ПОСТРОЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМИ МОМЕНТАМИ ПРОИЗВОДНЫХ

Г. В. Бадалян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, т. 30, № 3, 1995

Статья обобщает известный результат Мандельбройта о существовании бесконечно дифференцируемой на $[0,1]$ функции $\varphi(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющей условиям 1) $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(1) = 0$ для всех n и 2) $|\varphi^{(n)}(x)| \leq$ $\leq (8e)^n m_n$, где $\{m_n\}$ - заданная последовательность. Условие 1) заменено условием $\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^{n-\mu_k}\, dt = 0$, $\varphi^{(n)}(1) = 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, где числа $0 < \mu_k \leq n$ необязательно целые.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Для любой последовательности $\{m_n\}$ положительных чисел определим

$$T(r, \{m_n\}) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n}, \tag{1}$$

Запишем

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r, \{m_n\})}{r^2}\, dr < \infty, \tag{2}$$

если для некоторого $a > 0$ интеграл $\int_a^{\infty} \frac{\ln T(r, \{m_n\})}{r^2}\, dr$ сходится.

Следующая теорема по существу принадлежит Мандельбройту ([1], стр. 24 ; [2], стр. 105).

Теорема А. *Из сходимости интеграла (2) следует существование функции $0 \not\equiv \varphi \in C^{\infty}(0,1]$, удовлетворяющей условиям*

$$1) \quad \varphi^{(n)}(1) = \varphi^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, ... \tag{3}$$

$$2) \quad |\varphi^{(n+1)}(t)| \leq c h_1^n m_{n+1}, \quad n = 0, 1, ..., \quad t \in [0,1]. \tag{4}$$

В настоящей работе мы доказываем ряд утверждений, обобщающих этот результат. Сначала заметим, что 1) можно заменить эквивалентным условием

$\varphi^{(n)}(1) = 0$ и $\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^{n-k}\, dt = 0, \quad k = 0, 1, ..., n,\ n = 0, 1, ...$ Поэтому возникает вопрос : какие условия, наложенные на последовательности $\{\mu_\nu\}$, $\{m_n\}$, где мы предполагаем, что

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ..., \qquad \mu_{\nu+1} - \mu_\nu \geq h > 0, \tag{5}$$

обеспечивают существование функции $0 \not\equiv \varphi \in C^\infty(0,1]$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi^{(n)}(1) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^{n-\mu_k}\, dt = 0, \tag{6}$$

для любых $0 < \mu_k \leq n, \quad n = 0, 1, ...,$

$$|\varphi^{(n+1)}(t)|\, t^\delta \leq c h_1^n m_{n+1}, \quad t \in [0,1], \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, ... \tag{7}$$

Заметим, что (6) интерпретируется так же в терминах производных дробной степени. Подобные задачи рассмотрены в [3] для $(0, \infty)$, см. также [4] — [7].

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Выберем $\rho \geq 1$ и положим $M_n = m_n^{2\rho-1}$. Очевидно, тогда

$$m_n = M_n^{1/(2\rho-1)}, \qquad T(r, \{m_n\}) = \left[T(r^\beta, M_n)\right]^{1/\beta}, \quad \beta = 2\rho - 1 \tag{8}$$

и в смысле одновременной сходимости

$$\int^\infty \frac{\ln T(r, \{m_n\})}{r^2}\, dr = \frac{1}{\beta^2} \int^\infty \frac{\ln T(r, \{M_n\})}{r^{1+1/\beta}}\, dr. \tag{9}$$

Определение 1. Последовательность $\mu = \{\mu_\nu\}$, удовлетворяющая условию (5), принадлежит классу $A(1/\omega)$, $\omega > 0$, если функция

$$G(\zeta) = \prod_{\nu=1}^\infty \frac{\mu_\nu + \zeta}{\omega\nu + \zeta} \exp\left(-\zeta\left(\frac{1}{\mu_\nu} - \frac{1}{\omega\nu}\right)\right), \quad \zeta = \sigma + iy, \quad y \in (-\infty, \infty) \tag{10}$$

удовлетворяет условиям :

1) при $\sigma \geq 0$

$$|G(\zeta)| = |G(\sigma + iy)| \leq c_0 e^{c_1\sigma}, \tag{11}$$

2) при $\sigma \leq 0$ вне кругов $|\zeta + \omega\nu| < \delta < \dfrac{\omega}{4}$

$$|G(\zeta)| \leq c(\delta) e^{c_1|\sigma|}, \tag{12}$$

где числа $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$ не зависят от σ и y.

Определение 2. Скажем, что последовательность μ_ν, удовлетворяющая условию (5), принадлежит классу $A^*(1/\omega)$, если сходится ряд

$$\sum \frac{\mu_\nu - \omega\nu}{\mu_\nu} \tag{13}$$

и

$$\alpha_\nu = \mu_\nu - \omega\nu = O(\nu^\delta), \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}, \quad \nu \to \infty. \tag{14}$$

Теорема 1. $A^*(1/\omega) \subset A(1/\omega)$.

Доказательство. Согласно (13) и (14) сходятся ряд и бесконечное произведение

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_\nu - \omega\nu}{\mu_\nu \omega\nu}, \qquad \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_\nu - \omega\nu}{\mu_\nu}\right).$$

Следовательно для оценки $|G(\zeta)|$ мы должны оценить сверху

$$|\widetilde{G}(\zeta)| = \left|\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_\nu + \zeta}{\omega\nu + \zeta}\right|, \quad \zeta = \sigma + iy,\ y \in (-\infty, \infty).$$

Начнем со случая $\sigma \geq 0$. Имеем

$$|\widetilde{G}(\zeta)| = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{\mu_\nu + \sigma + iy}{\omega\nu + \sigma + iy}\right| =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\mu_\nu + \sigma)^2 - (\omega\nu + \sigma)^2}{a_\nu(y)}\right)^{1/2} \leq \exp\left(\frac{1}{2} S(\sigma, y)\right),$$

где $a_\nu(y) = (\omega\nu + \sigma)^2 + y^2$, а

$$S(\sigma, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\mu_\nu - \omega\nu)(\mu_\nu + \omega\nu + 2\sigma)}{a_\nu(y)} =$$

$$= 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_\nu - \omega\nu}{\omega\nu + \sigma}\,\frac{a_\nu(0)}{a_\nu(y)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\mu_\nu - \omega\nu)^2}{(\omega\nu + \sigma)^2}\,\frac{a_\nu(0)}{a_\nu(y)}. \tag{15}$$

Оба ряда справа в (15) сходятся равномерно относительно $\sigma \geq 0$. Следовательно, ряд $S(\sigma, y)$ равномерно сходится. Этим доказано (11) для $\sigma \geq 0$.

Расмотрим случай $\sigma < 0$. Представим $|\widetilde{G}(\sigma + iy)|$ в виде

$$|\widetilde{G}(\sigma + iy)| = \left|\prod_1 (\sigma + iy) \cdot \prod_2 (\sigma + iy)\right|,$$

где

$$\prod_1 (\sigma + iy) = \prod_{\omega\nu \leq -c'\sigma} \left|\frac{\mu_\nu + \sigma + iy}{\omega\nu + \sigma + iy}\right|, \quad c' > 1, \quad 0 < \delta < \min|\omega\nu + \sigma + iy|,$$

$$\prod_2(\sigma+iy)=\prod_{\omega\nu\geq -c'\sigma}\left|\frac{\mu_\nu+\sigma+iy}{\omega\nu+\sigma+iy}\right|, \tag{16}$$

и заметим, что

$$\prod_1(\sigma+iy)\leq\prod_{\omega\nu\leq -c'\sigma}\left(\frac{(c'\sigma)^2+y^2}{(\sigma+\omega\nu)^2+y^2}\right)^{1/2}\leq\prod_{\omega\nu\leq -c'\sigma}\frac{(-c'\sigma)}{|\sigma+\omega\nu|}\leq 2^{-c_*\sigma}.$$

По аналогии с биномальным коэффициентом, $c_*>0$ не зависит от σ и y. Оценку сверху для $|\prod_2(\sigma+iy)|$ можно получить тем же путем, что было сделано для $\sigma>0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Из сходимости интеграла (2) следует существование функции* $0\not\equiv\not\equiv\varphi_0(x)\in C^\infty(0,1]$, *удовлетворяющей условиям (6) и (7) для любой последовательности* $\{\mu_\nu\}\in A(1)$.

Доказательство. Положим

$$g_N(x,\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp(-c'_N\zeta)G_N(\zeta)}{\zeta}x^{-\zeta}\,d\zeta,\quad x>0,\quad \sigma>0, \tag{17}$$

где

$$G_N(\zeta)=\prod_{\nu=1}^{N}\frac{\mu_\nu+\zeta}{\nu+\zeta}\exp\left(-\zeta\left(\frac{1}{\mu_\nu}-\frac{1}{\nu}\right)\right).$$

Предполагаем, что $N>0$ достаточно большое, а $c'_N>0$ выбрано так, что $g_N(1,\sigma)=0$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_N(x)=\int_x^1\varphi\left(\frac{x}{t}\right)g_N(t,\sigma)\frac{dt}{t}=\int_x^1\varphi(t)\,g_N\left(\frac{x}{t},\sigma\right)\frac{dt}{t},\quad x\in(0,1],\quad \sigma>0, \tag{18}$$

которая удовлетворяет условиям теорем A и 1, $N>0$ - целое число.

Из (18) следует, что

$$\varphi_N^{(n+1)}(x)=\int_x^1\varphi^{(n+1)}\left(\frac{x}{t}\right)g_N(t,\sigma)\,t^{-n-1}\frac{dt}{t}=x^{-n-1}\int_x^1\varphi^{(n+1)}(t)\,g_N\left(\frac{x}{t},\sigma\right)dt. \tag{19}$$

Интегрируя (19) по частям, находим

$$\varphi_N^{(n+1)}(x)=$$

$$=x^{-n-1}g_{1,N}\left(\frac{x}{t},\sigma\right)\varphi^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x}^{1}-x^{-n-1}\int_x^1\varphi^{(n+2)}(t)\,g_{1,N}\left(\frac{x}{t},\sigma\right)t^{n+1}\,dt, \tag{20}$$

где

$$g_{1,N}\left(\frac{x}{t},\sigma\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp\left(-c'_N\zeta\right)G_N(\zeta,\mu)}{\zeta(\zeta+n+1)}x^{-\zeta}t^{\zeta}\,d\zeta,\quad \sigma>0,\quad x\in[0,1]. \tag{21}$$

Из равенств (10) и (21) следует, что $g_{1,N}\left(\frac{x}{t},\sigma\right)=0$ при $\mu\in A(1)$ и $0\le t\le x$. Следовательно, после перехода к пределу в (20), получим

$$\varphi_0^{(n+1)}(x)=-x^{-n-1}\int_x^1\varphi^{(n+2)}(t)\,g_1\left(\frac{x}{t},\sigma\right)t^{n+1}\,dt, \tag{22}$$

где $\varphi_0^{(n+1)}(x)$ и $g_1\left(\frac{x}{t},\sigma\right)$ – пределы $\varphi_N^{(n+1)}$ и $g_{1,N}$ соответственно при $N\to+\infty$. Докажем, что функция $\varphi_0(x)$ из (22) не зависит от n. Интегрируя (18) $(n+2)$ раза по частям, получим

$$\varphi_N(x)=(-1)^{n+2}\int_x^1\varphi^{(n+2)}(t)\,\widetilde{g}_{n,N}\left(\frac{x}{t},\sigma\right)t^{n+1}\,dt, \tag{23}$$

где

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\widetilde{g}_{n,N}\left(\frac{x}{t},\sigma\right)=(-1)^{n+1}g_{1,N}\left(\frac{x}{t},\sigma\right)x^{-n-1}. \tag{24}$$

Отсюда при $N\to+\infty$ следует, что

$$\widetilde{\varphi}_0(x)=(-1)^{n+2}\int_x^1\varphi^{(n+2)}(t)\,\widetilde{g}_n\left(\frac{x}{t},\sigma\right)t^{n+1}\,dt. \tag{25}$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi}_0(x)$ не зависит от n. Сравнение (22) и (25) показывает, что $\widetilde{\varphi}_0^{(n+1)}(x)=\varphi_0^{(n+1)}(x)$, и поэтому $\varphi_o(x)\equiv\widetilde{\varphi}_0(x)$ не зависит от n.

Докажем теперь, что $\varphi_0(x)$ - искомая функция теоремы 2. Из (22) получим

$$J_{n,k}=-\int_0^1\varphi_0^{(n+1)}(x)\,x^{n-\mu_k}\,dx=$$

$$=\lim_{\delta\to 0+}\int_\delta^1\varphi^{(n+2)}(t)\,t^{n+1}\,dt\int_\delta^t x^{-\mu_k-1}g_1(x/t,\sigma)\,dx. \tag{26}$$

Очевидно

$$\begin{gathered}J_k(t)=\int_\delta^t x^{-\mu_k-1}g_1(x/t,\sigma)\,dx=\\ =\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp\left(-c'\zeta\right)G(\zeta)\,t^{\zeta}}{\zeta(\zeta+n+1)(\zeta+\mu_k)}\,x^{-\zeta-\mu_k}\Big|_{x=\delta}^{t}\,d\zeta=I_k(t,t,\sigma)-I_k(t,\delta,\sigma),\end{gathered} \tag{27}$$

где

$$I_k(t,x,\sigma)=\frac{x^{-\mu_k}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp\left(-c'\zeta\right)G(\zeta)\,t^{\zeta}x^{-\zeta}}{\zeta(\zeta+n+1)(\zeta+\mu_k)}\,d\zeta. \tag{28}$$

Имеем $I_k(t,t,\sigma)=0$, так как контур интегрирования можно замкнуть в правой полуплоскости, где подынтегральная функция стремится к нулю со скоростью $O(1/|\zeta|^3)$ при $\zeta\to\infty$.

Возвращаясь к (26), будем иметь

$$J_{n,k}=\lim_{\delta\to0+}\int_\delta^1\varphi^{(n+2)}(t)\,t^{n+1}I_k(t,\delta,\sigma)\,dt. \tag{29}$$

Так как $I_k(t,\delta,\sigma)=0$ при $0\le t\le\delta$, то нижний предел интегралов (29) можно заменить на 0, т. е.

$$J_{n,k}=\lim_{\delta\to0+}\int_0^1\varphi^{(n+2)}(t)\,t^{n+1}I_k(t,\delta,\sigma)\,dt. \tag{30}$$

Заметим, что

$$I_k(t,\delta,\sigma)=\sum_{0\le\nu\le\mu_k}\delta^{-\mu_k}\mathrm{Res}_{\zeta=-\nu}\frac{\exp(-c'\zeta)\,G(\zeta)\,t^\zeta\,\delta^{-\zeta}}{\zeta(\zeta+n+1)(\zeta+\mu_k)}+I_k(t,\delta,-\sigma_k), \tag{31}$$

где $\mu_k<\sigma_k<\mu_{k+1}$, $\mu_k\le n$.

С другой стороны, $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (3). Поэтому после подстановки (31) в (30), получим

$$J_{n,k}=\lim_{\delta\to0+}\mathcal{R}_{n,k}(\delta,-\sigma_k), \tag{32}$$

где

$$\mathcal{R}_{n,k}(\delta,-\sigma_k)=\delta^{-\mu_k}\int_0^1\varphi^{(n+2)}(t)\,t^{n+1}\,dt\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma_k-i\infty}^{-\sigma_k+i\infty}\frac{\exp(-c'\zeta)\,G(\zeta)\,t^\zeta\,\delta^{-\zeta}}{\zeta(\zeta+n+1)(\zeta+\mu_k)}\,d\zeta.$$

Так как $\mathrm{Re}(-\zeta-\mu_k)=\sigma_k-\mu_k>0$, то

$$|\delta^{-\zeta-\mu_k}|=\delta^{\sigma_k-\mu_k}\to0,\quad \text{при}\quad \delta\to0\quad\text{и}\quad |t^\zeta|=t^{-\sigma_k},\quad \sigma_k<n+1.$$

Таким образом, $\lim_{\delta\to0+}\mathcal{R}_{n,k}(\delta,-\sigma_k)=0$.

Следовательно, функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2.

Что касается условия 2, то из (22) (где заменяем σ на $-\sigma_n$) следует неравенство

$$|\varphi_0^{(n+1)}(x)|\le x^{-n-1}\int_0^1|\varphi^{(n+2)}(t)|\,t^{n+1}\,|g_1(x/t,-\sigma_n)|\,dt\le c\exp(c_1n)m_{n+2}x^{-\delta}, \tag{33}$$

где $0<\delta=n+1-\sigma_n<1/2$, а константы $c>0$, $c_1>0$ не зависят от x и n.

Следовательно

$$|\varphi_0^{(n+1)}(x)|\, x^\delta \le c h_*^n\, m_{n+2}, \quad n = 0,1,2,..., \quad x \in (0,1]. \tag{34}$$

Определение 3. Для последовательности $\{\mu_\nu\}$, удовлетворяющей условию (5), определим $\Phi(v,\{\mu_\nu\},(a,\infty))$ и $\Phi(v,\{\mu_\nu\},(0,1))$ как классы функций $\alpha(t) \not\equiv 0$, непрерывных на (a,∞) или $(0,1)$ соответственно, удовлетворяющих при всех $x > 0$ и $\delta > 0$ условиям

$$\int_a^\infty \alpha(t)\, t^{\mu_\nu}\, dt = 0; \quad \nu = 1,2,..., \quad 0 < \int_a^\infty |\alpha(t)|\, t^x\, dt \le c_0(\delta)\, e^{c_1 x}\, v(x+\delta) \tag{35}$$

и

$$\int_0^1 \alpha(t)\, t^{-\mu_\nu}\, dt = 0; \quad \nu = 1,2,..., \quad 0 < \int_0^1 |\alpha(t)|\, t^{-x}\, dt \le c_0(\delta)\, e^{c_1 x}\, v(x+\delta). \tag{36}$$

Известная теорема Фукса (см. [2], стр. 130 или [8]) налагает некоторые условия на функции $v(x)$, при выполнении которых класс $\Phi(v,\{\mu_\nu\},(0,\infty))$ не пуст.

В настоящей работе мы устанавливаем аналогичные результаты для классов $\Phi(v,\{\mu_\nu\},(1,\infty))$ и $\Phi(v,\{\mu_\nu\},(0,1))$.

Определим функцию

$$v(x) = v(n) = m_n^{2(\rho-1)} \quad \text{при} \quad x \in [n, n+1), \quad n = 0,1,.... \tag{37}$$

Тогда для $r > 0$ имеем

$$V(r) = \sup_{x\ge 0} \frac{r^{2(\rho-1)x}}{v(x)} \le \sup_{n\ge 0} \frac{r^{2(\rho-1)n}}{v(n)} = V_0(r) = [T(r,\{m_n\})]^{2(\rho-1)}, \tag{38}$$

где $T(r,\{m_n\})$ определено в (1). Так как сходится (9), то

$$\int^\infty \frac{\ln V(r)}{r^2}\, dr < \infty. \tag{39}$$

Итак, все условия теоремы Фукса выполнены, и следовательно, для $\rho > 1$ $\Phi(v, \left\{\dfrac{\nu}{\rho-1}\right\}, (0,\infty))$ не пуст.

Теорема 3. *Пусть функция $v(x)$ зависит от последовательности $\{m_n\}$, как в (37). Тогда из сходимости (39) следует, что для $\rho > 1$ класс $\Phi(v,\{\nu/(\rho-1)\},$ $(1,\infty))$ не пуст.*

Лемма. *Предположим, что для функции* $v(x) > 0$ *и числа* $\omega > 0$ *класс* $\Phi(v, \{\omega\nu\}, (0, \infty))$ *не пуст. Тогда существует функция* $v_*(x)$*, удовлетворяющая условию*

$$v_* = v_*(x) \le c_1 c_2^x \, v(x), \tag{40}$$

где $c_1 > 0, c_2$ *являются константами, не зависящими от* x*, для которых класс* $\Phi(v_*, \{\omega\nu\}, (1, \infty))$ *не пуст.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение для $\omega = 1$. Согласно теореме Фукса, существует функция $g(t) \in \Phi(v, \{\nu\}, (0, \infty))$, для которой

$$\int_0^\infty g(t)\, t^n \, dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{41}$$

Следовательно

$$\int_0^\infty g(t)\,(1+t)^n \, dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^\infty g(t)\, t^k \, dt = 0. \tag{42}$$

Из (42), используя $t + 1 = t'$ и $\alpha(t) = g(t-1)$, получим

$$\int_0^\infty g(t)\,(1+t)^n \, dt = \int_1^\infty \alpha(t)\, t^n \, dt = 0. \tag{43}$$

Из определения класса $\Phi(v, \{\nu\}, (0, \infty))$ получаем

$$0 < \int_1^\infty |\alpha(t)|\, t^x \, dt = \int_0^\infty |g(t)|\,(t+1)^x \, dt < 2^x \int_0^1 |g(t)|\, dt +$$

$$+ \int_1^\infty |g(t)|\, t^x (1 + 1/t)^x \, dt < 2^x \left[\int_0^1 |g(t)|\, dt + \int_1^\infty |g(t)|\, t^x \, dt \right] < c 2^x v(x). \tag{44}$$

Теперь обратимся к случаю с общим ω. Имеем

$$\int_0^\infty g(t)\, t^{\omega k} \, dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad 0 < \int_0^\infty |g(t)|\, t^x \, dt \le v(x). \tag{45}$$

Это означает, что

$$0 = \int_0^\infty g(t)\, t^{\omega k} \, dt = \int_0^\infty g(t^{1/\omega})\, \frac{t^{1/\omega - 1}}{\omega}\, t^k \, dt = \int_0^\infty g_1(t)\, t^k \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{46}$$

С другой стороны

$$v(x') \ge \int_0^\infty |g(t)|\, t^{x'} \, dt = \int_0^\infty |g(t^{1/\omega})\, \frac{t^{1/\omega - 1}}{\omega}\, t^{x'/\omega} \, dt = \int_0^\infty |g_1(t)|\, t^x \, dt,$$

где $x = x'/\omega$. Следовательно

$$\int_0^\infty |g_1(t)|\, t^x\, dt \le v(x') = v(\omega x). \tag{47}$$

Согласно этой лемме, из (46) и (47) следует существование функции $\alpha_* \in$ $\in \Phi(v_*, \{\nu\}, (1,\infty))$, где $v_*(x) \le c2^x v(\omega x)$. Итак, имеем

$$\int_1^\infty \alpha_*(t)\, t^k\, dt = 0, \quad 0 < \int_1^\infty |\alpha_*(t)|\, t^x\, dt \le c2^x v(\omega x). \tag{48}$$

С помощью замены переменной $t = t'^\omega$, получим

$$\int_1^\infty \alpha_1(t)\, t^{\omega k}\, dt = 0, \quad 0 < \int_1^\infty |\alpha_1(t)|\, t^x\, dt \le c\, 2^x v(x+1). \tag{49}$$

Мы доказали, что если существует функция, удовлетворяющая условиям (46), (47), то та же функция удовлетворяет условию (49). А существование функции, удовлетворяющей условиям (46), (47) следует из теоремы Фукса.

Последовательность $\{\omega\nu\}$ составляет арифметическую прогрессию, поэтому, обозначая $\alpha_1(t)t^{2\omega} = \alpha(t)$, можно получить следующую разновидность теоремы 3.

Теорема 4. *Из сходимости интеграла (39) следует существование функции $0 \not\equiv \alpha(t) \in C(1,\infty)$, которая удовлетворяет условиям*

$$\int_1^\infty \alpha(t)\, t^{\omega k}\, dt = 0, \quad 0 < \int_1^\infty |\alpha(t)|\, t^x\, dt \le ch_*^x v(x+\kappa_0), \tag{50}$$

где $\kappa_0 = 2\omega$, $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$, $\omega = 1/\rho - 1$.

Из теоремы 4 путем замены $t = 1/t'$ получим следующую теорему.

Теорема 5. *Из сходимости интеграла (39) следует существование непрерывной на $(0,1)$ функции $\alpha(t)$, которая удовлетворяет условиям*

$$\int_0^1 \alpha(t)\, t^{-\omega k}\, dt = 0, \quad 0 < \int_0^1 |\alpha(t)|\, t^{-x}\, dt \le c(\kappa_0)2^x v(x+\kappa_0), \quad x > 0, \tag{51}$$

где $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$ и $\kappa_0 = 2\omega$, $\omega = 1/(\rho - 1)$.

Мы докажем разновидность теоремы 5 для класса функций $\Phi(v, \{\mu_\nu\}, (0,1))$, где $\{\mu_\nu\}$ - произвольная последовательность из $A(\rho-1)$, $\rho > 1$. Рассмотрим функцию

$$\alpha_0(x) = \int_x^1 \alpha(t)\, g(x/t, \sigma)\, \frac{dt}{x}, \quad x \in (0,1], \tag{52}$$

где $\alpha(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и

$$g(t,\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp(-c'\zeta)G(\zeta,\mu)}{(\zeta-\omega)\zeta}t^{-\zeta}\,d\zeta. \tag{53}$$

Метод, применяемый в теореме 2, дает

$$\int_0^1 \alpha_0(x)\,x^{-\mu_k}\,dx=0,\quad k=1,2,\ldots \tag{54}$$

Что касается неравенства (ср. с (51)), мы заменяем нижний предел интеграла в (52) на 0, так как $g(x/t,\sigma)=0$ при $0<t<x$. Далее, для $-(n+1)<-\sigma_n<-n$ имеем

$$g(x/t,\sigma)=\sum_{k=-1}^{n}a_k\frac{x^{k\omega}}{t^{k\omega}}+g(x/t,-\sigma_n)$$

и

$$\int_0^1\alpha(t)\,t^{-\omega k}\,dt=0,\quad k=-1,0,1,\ldots,\quad |g(x/t,-\sigma_n)|\le ce^{c_1 n}\,(x/t)^{\sigma_n}.$$

Это значит, что

$$\alpha_0(x)=\int_0^1\alpha(t)g(x/t,\sigma)\,dt=\int_0^1\alpha(t)\,g(x/t,-\sigma_n)\,dt.$$

Поэтому, для $|x'-\sigma_n|<1/2$ имеем

$$\int_0^1|\alpha_0(x)|\,x^{-x'}\,dx\le c\int_0^1 x^{-x'+\sigma_n}\,dx\int_0^1|\alpha(t)|\,t^{-\sigma_n}\,dt\le c_0c_1^n v(\sigma_n+1).$$

Мы доказали, что $0\not\equiv\alpha_0(t)\in\Phi(v(x+1),\{\mu_\nu\},(0,1))$, где $\{\mu_\nu\}\in A(\rho-1)$, $\nu=1,2,\ldots$. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 6. *Из сходимости (39) следует, что класс $\Phi(v(x+1),\{\mu_\nu\},(0,1))$, $\rho>1$, $\{\mu_\nu\}\in A(\rho-1)$ не пуст.*

Теорема 7. *Из теорем 2, 6 следует существование функции $0\not\equiv\varphi(t)\in C^\infty(0,1)$, удовлетворяющей условию (6) и следующей разновидности (7)*

$$|\varphi^{(n+1)}(t)|\,x^\delta\le cc_1^n v(n+2)m_{n+2}\le cc_1^n M_{n+2}, \tag{55}$$

$$x\in[0,1],\quad \delta\in(0,1/2),\quad n=0,1,\ldots,$$

где m_n, M_n и $v(n)$ определены в (8), (37)

$$\{\mu\}=\{\mu_k\}=\{\mu'_\nu\}\cup\{\mu''_\nu\},\quad \{\mu'_\nu\}\cap\{\mu''_\nu\}=\emptyset,$$

$$\{\mu'_\nu\} \in A(\rho-1), \quad \{\mu''_\nu\} \in A(1), \quad \rho > 1. \tag{56}$$

Доказательство. Согласно условию (56), $\{\mu_k\} \in A(\rho)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \int_x^1 \varphi_0(x/t)\,\alpha(t)\,dt. \tag{57}$$

Из (57) следует, что

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \int_x^1 \varphi_0^{(n+1)}(x/t)\,t^{-n-1}\,\alpha(t)\,dt. \tag{58}$$

Из (57) и (58), после изменения порядка интегрирования, будем иметь

$$\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(x)\,x^{n-\mu_k}\,dx = \int_0^1 \alpha(t)t^{-n-1}\,dt \int_0^t \varphi_0^{(n+1)}(x/t)\,x^{n-\mu_k}\,dx. \tag{59}$$

После замены переменной $x = tx'$, получим

$$\int_0^t \varphi_0^{(n+1)}(x/t)\,x^{n-\mu_k}\,dx = t^{n+1-\mu_k} \int_0^1 \varphi_0^{(n+1)}(x)\,x^{n-\mu_k}\,dx.$$

Таким образом, из (59) получим

$$\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(x)\,x^{n-\mu_k}\,dx = \int_0^1 \alpha(t)t^{-\mu_k}\,dt \int_0^1 \varphi_0^{(n+1)}(x)\,x^{n-\mu_k}\,dx. \tag{60}$$

Так как наша последовательность удовлетворяет условию (56), для $\mu_k \in \{\mu'_\nu\}$, то выполнено условие (54) и для $\mu_k \in \{\mu''_\nu\}$ имеем

$$\int_0^1 \varphi_0(x)\,x^{n-\mu_k}\,dx = 0.$$

Из (60) следует условие (6).

Из (58) следует

$$|\varphi^{(n+1)}(x)| \le x^{-\delta} \int_x^1 |\varphi_0^{(n+1)}(x/t)\,\left(\frac{x}{t}\right)^{\delta}\,t^{-n-1+\delta}\,|\alpha(t)|\,dt \le ch_1^n m_{n+1} v(n+1-\delta).$$

Доказательство теоремы 7 завершено.

§3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 8. *Пусть последовательность $\{\mu_\nu\} \in A(1)$, если $\rho = 1$, и удовлетворяет условию (56), если $\rho > 1$. Тогда из сходимости интеграла (9) следует существование функции $0 \not\equiv \varphi \in C^\infty(0,1)$, которая удовлетворяет условиям (6) и (55).*

В самом деле, из сходимости интеграла (9) следует сходимость интегралов (2), (39), поэтому справедливы теоремы 2 и 7, а потому и теорема 8.

Доказательство теоремы 8 непосредственно не переносится на случай последовательности $\{k/\rho\}$, $\rho > 1$. Однако она справедива и в этом случае, но с небольшим изменением доказательства.

Теорема 9. *Из сходимости интеграла (9) следует существование функции* $0 \not\equiv \not\equiv \varphi \in C^\infty(0,1)$, *которая удовлетворяет условиям (6) и (55) для последовательности* $\mu_k = k/\rho$, $\rho > 1$.

Для построения искомой функции рассматривается функция

$$\varphi_{0,N}(x) = \int_x^1 \varphi(t)\, g_{k_0,N}(x/t,\sigma)\,\frac{dt}{t}, \quad x \in [0,1], \tag{61}$$

где $\varphi(t)$ определена в теореме 8

$$g_{k_0,N}(t,\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-c_N\zeta}\, G_{k_0,N}(\zeta)\, t^{-\zeta}\, d\zeta \quad (k_0 \geq 3), \tag{62}$$

$$G_{k_0,N}(\zeta) = \prod_{\nu=1}^{N-k_0} (1 + (\rho\zeta)/\nu) \exp(-\rho\zeta/\nu) \left(\prod_{\nu=1}^{N} \left(1 + \frac{\zeta}{\mu_\nu}\right) \exp(-\frac{\zeta}{\mu_\nu})\right)^{-1}, \tag{63}$$

где $-\mu_1 < \sigma < \mu_1$. После трехкратного интегрирорования по частям в (62) совершается переход к пределу при $N \to \infty$. После этого, повторяя доказательство теоремы 2, получаем требуемый результат.

Замечание. Используя метод, применяемый при доказательстве теоремы 2, можно получить разновидность теоремы 9, где последовательность $\{k/\rho\}$, $\rho > 1$ заменяется общей $\{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$.

Теорема 10. *Если функция* $0 \not\equiv \varphi \in C^\infty(0,1)$ *удовлетворяет условиям (6) и (55), где* $\mu = \{\mu_\nu\} \in A^*(\rho)$ *для* $\rho \geq 1$, *то сходится интеграл (9).*

Доказательство. Возьмем $\{\mu_k\} = \{k/\rho\}$ и

$$p_n(t,\sigma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\zeta\, e_n(\zeta,\nu)}{Q(\zeta)\sin(\pi\rho\zeta)}\, t^{-\zeta}\, d\zeta, \quad t > 0, \quad -1/\rho < \sigma < 1/\rho,$$

где

$$e_n(\zeta,\nu) = \exp\left(\zeta \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1}\right) \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{\nu}\right) \exp\left(\frac{\zeta}{\nu}\right),$$

$$Q(\zeta) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\lambda_\nu}\right), \quad 0 < 1/\rho < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \sum \frac{1}{\lambda_\nu} < \infty.$$

Рассмотрим преобразование (см. [9])

$$0 \not\equiv f(z) = \int_0^1 p_0(zt,\sigma)\,\varphi(t)\,\frac{dt}{t} = \frac{\pm 1}{n!}\int_0^1 p_0(zt,\sigma)\,\frac{dt}{t}\int_t^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\,(\tau - t)^n\, d\tau.$$

Согласно (6) и (55)

$$0 \not\equiv f(z) = \frac{\pm 1}{n!} \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(\tau)\, p_n(zt, \sigma_n)\, d\tau, \quad 0 < n - k_0 < \sigma_n < n.$$

Следовательно, для $|\arg z| < \beta\,\pi/2$, $|z| > 1$, $\beta = 2\rho - 1$ получим

$$0 \not\equiv f(z) \leq \frac{c_1 h_1^n M_{n+1}}{|z|^{\sigma_n}}. \tag{64}$$

Так как $f(z) \not\equiv 0$, то интеграл (9) сходится.

ABSTRACT. The paper generalizes the well-known result of Mandelbrojt on the existence of infinite differentiable in $[0, 1]$ function $\varphi(x) \not\equiv 0$ which satisfies the following conditions : 1) $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(1) = 0$ for all n and 2) $|\varphi^{(n)}(x)| \leq (8e)^n m_n$, where $\{m_n\}$ is a given sequence. The condition 1) is replaced by $\int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^{n-\mu_k}\, dt = 0$, $\varphi^{(n)}(1) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ where the numbers $0 < \mu_k \leq n$ are not necessarily integer.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, ОНТИ, Москва, 1937.
2. С. Мандельбройт, Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей, применения, ИЛ, Москва, 1955.
3. Г. В. Бадалян, "Критерий единственности бесконечно дифференцируемых функций, определяемых моментами их последовательных производных", ДАН СССР, т. 259, № 2, стр. 268 — 270, 1981.
4. М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян, "Некоторые интегро-дифференциальные операторы и связанные с ними квазианалитические классы функций", ИАН Арм. ССР, сер. физ.-мат. н., т. 11, № 5, стр. 107 — 120, 1958.
5. М. М. Джрбашян, "Расширение квазианалитических классов Данжуа–Карлемана", ИАН Арм. ССР, сер. математика, т. 3, № 3, стр. 171 — 198, 1968.
6. А. А. Китбалян, "Задача α–квазианалитичности в классах Данжуа–Карлемана", ИАН Арм. ССР, сер. математика, т. 10, № 3, стр. 207 — 241, 1975.
7. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, "К теории α–квазианалитичности классов", ИАН Арм. ССР, сер. математика, т. 17, № 4, стр. 264 — 306, 1982.
8. W. H. J. Fuchs, "On a theorem of Mandelbrojt," Journ. London Math. Soc., vol. 22, 19, 1947.
9. L. J. Hirschman and D. V. Widder, The Convolution Transform, Prinston Univ. Press, Prinston, New Jersey, 1955.

28 февраля 1995 Ереванский государственный университет