu)\,\mu = a\,(\mu \times 1)\,\mu,$$

где a – соответсвующий ассоциирующий изоморфизм. Это определение уточняет определение [1] (см. также [4]).

Из ассоциативности бинарной операции μ следует, что $a_\delta^\alpha \mu^\delta = \mu^\alpha$ при всех перестановках α и δ первых n натуральных чисел (свойство обобщенной ассоциативности).

в) С каждой бинарной операцией μ объекта A сопряжена бинарная операция $\overline{\mu} = t\mu$, где t – переставляющий изоморфизм. Бинарная операция, совпадающая со своей сопряженной, называется коммутативной.

г) Морфизм $A\theta B$ называется постоянным, если $u\theta = v\theta$ для произвольных морфизмов WuA и WvA.

Объект F называется финальным или терминальным, если для любого объекта A существует единственный морфизм $Aq^A F$ в объект F. Все финальные объекты категории изоморфны.

Предположим, что категория имеет финальный объект F. Тогда морфизмы, которые пропускаются через F, будут постоянными. Обратно, постоянный морфизм $A\theta B$ пропускается через финальный объект, если существует морфизм из F в A. Такие морфизмы из F в A называются точками или элементами объекта A.

д) Постоянный морфизм $A\theta B$ называется нейтральным эндоморфизмом операции μ, если

$$< 1, \theta > \mu = 1 =< \theta, 1 > \mu.$$

Бинарная операция μ может иметь не более одного нейтрального эндоморфизма. В случае его существования μ называется нейтробинарной (или унитарной) операцией, а пара (A, μ) – нейтробинаром.

е) В категории с финальным объектом F нейтральный эндоморфизм θ бинарной операции μ объекта A существует, если существуют нейтральная точка $F\varepsilon A$, определяемая условиями

$$(1 \times \varepsilon)\mu = p_1, \qquad (\varepsilon \times 1)\mu = p_2.$$

Нейтральным эндоморфизмом будет композиция $\theta = q^A\varepsilon$. Обратно, для нейтробинарной операции μ нейтральную точку можно определить равенством $\varepsilon = \tau\theta$, если существует хотя бы одна точка $F\tau A$. Таким образом, в категории с финальным объектом задание нейтральной структуры на бинаре (A, μ) с помощью нейтрального эндоморфизма и нейтрального элемента равносильно, если A имеет хотя бы одну точку.

ж) Морфизм $A\omega A$ называется обращающим морфизмом нейтробинарной операции μ, если

$$< 1, \omega > \mu = \theta =< \omega, 1 > \mu.$$

Обращающий морфизм инволюнтен и обладает свойствами

$$\theta\omega = \theta, \qquad \mu\omega = t\,(\omega \times \omega)\,\mu.$$

Ассоциативная нейтробинарная операция μ может иметь не более одного обращающего морфизма. Если нейтробинарная операция μ обладает единственным обращающим морфизмом,то ее будем называть инверсобинарной, а соответствующую пару (A, μ) – инверсобинаром.

з) Типом бинара (A, μ) – а также операции μ – назовем четверку чисел $T = (T_1, T_2, T_3, T_4)$, где $T_i = 0$ или 1 : если для μ выполнено условие ассоциативности, $T_1 = 1$; коммутативности, $T_2 = 1$; нейтробинарности, $T_3 = 1$; инверсобинарности, $T_4 = 1$; в остальных случаях $T_i = 0$. Поскольку T_4 может равняться единице только при $T_3 = 1$, получаем 12 различных типов бинаров. Например, тип $T = (1, 0, 1, 0)$ соответствует ассоциативным нейтробинарам или, иначе говоря, полугруппам с единицей. Тип $T = (1, 1, 1, 1)$ соответствует ассоциативно-коммутативным инверсобинарам, т.е. абелевым группам.

3. а) Морфизм из бинара (A, μ) в бинар (B, ν) (бинароморфизм или б–морфизм) есть морфизм $A\varphi B$ основной категории C такой, что $(\varphi \times \varphi)\nu = \mu\varphi$.

Если бинарные операции μ и ν обладают нейтральными морфизмами θ_μ и θ_ν, будем говорить, что φ является нейтробинароморфизмом (нб–морфизмом), если $\theta_\mu\varphi = \varphi\theta_\nu$.

Если μ и ν обладают к тому же однозначно определенными обращающими морфизмами ω_μ и ω_ν, будем говорить, что φ является инверсобинароморфизмом (иб–морфизмом), если $\omega_\mu\varphi = \varphi\omega_\nu$.

б) Справедливы следующие утверждения.

(i) Для любого бинара (A, μ) тождественный морфизм 1_A является b–морфизмом из (A, μ) в (A, μ). Кроме того 1_A есть нб–морфизм (иб–морфизм), если μ имеет нейтральный (соответственно, обращяющий) морфизм.

(ii) Композиция б–морфизмов (нб–, иб–морфизмов) $(A, \mu)\varphi(B, \nu)$ и $(B, \nu)\psi(C, \kappa)$ есть b–морфизм (соответственно, нб– или иб–морфизм).

(iii) Нейтральный морфизм $A\theta A$ бинара (A, μ) есть нб–морфизм. Кроме того, этот морфизм является иб–морфизмом, если μ имеет обращающий морфизм.

в) Определим категорию $\mathcal{C}^T$ бинаров типа T (или T–бинаров), объектами которой служат бинары типа T, а морфизмами – б–морфизмы или нб–морфизмы (если $T_3 = 1$) и иб–морфизмы (если $T_4 = 1$). Имеем следующую иерархию этих категорий (см. рис. 1) :

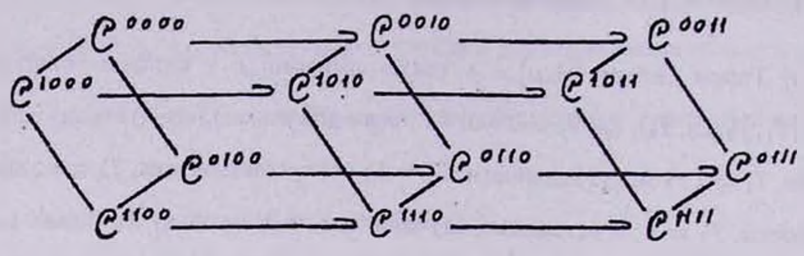

рис. 1. Знак $\hookrightarrow$ означает подкатегорию, а — означает полную подкатегорию.

г) Перечислим следующие свойства категорий бинаров.

(i) Всякий б–морфизм ассоциативных инверсобинаров является иб–морфизмом.

(ii) Мономорфность (эпиморфность, биморфность) $A\varphi B$ является достаточным условием мономорфности (соотв. эпиморфности, биморфности) бинароморфизма $(A, \mu)\varphi(B, \nu)$, а изоморфность $A\varphi B$ – необходимым и достаточным условием изоморфности бинароморфизма φ.

(iii) При $T_3 = 1$ $\mathcal{C}^T$ является категорией с системой нулевых морфизмов (см. [2])

$$(A, \mu)\theta^{\mu}_{\nu}(B, \nu), \qquad \theta^{\mu}_{\nu} = \varphi\theta_{\nu} = \theta_{\mu}\varphi,$$

если для каждой пары объектов A и B существует морфизм $A\varphi B$ категории $\mathcal{C}$.

(iv) Если F – финальный объект категории $\mathcal{C}$, то $(F1_FF, F1_FF)$ – квадрат объекта F и на F существует единственная бинарная операция 1_F, причем $(F, 1_F)$ – инверсобинар. Он является нулевым (одновременно финальным и кофинальным) объектом категории $\mathcal{C}^T$ при любом T.

(v) $\mathcal{C}^T$ - категория с конечными произведениями (напомним, что $\mathcal{C}$ – такая же категория). Для определения произведения объектов (A, μ) и (B, ν) в категории $\mathcal{C}^T$ достаточно наделить произведение $A \times B$ объектов A и B в $\mathcal{C}$ бинарной операцией $(\mu \times \nu)_b = b(\mu \times \nu)$, где b – композиция подходящих сочетающих и переставляющего изоморфизмов. Заметим, что проекции p_A и p_B при этом будут морфизмами категории $\mathcal{C}^T$.

4. а) В дальнейших конструкциях некоторые требования в определениях категории и функтора излишни. Избавившись от них, мы введем более общие понятия предкатегории и предфунктора. Для предкатегории мы не будем требовать выполнения условий существования композиции морфизмов (следовательно, ассоциативности композиции), а также тождественных морфизмов. Понятие предфунктора мы получим, отбросив в определении функтора требования на образы композиции и образы тождественных морфизмов. Таким образом, предфунктор – это просто пара отображений для совокупностей объектов и для совокупностей морфизмов. Кроме того, мы вынуждены отказаться от требования, чтобы совокупности объектов и совокупности морфизмов [пред]категории образовывали классы, чтобы иметь возможность рассматривать [пред]категории [пред]функторов из одной [пред]категории в другую ([3]).

б) Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – произвольные предкатегории. Морфизм $\varphi u \psi$ из предфунктора $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ в предфунктор $\mathcal{D}\psi\mathcal{C}$ определяется как система морфизмов

$$(X\varphi)\, u_X\, (X\psi), \qquad X \in Ob\mathcal{D},$$

которые при любом морфизме XfY из $\mathcal{D}$ удовлетворяют условиям

$$f_\varphi u_Y = u_X f_\psi, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{и} \quad \psi \quad \text{ковариантны},$$

$$f^\varphi u_X = u_Y f^\psi, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{и} \quad \psi \quad \text{контравариантны}.$$

Точно так же определяется морфизм (естественное преобразование) функторов.

в) Предкатегории $\mathrm{Pref}_*(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ ковариантных и $\mathrm{Pref}^*(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ контравариантных предфункторов из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$ определяются, если взять в качестве

(i) объектов все предфункторы соответствующего типа из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$,

(ii) морфизмов все морфизмы предфункторов рассматриваемого типа.

Если $\mathcal{C}$ – категория, $\mathrm{Pref}_*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ и $\mathrm{Pref}^*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ превращаются в категории. Если морфизм предфункторов $\psi v \chi$ задается системой морфизмов $(X\psi)\, v_X\, (X\chi)$, $X \in Ob\mathcal{D}$, композиция $\varphi\,(uv)\,\chi$ задается системой морфизмов

$$X\varphi\,(uv)_X\, X\chi = (X\varphi)\, u_X v_X\, (X\chi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Тождественный морфизм $\varphi 1_\varphi \varphi$ определеяется как система тождественных морфизмов

$$X\varphi\,(1_\varphi)_X\, X\varphi = (X\varphi)\, 1_{X\varphi}\, (X\varphi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ являются категориями. По аналогии можно построить категории $\mathrm{Funct}_*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ ковариантных и $\mathrm{Funct}^*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ контравариантных функторов из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{C}$. Они являются полными подкатегориями соответственно предкатегорий $\mathrm{Pref}_*(\mathcal{D},\mathcal{C})$ и $\mathrm{Pref}^*(\mathcal{D},\mathcal{C})$.

Далее будем писать $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$, где под $\mathcal{F}$ понимается Pref_*, Pref^*, Funct_* или Funct^*, причем последние две возможности реализуются только в случае, когда $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ – категории.

г) Финальный объект F предкатегории $\mathcal{C}$ определяется точно так же, как в случае категории. Каждому финальному объекту F предкатегории $\mathcal{C}$ соответствует финальный объект $\tau = \tau_F$ предкатегории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$: функтор $\mathcal{D}\tau\mathcal{C}$ объекту X из $\mathcal{D}$ сопоставляет $X\tau = F$, а морфизму XfY – тождественный морфизм $q^F = 1_F$. Так определяемый предфунктор является функтором в случае, когда $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$ – категории. Он одновременно ковариантен и контравариантен.

Для каждого предфунктора $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ систаема морфизмов

$$(X\varphi)\, q^{X\varphi} F, \qquad X \in Ob\mathcal{D}$$

удовлетворяет следующим условиям при всех XfY из $\mathcal{D}$:

$$f_\varphi\,(q^\varphi)_Y = f_\varphi q^{Y\varphi} = q^{X\varphi} = (q^\varphi)_X\, f_\tau \qquad \text{– в ковариантном случае,}$$

$$f^\varphi\,(q^\varphi)_X = f^\varphi q^{X\varphi} = q^{Y\varphi} = (q^\varphi)_Y\, f^\tau \qquad \text{– в контравариантном случае.}$$

Следовательно, эта система морфизмов задает морфизм $\varphi q^{\varphi} r$. Единственность такого морфизма следует из однозначной определенности морфизмов $(X\varphi)\, q^{X\varphi} F$, $X \in Ob\mathcal{D}$.

д) Если $\mathcal{C}$ – категория с конечными произведениями, то существует ассоциированная структура конечного произведения на $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$.

Для произвольных объектов $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}\psi\mathcal{C}$ категории $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ определим объект $\mathcal{D}(\varphi \times \psi)\mathcal{C}$ следующим образом. Для любого объекта X предкатегории $\mathcal{D}$

$$X(\varphi \times \psi) = X\varphi \times X\psi.$$

Для любого морфизма XfY

$$f_{\varphi\times\psi} = f_{\varphi} \times f_{\psi} \qquad \text{– в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi\times\psi} = f^{\varphi} \times f^{\psi} \qquad \text{– в контравариантном случае.}$$

Если $\mathcal{D}$ – категория и φ, ψ – функторы, то и $\varphi \times \psi$ – функтор. Например, в ковариантном случае для произвольных морфизмов XfY и YgZ категории $\mathcal{D}$ имеем

$$(fg)_{\varphi\times\psi} = (fg)_{\varphi} \times (fg)_{\psi} = f_{\varphi}g_{\varphi} \times f_{\psi}g_{\psi} = (f_{\varphi} \times f_{\psi})(g_{\varphi} \times g_{\psi}) = f_{\varphi\times\psi}g_{\varphi\times\psi}$$

и для тождественного морфизма 1_X категории $\mathcal{D}$

$$(1_X)_{\varphi\times\psi} = (1_X)_{\varphi} \times (1_X)_{\psi} = 1_{x\varphi} \times 1_{X\psi} = 1_{X\varphi\times X\psi} = 1_{X(\varphi\times\psi)}.$$

Аналогичные соотношения выполняются в контравариантном случае.

Проекции $(\varphi \times \psi)p_{\varphi}\varphi$ и $(\varphi \times \psi)p_{\psi}\psi$ задаются ситемами

$$(p_{\varphi})_X = p_{X\varphi} \qquad \text{и} \qquad (p_{\psi})_X = p_{X\psi}, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Для любого морфизма XfY категории $\mathcal{D}$ они удовлетворяют следующим условиям :

$$f_{\varphi\times\psi}\,(p_{\varphi})_Y = (p_{\varphi})_X\, f_{\varphi}, \qquad f_{\varphi\times\psi}\,(p_{\psi})_Y = (p_{\psi})_X\, f_{\psi} \quad \text{– в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi\times\psi}\,(p_{\varphi})_X = (p_{\varphi})_Y\, f^{\varphi},\ f^{\varphi\times\psi}\,(p_{\psi})_X = (p_{\psi})_Y\, f^{\psi} \quad \text{– в контравариантном случае.}$$

Проверим универсальность $(\varphi \times \psi, p_\varphi, p_\psi)$. Для морфизмов $\chi u \varphi$ и $\chi v \psi$ категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ морфизм $\chi < u, v > \varphi \times \psi$ определяется как система морфизмов

$$< u, v >_X = < u_X, v_X >, \qquad X \in Ob\mathcal{D},$$

согласованная со всеми морфизмами XfY из $\mathcal{D}$:

$$f_\chi < u, v >_Y = < u, v >_X f_{\varphi \times \psi} \qquad \text{– в ковариантном случае,}$$

$$f^\chi < u, v >_X = < u, v >_Y f^{\varphi \times \psi} \qquad \text{– в контравариантном случае.}$$

Согласно определению $< u_X, v_X >$, равенства

$$< u, v > p_\varphi = u, \qquad < u, v > p_\psi = v$$

эквивалентны, соответственно, системам равенств

$$< u, v >_X (p_\varphi)_X = u_X, \qquad < u, v >_X (p_\psi)_X = v_X, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Единственность морфизма $\chi w (\varphi \times \psi)$, удовлетворяющего равенствам $wp_\varphi = u$, $wp_\psi = v$, иначе говоря системам равенств

$$w_X p_{X\varphi} = u_X, \qquad w_X p_{X\psi} = v_X, \qquad X \in Ob\mathcal{D},$$

следует из единственности $w_X = < u_X, v_X >$.

В дальнейшем, если $\mathcal{C}$ – категория с конечными произведениями, считаем, что $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ – категория с индуцированными конечными произведениями.

5. Ковариантный забывающий функтор c из $\mathcal{C}^T$ в $\mathcal{C}$

(i) объекту (A, μ) из $\mathcal{C}^T$ сопоставляет объект A из $\mathcal{C}$,

(ii) морфизму $(A, \mu)g(B, \nu)$ сопоставляет морфизм AgB.

Он индуцирует ковариантные забывающие функторы $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)c\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ переводящие

(i) объект $\widetilde{\varphi}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$ в объект $\varphi = \widetilde{\varphi}c$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$,

(ii) морфизм $\widetilde{\varphi} w \widetilde{\psi}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$ в морфизм $\varphi w_c \psi$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, задаваемый системой морфизмов

$$(X\varphi)\, w_X\, (X\psi), \qquad X \in Ob\mathcal{D},$$

т.е. $w_c = w$.

6. а) Пусть $\mathcal{C}$ – категория с конечными произведениями, $\mathcal{D}$ – предкатегория, $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ – категория с индуцированными конечными произведениями.
Бинарная операция $(\varphi\times\varphi)\,\mu_\varphi\varphi$ на объекте $\mathcal{D}\varphi\mathcal{C}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$ есть система морфизмов

$$X\,(\varphi\times\varphi)\,(\mu_\varphi)_X\,X\varphi=(X\varphi\times X\varphi)\,\mu_{X\varphi}X\varphi,\qquad X\in Ob\mathcal{D},$$

согласованных с морфизмами XfY из $\mathcal{D}$, т.е. удовлетворяющих условиям

$$f_{\varphi\times\varphi}\,(\mu_\varphi)_Y=(\mu_\varphi)_X\,f_\varphi,\qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^{\varphi\times\varphi}\,(\mu_\varphi)_X=(\mu_\varphi)_Y\,f^\varphi,\qquad \text{в контравариантном случае,}$$

или с учетом того, что $f_{\varphi\times\varphi}=f_\varphi\times f_\varphi$, $f^{\varphi\times\varphi}=f^\varphi\times f^\varphi$, в эквивалентном виде, условиям

$$(f_\varphi\times f_\varphi)\,(\mu_\varphi)_Y=(\mu_\varphi)_X\,f_\varphi,\qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$(f^\varphi\times f^\varphi)\,(\mu_\varphi)_X=(\mu_\varphi)_Y\,f^\varphi,\qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Последние суть условия бинароморфности f_φ и f^φ относительно бинарных операций $\mu_{X\varphi}$ и $\mu_{Y\varphi}$.

На основании вышесказанного можно сделать следующий важный

Вывод. Каждому объекту $\widetilde{\varphi}$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ сопоставляется бинарная операция μ_φ объекта $\varphi=\widetilde{\varphi}c$ из $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})$. Следовательно, существует естественное отображение из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ в $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^0$, которое отображает $\widetilde{\varphi}$ в (φ,μ_φ) (заметим, что $0=(0,0,0,0)$). Обратное отображение из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^0$ в $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ определяется следующим образом. Для любого элемента (φ,μ_φ) из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^0$ соответсвующий элемент $\widetilde{\varphi}$ из $Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^0)$ определяется условиями

(i) $X\widetilde{\varphi}=\big(X\varphi,(\mu_\varphi)_X\big)$ для объектов X из $\mathcal{D}$,

(ii) $f_{\widetilde{\varphi}}=f_\varphi$ или $f^{\widetilde{\varphi}}=f^\varphi$ для морфизмов XfY из $\mathcal{D}$.

б) Ассоциативность бинарной операции μ_φ, т.е.

$$(1_\varphi\times\mu_\varphi)\,\mu_\varphi=a\,(\mu_\varphi\times 1_\varphi)\,\mu_\varphi$$

означает ассоциативность бинарных операций $\mu_{X\varphi}$

$$(1_{X\varphi}\times\mu_{X\varphi})\,\mu_{X\varphi}=a_{X\varphi}\,(\mu_{X\varphi}\times 1_{X\varphi})\,\mu_{X\varphi},\qquad X\in Ob\mathcal{D}.$$

Аналогично коммутативность $t\mu_\varphi = \mu_\varphi$ операции μ_φ суть коммутативность всех $\mu_{X\varphi}$:

$$t_{X\varphi}\mu_{X\varphi} = \mu_{X\varphi}, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Поэтому вывод остается верным, если тип 0 заменить произвольным типом T с $T_3 = T_4 = 0$.

в) Нейтральный эндоморфизм θ_φ операции μ_φ задается системой эндоморфизмов категории $\mathcal{C}$

$$(X\varphi)\,(\theta_\varphi)_X\,(X\varphi) = (X\varphi)\,\theta_{X\varphi}\,(X\varphi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D},$$

согласованных с морфизмами XfY категории $\mathcal{D}$:

$$f_\varphi \theta_{Y\varphi} = \theta_{X\varphi} f_\varphi, \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^\varphi \theta_{X\varphi} = \theta_{Y\varphi} f^\varphi, \qquad \text{в контравариантном случае.}$$

Нейтральный эндоморфизм θ_φ должен быть постоянным морфизмом категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, т.е. для любых морфизмов $\psi u \varphi$ и $\psi v \varphi$ этой категории должно выполняться равенство $u\theta_\varphi = v\theta_\varphi$. Другими словами, для произвольных двух систем морфизмов

$$(X\psi)\,u_X\,(X\varphi)\,, \qquad (X\psi)\,v_X\,(X\varphi)\,, \qquad X \in Ob\mathcal{D},$$

согласованных с морфизмами XfY категории $\mathcal{D}$:

$$f_\psi u_Y = u_X f_\varphi, \quad f_\psi v_Y = v_X f_\varphi, \qquad \text{в ковариантном случае,}$$

$$f^\psi u_X = u_Y f^\varphi, \quad f^\psi v_X = v_Y f^\varphi, \qquad \text{в контравариантном случае}$$

должны иметь $u_X \theta_{X\varphi} = v_X \theta_{X\varphi}$.

Последние условия выполняются, если все $\theta_{X\varphi}$ – постоянные морфизмы категории $\mathcal{C}$. Следовательно, в этом случае θ_φ – постоянный морфизм. Вопрос о правильности обратного утверждения "если θ_φ – постоянный морфизм категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, то $\theta_{X\varphi}$ – постоянные морфизмы категории $\mathcal{C}$ для всех $X \in Ob\mathcal{D}$" остается открытым.

Условие нейтральности эндоморфизма θ_φ

$$< 1_\varphi, \theta_\varphi > \mu_\varphi = 1_\varphi =< \theta_\varphi, 1_\varphi > \mu_\varphi$$

эквивалентно условию : для всех $X \in Ob\mathcal{D}$

$$< 1_{X\varphi}, \theta_{X\varphi} > \mu_{X\varphi} = 1_{X\varphi} =< \theta_{X\varphi}, 1_{X\varphi} > \mu_{X\varphi},$$

т.е. все $\theta_{X\varphi}$ – нейтральные морфизмы.

Таким образом, только первое отображение в выводе существует для типов T с $T_3 = 1$.

г) Обратное отображение вывода для типа T с $T_3 = 1$ существует в предположении, что $\mathcal{C}$ – категория с финальным объектом и все ее объекты имеют хотя бы одну точку.

Действительно, если F – финальный объект категории $\mathcal{C}$ и τ – соответсвующий ему финальный объект категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, то условия

$$(1_\varphi \times \varepsilon_\varphi)\,\mu_\varphi = p_1, \qquad (\varepsilon_\varphi \times 1_\varphi)\,\mu_\varphi = p_2,$$

определяющие нейтральный элемент $\tau\varepsilon_\varphi\varphi$ бинарной операции μ_φ, эквивалентны условиям

$$(1_{X\varphi} \times \varepsilon_{X\varphi})\,\mu_{X\varphi} = p_1, \qquad (\varepsilon_{X\varphi} \times 1_{X\varphi})\,\mu_{X\varphi} = p_2, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Это означает, что для любого $X \in Ob\mathcal{D}$, $F\varepsilon_{X\varphi}X\varphi$ – нейтральный элемент операции $\mu_{X\varphi}$.

Пусть (φ, μ_φ) – объект категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$ с $T_3 = 1$. По нейтральному эндоморфизму θ_φ операции μ_φ и произвольной системе точек $Fs_{X\varphi}(X\varphi)$, где $X \in Ob\mathcal{D}$, строится нейтральная точка $\tau\varepsilon\varphi$ операции μ_φ как система композиций $\varepsilon_{X\varphi} = s_{X\varphi}(\theta_\varphi)_X$, $X \in Ob\mathcal{D}$. Эта система согласована с морфизмами XfY из $\mathcal{D}$, поскольку в ковариантном случае

$$\varepsilon_{X\varphi} f_\varphi = s_{X\varphi}\theta_{X\varphi} f_\varphi = s_{X\varphi} f_\varphi \theta_{Y\varphi} = s_{Y\varphi}\theta_{Y\varphi} = f_\tau \varepsilon_{Y\varphi}.$$

Аналогичные равенства верны в контравариантном случае. Согласно 2 е) имеем

$$\varepsilon_{X\varphi}\theta_{X\varphi} = s_{X\varphi}\theta_{X\varphi}\theta_{X\varphi} = s_{X\varphi}(\theta\theta)_{X\varphi} = s_{X\varphi}\theta_{X\varphi} = \varepsilon_{X\varphi}, \qquad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Поэтому $\varepsilon = \varepsilon\theta$. Следовательно, ε – нейтральная точка. Согласно 6 г), для любого $X \in Ob\mathcal{D}$ точки $\varepsilon_{X\varphi}$ – нейтральные. Следовательно, согласно 2 е), для операции $\mu_{X\varphi}$ нейтральны эндоморфизмы $\theta_{X\varphi} = q^{X\varphi}\varepsilon_{X\varphi}$.

д) Обращающий морфизм $\varphi\omega_\varphi\varphi$ нейтробинарной операции μ_φ определяемый условием

$$< 1_\varphi, \omega_\varphi > \mu_\varphi = \theta_\varphi =< \omega_\varphi, 1_\varphi > \mu_\varphi,$$

есть система обращающих морфизмов $(\omega_\varphi)_X = \omega_{X\varphi}$ нейтробинарных операций $(\mu_\varphi)_X = \mu_{X\varphi}$ объектов $X\varphi$, $X \in Ob\mathcal{D}$, согласованных с морфизмами XfY категории $\mathcal{D}$:

$$\omega_{X\varphi} f_\varphi = f_\varphi \omega_{Y\varphi}, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{ковариантно},$$

$$f^\varphi \omega_{X\varphi} = \omega_{Y\varphi} f^\varphi, \quad \text{если} \quad \varphi \quad \text{контравариантно}.$$

Поэтому в отображениях вывода тип 0 можно заменить общим типом T в предположении, что для $T_3 = 1$ объекты категории $\mathcal{C}$ имеют хотя бы одну точку.

7. а) Условия согласованности морфизма $\varphi w \psi$ категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$ с бинарными операциями μ_φ, μ_ψ, а также с нейтральными эндоморфизмами θ_φ, θ_ψ и обращающими эндоморфизмами ω_φ, ω_ψ этих операций (в случае их существования) :

$$(w \times w)\mu_\psi = \mu_\varphi w, \qquad w\theta_\psi = \theta_\varphi w, \qquad w\omega_\psi = \omega_\varphi w$$

соотв. эквивалентны условиям согласованности морфизмов $(X\varphi)\, w_X\, (X\psi)$ категории $\mathcal{C}$ с бинарными операциями $\mu_{X\varphi}$, $\mu_{X\psi}$, их нейтральными $\theta_{X\varphi}$, $\theta_{X\psi}$ и обращающими эндоморфизмами $\omega_{X\varphi}$, $\omega_{X\psi}$ (при условии их существования) :

$$(w_X \times w_X)\mu_{X\psi} = \mu_{X\varphi} w_X, \quad w_X \theta_{X\psi} = \theta_{X\varphi} w_X, \quad w_X \omega_{X\psi} = \omega_{X\varphi} w_X, \quad X \in Ob\mathcal{D}.$$

Поэтому, если w – морфизм категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$, то сопоставляемый ему морфизм w_c принадлежит категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$. Обратно, если $T_3 = 1$ и категория $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям 6 д), то всякий морфизм w категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$ индуцирует морфизм категории $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$. Определяемые таким образом отображения между $\mathrm{Mor}\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C}^T)$ и $\mathrm{Mor}\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathcal{C})^T$ взаимно обратны.

Теорема. *Отображения*

$$Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T) \ni \tilde{\varphi} \longrightarrow (\varphi,\mu_\varphi) \in Ob\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^T$$

$$Mor\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T) \ni \tilde{\varphi}w\tilde{\psi} \longrightarrow (\varphi,\mu_\varphi)\,w_c\,(\psi,\mu_\psi) \in Mor\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^T$$

инъективны и определяют ковариантный функтор $\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C}^T)\epsilon\mathcal{F}(\mathcal{D},\mathcal{C})^T$. *Этот функтор обратим, если (i)* $T_3 = T_4 = 0$ *или (ii) в категории* $\mathcal{C}$ *существует финальный объект* F *и морфизм из* F *в любой объект* $\mathcal{C}$.

Теорему можно обобщить на случай произвольных алгебраических систем над категорией $\mathcal{C}$.

ABSTRACT. Categories $\mathcal{C}^T$ of binars of the type T are defined. Using a forgetful functor and a recovery procedure injective functors $\mathcal{F}(D,\mathcal{C}^T)\epsilon\mathcal{F}(D,\mathcal{C})^T$ are constructed for arbitrary category $\mathcal{C}$ and precategory D. Under some restrictions on the type T or category $\mathcal{C}$ these functors become invertible.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Букур, А. Деляну, Введение в Теорию Категорий и Функторов, М., "Мир", 1972.
2. М. Цаленко, Е. Шульгейфер, Основы Теории Категорий, М., "Наука", 1974.
3. C. Faith, Algebra : Rings, Modules and Categories, I, Springer–Verlag, 1973.
4. S. Mac Lane, Categories for the working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics, 5, 1971.

18 мая 1995

Ереванский государственный университет