Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А. О. Карапетян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 2, 1995

Весовые $\overline{\partial}$-интегральные представления гладких функций, начиная с семидесятых годов, играют важную роль в многомерном комплексном анализе и имеют многочисленные приложения. В частности, такие представления эффективно применяются для получения явных решений $\overline{\partial}$-уравнения. В исследовании автора, частично опубликованном в [1], получены новые весовые $\overline{\partial}$-интегральные представления для функций, гладких в единичном шаре $\mathbf{B}_n$ и в пространстве $\mathbf{C}^n$. В связи с этим исследованием оказалось необходимым установить ряд тождеств для сумм биномиальных коэффициентов и функций Эйлера. Поскольку эти результаты представляют самостоятельный интерес, мы решили представить эти тождества с их полными доказательствами в данном кратком сообщении.

Предварительно введем некоторые обозначения. Через C_n^k обозначим биномиальные коэффициенты $n!/k!(n-k)!$, а через Γ, B – общеизвестные функции Эйлера. Если функция $f(x)$, $x \geq 0$, измерима и принадлежит $L^1[0,l]$ для любого $l > 0$, то при $p = 1, 2, ...$ полагаем

$$D^{-p}f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x f(t)(x-t)^{p-1}dt = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 ... \int_0^{t_{p-1}} f(\tau)\, d\tau,$$

$$D^{-0}f(x) \equiv f(x), \quad x > 0.$$

Легко видеть, что

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{D^{-p}f(x)\right\} \equiv f(x), \quad x > 0$$

для любой непрерывной функции $f(x)$, $x \geq 0$. При $p = 0, 1, 2, \ldots$ и $\gamma > -1$ справедливо следующее полезное соотношение :

$$D^{-p}\left\{\frac{x^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}\right\} = \frac{x^{\gamma+p}}{\Gamma(\gamma+p+1)}, \quad x > 0.$$

Предложение 1. *Если* $n \geq 1$ *и* $\alpha > -1$, *то*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1} C_{n-1}^k = B(n, \alpha+1). \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначив левую сторону равенства (1) через A, рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1} C_{n-1}^k x^{k+\alpha+1}, \quad x \geq 0.$$

Очевидно $\varphi(1) = A$, $\varphi(0) = 0$ и

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k x^{k+\alpha} = x^\alpha (1-x)^{n-1}, \quad x > 0.$$

Тем самым

$$A = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{n-1} dt = B(n, \alpha+1).$$

Замечание 1. По-видимому, формула (1) известна. Тем не менее, мы сочли уместным доказать ее. Отметим, что при $\alpha = 0$ тождество (1) переходит в

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} = 1. \qquad (2)$$

Предложение 2. *Если* $n \geq 1$ *и* $0 \leq i + \nu \leq n-1$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1-i-\nu} C_n^{k+i+\nu+1} C_{k+i}^i (-1)^k = C_{n-1-i}^\nu. \qquad (3)$$

Доказательство. Обозначив левую сторону (3) через A, при $x \geq 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{n!}{i!(n-1-i-\nu)!} \sum_{k=0}^{n-1-i-\nu} C_{n-1-i-\nu}^{k} \frac{(-1)^k x^{k+i+\nu+1}}{(k+i+1)(k+i+2)\cdots(k+i+\nu+1)}.$$

Легко проверить, что $\varphi(1) = A$ и справедливы равенства

$$\varphi^{(j)}(0) = 0 \quad (0 \leq j \leq \nu), \qquad \varphi^{(\nu+1)}(x) = \frac{n!}{i!(n-1-i-\nu)!} x^i (1-x)^{n-1-i-\nu}. \quad (4)$$

Тем самым, интегрируя по частям и используя (4), получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^x \varphi^{(\nu+1)}(t)(x-t)^\nu dt, \quad x > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A = \varphi(1) &= \frac{1}{\nu!} \int_0^1 \varphi^{(\nu+1)}(t)(1-t)^\nu dt = \\ &= \frac{n!}{\nu! i!(n-1-i-\nu)!} \int_0^1 t^i (1-t)^{n-1-i-\nu} (1-t)^\nu dt = \\ &= \frac{n!}{\nu! i!(n-1-i-\nu)!} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i)}{\Gamma(n+1)} = C_{n-1-i}^{\nu}. \end{aligned}$$

Замечание 2. В случае $i+\nu = n-1$ равенство (3) тривиально. Взяв в (3) $i+\nu = 0$ (т. е. $i = \nu = 0$), снова приходим к (2).

Предложение 3. *Если* $n \geq 1$, $m \geq 0$ *и* $0 \leq \nu \leq \min\{m, n\}$, *то*

$$\sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^j C_{n+m-\nu}^{m-j} = C_{n+m}^m. \quad (5)$$

Доказательство получается сравнением коэффициентов при x^m в обеих частях очевидного тождества $(1+x)^\nu (1+x)^{n+m-\nu} \equiv (1+x)^{n+m}$.

Предложение 4. *Если* $n \geq 1$, $0 \leq \nu \leq m \leq n-1$ *и* $\alpha > -1$, *то*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k C_n^{n-m+k+\nu} B(\alpha+1, n-m+k) \frac{\Gamma(n+1+\alpha+k)}{\Gamma(k+1)} &= \\ = \Gamma(n+1+\alpha) C_m^\nu B(n-m, m-\nu+\alpha+1). \quad (6) \end{aligned}$$

Доказательство. После деления на $\Gamma(\alpha+1)$ обе части (6) превращаются в полиномы от α порядка $\le m$. Следовательно, достаточно установить (6) только для целых $\alpha > \nu$. Далее, обозначим левую сторону (6) через A и при $x \ge 0$ введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) =$$
$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} \sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k C_{m-\nu}^k B(\alpha+1, n-m+k) \frac{\Gamma(n+1+\alpha+k)}{\Gamma(n-m+k+\nu+1)} x^{n-m+k+\nu}.$$

Легко видеть, что $A = \varphi(1)$. Кроме того

$$D^{-(\alpha+m-\nu)}\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} \sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k C_{m-\nu}^k B(\alpha+1, n-m+k) x^{n+\alpha+k}, \quad x > 0.$$

Напомним, что

$$B(\alpha+1, n-m+k) = \int_0^1 (1-t)^\alpha t^{n-1-m+k}\,dt.$$

Следовательно, поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$D^{-(\alpha+m-\nu)}\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} x^{n+\alpha} \int_0^1 (1-t)^\alpha t^{n-1-m}(1-xt)^{m-\nu}\,dt, \quad x > 0.$$

Отсюда заменой переменной $xt \longmapsto t$ приходим к равенству

$$D^{-(\alpha+m-\nu)}\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} x^m D^{-(\alpha+1)} g(x), \quad x > 0,$$

где $g(t) = (1-t)^{m-\nu} t^{n-1-m}, \quad t \ge 0$. Отсюда следует, что при $x \ge 0$

$$\varphi(x) = \frac{d^{\alpha+m-\nu}}{dx^{\alpha+m-\nu}} \left\{ D^{-(\alpha+m-\nu)}\varphi(x) \right\} =$$
$$= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} \sum_{j=0}^{\alpha+m-\nu} C_{\alpha+m-\nu}^j \frac{d^j}{dx^j} \left\{ D^{-(\alpha+1)} g(x) \right\} \frac{d^{\alpha+m-\nu-j}}{dx^{\alpha+m-\nu-j}} x^m. \quad (7)$$

Отметим далее, что

$$\frac{d^{\alpha+m-\nu-j}}{dx^{\alpha+m-\nu-j}} x^m \equiv \begin{cases} 0, & \text{при} \quad 0 \le j < \alpha-\nu, \\ \dfrac{\Gamma(m+1) x^{j-(\alpha-\nu)}}{\Gamma(j-(\alpha-\nu)+1)}, & \text{при} \quad \alpha-\nu \le j \le \alpha+m-\nu, \end{cases} \quad (8)$$

а также

$$\frac{d^j}{dx^j}\left\{D^{-(\alpha+1)}g(x)\right\}\Big|_{x=1}=0, \quad \text{при} \quad \alpha<j\le\alpha+m-\nu. \tag{9}$$

Учитывая (8) и (9), из (7) получим

$$\varphi(1)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)}\sum_{j=\alpha-\nu}^{\alpha}C^{j}_{\alpha+m-\nu}\left\{D^{-(\alpha+1-j)}g(x)\right\}\Big|_{x=1}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(j-\alpha+\nu+1)}.$$

Однако, легко видеть, что

$$\left\{D^{-(\alpha+1-j)}g(x)\right\}\Big|_{x=1}=\frac{B(m-\nu+\alpha-j+1,\,n-m)}{\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi(1)=&\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\nu+1)}\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)\Gamma(m+1)\times\\&\times\sum_{j=\alpha-\nu}^{\alpha}\frac{1}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)\Gamma(n+1+\alpha-\nu-j)\Gamma(j-\alpha+\nu+1)}=\\=&\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^{\nu}_{m}\times\\&\times\sum_{j=\alpha-\nu}^{\alpha}\frac{C^{\alpha-j}_{\nu}}{\Gamma(j+1)\Gamma(n+1+\alpha-\nu-j)}.\end{aligned}$$

Заменой индекса суммирования $\alpha-j\longmapsto j$ отсюда получим

$$\begin{aligned}\varphi(1)=&\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^{\nu}_{m}\times\\&\times\sum_{j=0}^{\nu}\frac{C^{j}_{\nu}}{\Gamma(\alpha-j+1)\Gamma(n+1+j-\nu)}=\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^{\nu}_{m}}{\Gamma(n+1+\alpha-\nu)}\sum_{j=0}^{\nu}C^{j}_{\nu}C^{\alpha-j}_{n+\alpha-\nu}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись (5) можно вычислить последнюю сумму и получить

$$\begin{aligned}A=\varphi(1)=&\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+m-\nu+1)\Gamma(n-m)C^{\nu}_{m}}{\Gamma(n+1+\alpha-\nu)}\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}=\\=&\Gamma(n+1+\alpha)C^{\nu}_{m}B(\alpha+m-\nu+1,\,n-m).\end{aligned}$$

Замечание 3. Тождество (6) может быть записано также в виде

$$\sum_{k=0}^{m-\nu}(-1)^{k}C^{n-m+k+\nu}_{n}\frac{B(\alpha+1,\,n-m+k)}{B(\alpha+n,\,k+1)}=(n+\alpha)C^{\nu}_{m}B(n-m,\,m-\nu+\alpha+1). \tag{6'}$$

Замечание 4. Если $m = \nu$, то тождество (6) тривиально. Взяв же в (6) $\nu = 0$, $m = n - 1$, приходим к следующей формуле :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1}\frac{B(\alpha+1, k+1)}{B(\alpha+n, k+1)} = 1.$$

В частном случае $\alpha = 0$ последняя формула принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^{k+1} C_{n+k}^{k+1} = 1.$$

Предложение 5. *Если* $p = 0, 1, 2, \dots$ *и* $\alpha > -1$, *то*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+2+p)}\sum_{k=0}^{p}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{\Gamma(p+1)(\alpha+1)}.$$

Доказательство. Обозначив левую часть требуемого равенства через A, будем иметь

$$A = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(p-k+1)}{\Gamma(\alpha+2+p)} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\sum_{k=0}^{p} C_p^k \int_0^1 t^{\alpha+k}(1-t)^{p-k}dt.$$

Далее, заменой порядка суммирования и интегрирования получим

$$A = \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^p \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left(\frac{t}{1-t}\right)^k dt =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_0^1 t^{\alpha}dt = \frac{1}{\Gamma(p+1)(\alpha+1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. H. Karapetyan, “Integral representations of smooth functions in C^n” in : Theory of Functions and Applications, Collection of papers dedicated to the memory of M. M. Djrbashian, pp. 75 – 78, Louys, Yerevan, 1995.

6 февраля 1995

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении