Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ $H^p(\alpha)$ М. М. ДЖРБАШЯНА

Ф. А. Шамоян, А. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 2, 1995

В статье получена полная характеристика тех $h \in L^1(T^n)$, для которых теплицев оператор

$$T_h(f)(z_1,...,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n} \frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)h(\zeta_1,...,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)} dm_{2n}(\zeta_1,...,\zeta_n)$$

действует ограниченно в пространствах аналитических в полидиске функций f, для которых

$$\int_{U^n} |f(z_1,...,z_n)|^p(1-|z_1|)^{\alpha_1}(1-|z_2|)^{\alpha_2}\cdots(1-|z_n|)^{\alpha_n} dm_{2n}(z_1,...,z_n) < +\infty.$$

Здесь U^n – единичный полидиск в C^n, dm_{2n} – $2n$-мерная мера Лебега на U^n, а T^n – остов полидиска U^n.

Пусть U^n – единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, а $\mathbf{T}^n$ – его остов, далее, пусть $H(U^n)$ – множество голоморфных в U^n функций. С мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ $(\alpha_j > -1,\ 1 \le j \le n)$ свяжем пространство

$$H^p(\alpha) = H^p(\alpha_1, ...\alpha_n) = \\ = \left\{ f \in H(U^n): \quad ||f||_{H^p(\alpha)} = \left(\int_{U^n} |f(\zeta)|^p (1-|\zeta|)^\alpha dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

Здесь через $m_{2n}(\zeta)$ обозначена $2n$-мерная мера Лебега на U^n и $(1-|\zeta|)^\alpha = (1-|\zeta_1|)^{\alpha_1}\cdots(1-|\zeta_n|)^{\alpha_n}$. Отметим, что в одномерном случае эти пространства были введены и изучены М. М. Джрбашяном [1], [2].

В данной работе исследована ограниченность теплицевых операторов в пространствах $H^p(\alpha)$. Напомним, что оператором Теплица с символом $h \in$ $\in L^1(T^n)$ называется интегральный оператор

$$T_h(f)(z_1,...,z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\zeta_1,...,\zeta_n)h(\zeta_1,...,\zeta_n)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)\cdots(\zeta_n-z_n)}dm_{2n}(\zeta_1,...,\zeta_n) =$$
$$= P_+(f,h),$$

где P_+ – известный проектор Рисса. Исследуя операторы T_h на пространствах $H^p(\alpha)$, мы естественно рассматриваем их сначала на всюду плотном подмножестве $H^p(\alpha)$, скажем на подмножестве $C_A(U^n) = C(\overline{U}^n) \cap H(U^n)$, или же на множестве всех многочленов. Мы найдем полное описание тех символов h, при которых соответствующий оператор T_h имеет ограниченное расширение всюду на этих пространствах. Отметим, что часть приведенных результатов в одномерном случае была получена первым автором [3], [4]. Однако, поведение операторов $T_h(f)$ существенно отличается от одномерного случая и от случая сферы (см. [5]). Приложения операторов Теплица в различных вопросах анализа широко известны (см. [6], [7]).

Приведем теперь определение интегродифференциального оператора дробного порядка. Пусть $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $-1 < \alpha_j < +\infty$, $1 \le j \le n$, $f \in H(U^n)$ и

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

При $z \in U^n$ положим

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+1+k_1)\cdots\Gamma(\alpha_n+1+k_n)}{\Gamma(\alpha_1+1)\cdots\Gamma(\alpha_n+1)\Gamma(k_1+1)\cdots\Gamma(k_n+1)}a_{k_1,...,k_n}z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}.$$

Обозначим через Λ_α^p, $0 < p \le 1, \alpha = (\alpha_1,...\alpha_n)$ $(\alpha_j > -1, 1 \le j \le n)$ класс функций $f \in H(U^n)$, для которых при $\beta_j > (\alpha_j+2)/p$, $1 \le j \le n$ выполнена оценка

$$||f||_{\Lambda_\alpha^p} = \sup_{z\in U^n}\left\{|D^{1+\beta}f(z)|(1-|z|)^{\beta+2-\frac{\alpha+2}{p}}\right\} < +\infty, \quad \beta = (\beta_1,...\beta_n) \in Z_+^n.$$

Определение. Скажем, что суммируемая на T^n функция h принадлежит классу LR, если коэффициенты Фурье этой функции равны нулю вне множества $Z_+^n \cup (-Z_+^n)$. Всюду ниже будем пользоваться обозначениями $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Кроме того, всегда будем полагать, что $h \in LR$ и через $H^p(U^n)$ будем обозначать класс Харди в U^n.

§1. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРА $T_h(f)$ В ПРОСТРАНСТВАХ $H^p(\alpha)$, $0 < p \leq 1$

Наша цель - доказать нижеприведенную теорему.

Теорема 1. *Пусть $0 < p \leq 1$ и $h \in LR$. Тогда следующие утверждения равносильны :*

1) $T_h(f)$ ограниченно действует в $H^p(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $1 \leq j \leq n$.

2) Имеет место разложение $h = h_1 + \overline{h}_2$, где $h_1 \in H^\infty(U^n)$, а $h_2 \in \Lambda_\alpha^p$.

Доказательству этой теоремы предпошлем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где α_j $(1 \leq j \leq n)$ – неотрицательные целые числа. Тогда*

$$D^\alpha f(z) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}(f(z) z^\alpha)}{\partial z^\alpha}, \quad z = (z_1, ..., z_n), \ \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Доказательство. Очевидно, что при любом $z = (z_1, ..., z_n) \in U^n$

$$D^\alpha f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k,$$

где $\Gamma(\alpha_j + k_j + 1)/(\Gamma(\alpha_j + 1)\Gamma(k_j + 1)) = (\alpha_j! + k_j!)/(\alpha_j! \kappa_j!)$ и $\alpha \in Z_+^n$. Далее, вычислим коэффициенты при z^k в разложении функции $\partial^{|\alpha|}(f(z)z^\alpha)/\partial z^\alpha$. Ясно, что

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f(z) z^\alpha)}{\partial z^\alpha} = \sum_{|k|=0}^{+\infty} (k + \alpha) \cdots k a_k z^k.$$

Однако

$$(k_j+\alpha_j)\cdots k_j=\frac{(k_j+\alpha_j)!\alpha_j!}{k_j!\alpha_j!}=\frac{\Gamma(k_j+\alpha_j+1)}{\Gamma(k_j+1)\Gamma(\alpha_j+1)}\alpha_j!.$$

Следовательно

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(f(z)z^\alpha)}{\partial z^\alpha}=\alpha_1!\cdots\alpha_n!D^\alpha f(z).$$

Лемма 2. *Если* $h\in H^\infty(U^n)$, *то*

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_j}h(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_j^{k_j}}\right|\le\frac{const}{(1-|z_1|)^{k_1}\cdots(1-|z_j|)^{k_j}},\quad 1\le j\le n.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\Gamma_j=\left\{\zeta_j:\zeta_j=z_j+\eta(1-|z_j|e^{i\theta_j}\right\},\quad a\zeta_j=\rho_j d\theta_j,\ j=1,2,\ldots,n.$$

Применяя формулу Коши и полагая $\Gamma^j=\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_j$, получим

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_j}h(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdot\partial z_j^{k_j}}=\frac{1}{(2\pi i)^j}\int_{\Gamma^j}\frac{h(\zeta_1,\ldots,\zeta_j,z')d\zeta_1\cdots d\zeta_j}{(\zeta_1-z_1)^{k_1+1}\ldots(\zeta_j-z_j)^{k_j+1}},\quad z'=(z_{j+1},\ldots,z_n).$$

Отсюда следует, что при $1\le j\le n$

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_j}h(z)}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_j^{k_j}}\right|\le$$

$$\le\frac{C}{(2\pi i)^j}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta_1\cdots d\theta_j}{(1-|z_1|)^{k_1}\cdots(1-|z_j|)^{k_j}}=\frac{\text{const}}{(1-|z_1|)^{k_1}\cdots(1-|z_j|)^{k_j}}.$$

Лемма 3. $\Lambda^p_\alpha\subseteq H^\infty(U^n)$.

Доказательство. Пусть $h\in\Lambda^p_\alpha$. Тогда

$$|D^{\beta+1}h(z)|\le\frac{\text{const}}{(1-|z|)\beta+2-(\alpha+2)/p},$$

если только $\beta_j>(\alpha_j+2)/p$, $1\le j\le n$ и $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$. Используя определение $D^{\beta+1}$, получим

$$h(re^{i\theta})=c(\beta+1)\int_0^1\cdots\int_0^1(1-t)^\beta D^{\beta+1}h(tre^{i\theta})dt,\quad r=(r_1,\ldots,r_n)$$

(здесь и в дальнейшем через $c(\cdots)$ или $C(\cdots)$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от $(\cdots)$). Так как $2-(\alpha+2)/p<1$, $1\le j\le n$, из последнего равенства следует, что

$$|h(re^{i\theta})|\le c(\beta+1)\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{(1-t)^\beta dt}{(1-rt)^{\beta+2-(\alpha+2)/p}}\le \mathrm{const}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $T_h(f)$ действует ограниченно в пространстве $H^p(\alpha)$. Тогда $||T_h(f)||_{H^p_\alpha}\le c(p)||f||_{H^p_\alpha}$. Следовательно, $T_h(f)(0)$ – непрерывный линейный функционал на $H^p(\alpha)$. По теореме 6 из работы [7] существует функция $g\in\Lambda^p_\alpha$ такая, что

$$T_h(f)(0)=\lim_{\rho\to1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}dm_n(\zeta).$$

Но с другой стороны

$$T_h(f)(0)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}f(\zeta)h(\zeta)dm_n(\zeta)$$

для любой функции $f\in H^p(\alpha)$. Взяв $f(\zeta)=\zeta_1^{k_1}\cdots\zeta_n^{k_n}$, получим

$$c_{k_1,\dots,k_n}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\zeta^k h(\zeta)dm_n(\zeta),\qquad C_{k_1,\dots,k_n}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}\zeta^k\overline{g(\zeta)}dm_n(\zeta).$$

Отсюда следует, что $h(\zeta)-\overline{g(\zeta)}\in H^1(U^n)$ и, тем самым, $h(\zeta)=\overline{g(\zeta)}+h_1(\zeta)$, где $h_2\equiv g$. Таким образом, $h=h_1+\overline{h}_2$, где $h_1\in H^1(U^n)$, $h_2\in\Lambda^p_\alpha$. Ниже мы докажем, что в действительности $h_1\in H^\infty(U^n)$. Ясно, что $T_h(f)(z)=T_{h_1}(f)(z)+T_{\overline{h}_2}(f)(z)$, $z\in U^n$. Докажем, что при $h_2\in\Lambda^p_\alpha$ оператор

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta \tag{1}$$

ограниченный. Так как $f\in H^p(\alpha)$, то применяя теорему М. М. Джрбашяна придем к представлению

$$f(z)=\int_{U^n}D_m(\zeta,z)f(\zeta)dm_{2n}(\zeta), \tag{2}$$

где $D_m(\zeta, z)$ – многомерное ядро М. М. Джрбашяна. Подставив (2) в (1), в силу теоремы Фубини можно поменять порядок интегрирования. Тем самым

$$T_{h_2}(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\frac{m+1}{\pi^n}\int_{U^n}(1-|\zeta|^2)^m f(\zeta)\int_{T^n}\frac{\overline{h_2(t)}dt}{(t-z)(1-\overline{\zeta}t)}dm_{2n}(\zeta)$$

(здесь и далее предполагаем, что числа m и m_j $(1 \le j \le n)$ достаточно большие). Вычислим последний интеграл. Ввиду того, что $d\overline{t_j} = -ie^{-i\varphi_j}d\varphi_j$, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{\overline{h_2(t)}dt}{(t-z)(1-\overline{\zeta}t)}dm_{2n}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T^n}\frac{\overline{h_2(t)}dt}{(t-z)(1-\overline{\zeta}t)}dm_{2n}(\zeta) =$$
$$= \frac{1}{(m+1)!}\overline{\frac{\partial^{|m+1|}}{\partial\zeta^{m+1}}\left(\frac{h_3(\zeta)}{1-\zeta\overline{z}}\right)},$$

где $h_3(\zeta) = h_2(\zeta)\zeta^{m+1}$. Используя многомерный аналог теоремы Лейбница, можно записать

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z) =$$
$$= \frac{1}{m!\pi^n}\sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{m_1+1,\dots,m_n+1} C_{m_1+1}^{k_1}\cdots C_{m_n+1}^{k_n}\int_{U^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^m f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^{m+2-k}}\overline{\frac{\partial^{|k|}h_3(\zeta)}{\partial\zeta^k}}dm_{2n}(\zeta).$$

Обозначив

$$T_{\overline{h}_2}(f)(z) = \int_{U^n}\frac{(1-|\zeta|^2)^m f(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}z)^{m+2-k}}\overline{\frac{\partial^{|k|}h_3(\zeta)}{\partial\zeta^k}}dm_{2n}(\zeta), \quad 0 \le k_j \le m_j+1,\ 1 \le j \le n,$$

достаточно оценить норму $||T_{\overline{h}_2}(f)||_{H^p(\alpha)}$ $(0 \le k_j \le m_j+1,\ 1 \le j \le n)$. Учитывая, что $0 < p \le 1$, получим

$$\int_{U^n}|T^k_{\overline{h}_2}f(z)(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \le c(m,\pi)\sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{+\infty}\sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{2^{s_1}-1}\sum_{l_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1}\cdots\sum_{l_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1}\times$$
$$\times\int_{U^n}\left|\int_{\Delta_{s,l}}\frac{(1-|\zeta|^2)^m}{(1-\overline{\zeta}z)^{m+2+k}}f(\zeta)\overline{\frac{\partial^{|k|}h_3(\zeta)}{\partial\zeta^k}}dm_{2n}(\zeta)\right|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \equiv \mathcal{J},$$

где

$$\mathcal{J} \le c(m,\pi)\sum_s\sum l_1\cdots\sum_{l_n}\max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{s,l}}\left\{(1-|\zeta|^2)^{mp}|f(\zeta)|^p\mathcal{J}_{s,l}\right\},$$

$$\mathcal{J}_{s,l} = \int_{U^n}\left(\int_{\Delta_{s,l}}\frac{dm_{2n}(\zeta)}{|1-\overline{\zeta}z|^{m+2-k}}\right)^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z).$$

Для оценки последнего интеграла достаточно получить оценку лишь для одного из вполне однотипных факторов его представления $\mathcal{J}_{s,l} = \mathcal{J}_{s_1,l_1}\times\cdots\times\mathcal{J}_{s_n,l_n}$.

При этом, для простоты изложения этот фактор будем записывать без вторых индексов – как $\mathcal{J}_{s,l}$. Используя определение прямоугольников $\Delta_{s,l}$ из [7], можно записать

$$\mathcal{J}_{s,l} = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\alpha_{s,l}} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta + \int_0^1 \int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta +$$

$$+ \int_0^1 \int_{\alpha_{s,l+1}}^{\pi} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta = I^1 + I^2 + I^3,$$

где

$$I_{s,l} = \left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}} \int_{\alpha_{s,l}}^{\alpha_{s,l+1}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi} z|^{m+2-k}} \right)^p$$

при $\rho_s = 1 - 1/2^s$, $\alpha_{s,l} = \pi e/2^s$, $s = 0, 1, ...$ и $-2^s \le e \le 2^s$. Оценим интегралы $I^{1,2,3}$ по отдельности. Для этого положим

$$p(m_i + 2 - k_i) - \alpha_i > 2 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, ..., j,$$

$$p(m_i + 2 - k_i) - \alpha_i < 2 \quad \text{при} \quad i = j+1, ..., \nu,$$

$$p(m_i + 2 - k_i) - \alpha_i = 2 \quad \text{при} \quad i = \nu+1, ..., n.$$

Во первых, пользуясь очевидными неравенствами

$$|1 - z\rho e^{-i\varphi}| \ge \frac{1}{4}|1 - z\rho_{s+1} e^{-i\varphi}|, \quad s \ge 2, \rho_s \le \rho \le \rho_{s+1}, |z| \ge \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\rho e^{i\theta}|^\lambda} \le \frac{C(\lambda)}{(1-r\rho)^{\lambda-1}} \quad (\lambda > 1)$$

и леммой 2 из [7], для I^1 нетрудно получить оценку

$$I^1 \le \frac{C(p)|\Lambda_{s,l}|^p}{(1-\rho_{s+1})^{p(m+2-k)-\alpha-2}}.$$

Те же рассуждения приводят к оценке

$$I^3 \le \frac{C(p)|\Lambda_{s,l}|^p}{(1-\rho_{s+1})^{p(m+2-k)-\alpha-2}}, \quad 1 \le i \le j. \ .$$

Для I^2 при $1 \le i \le j$ очевидно имеем

$$I^2 \le C(\alpha_{s,l+1} - \alpha_{s,l})|\Lambda_{s,l}|^p \int_0^1 \frac{(1-r)^\alpha r dr}{(1-\rho_{s+1} r)^{(m+2-k)p}}.$$

Далее, учитывая, что $\alpha_{s,l+1} - \alpha_{s,l} = 2\pi\ (\rho_{s+1} - \rho_s)$, в силу леммы 2 получим

$$I^2 \leq \frac{C(p)|\Lambda_{s,l}|^p}{(1-\rho_{s+1})^{p(m+2-k)-\alpha-2}}, \quad 1 \leq i \leq j.$$

Таким образом, при $i = 1, 2, ..., j$

$$\mathcal{J}^j_{s,l} \leq \frac{C_1(p)|\Lambda_{s_1,l_1}|^p \cdots |\Lambda_{s_j,l_j}|^p}{\prod_{i=1}^j (1-\rho_{s_i+1})^{p(m_i+2-k_i)-\alpha_i-2}}. \tag{5}$$

Пользуясь теми же обозначениями, оценим $\mathcal{J}_{s,l}$ при $i = j+1, ..., \nu$. Ясно, что

$$\mathcal{J}_{s,l} = \int_{U^n} \left(\int_{\Lambda_{s,l}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\overline{\zeta} z|^{m+2-k}} \right)^p (1-r)^\alpha dm_2(z) \leq |\Lambda_{s,l}|^p \int_U \sup_{\zeta \in \overline{\Lambda}_{s,l}} \frac{(1-r)^\alpha dm_2(z)}{|1-\overline{\zeta} z|^{(m+2-k)p}}.$$

Имея в виду, что $i = j+1, ..., \nu$, получим

$$\mathcal{J}_{s,l} \leq \int_0^1 |\Lambda_{s,l}|^p \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r(1-r)^\alpha dr d\theta}{|1-\overline{\zeta}_{s,l} z|^{(m+2-k)p}} \leq C_2(p)|\Lambda_{s,l}|^p.$$

Отсюда

$$\mathcal{J}^\nu_{s,l} \leq C_2(p)|\Lambda_{s_{j+1},l_{j+1}}|^p \cdots |\Lambda_{s_j,l_j}|^p. \tag{6}$$

Наконец, оценим $\mathcal{J}_{s,l}$ при $\nu + 1 \leq i \leq n$. Для этого, как и выше, начнем с оценки $I_{s,l}$ при $i = 1, 2, ..., j$. Воспользовавшись леммой 2 работы [7], получим

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} I_{s,l}(1-r)^\alpha r dr d\theta \leq C_3(p)|\Lambda_{s,l}|^p \int_0^1 \frac{(1-r)^\alpha r dr}{(1-\rho_{s+1} r)^{(m+2-k)p}} \leq$$
$$\leq C_3(p)|\Lambda_{s,l}|^p \int_0^1 \frac{r dr}{1-\rho_{s+1} r}.$$

Следовательно

$$\mathcal{J}^n_{s,l} \leq |\Lambda_{s_{\nu+1},l_{\nu+1}}|^p \cdots |\Lambda_{s_m,l_n}|^p \log \frac{1}{1-\rho_{s_{\nu+1}}} \cdots \log \frac{1}{1-\rho_n}. \tag{7}$$

Объединяя оценки (5) – (7) заключаем, что

$$\mathcal{J}_{s,l} \leq \frac{C(p)|\Lambda_{s_1,l_1}|^p \cdots |\Lambda_{s_m,l_n}|^p}{\prod_{i=1} j(1-\rho_{s_j+1})^{p(m_j+2-k_j)-\alpha_j-2}} \prod_{i=\nu+1}^n \log \frac{1}{1-\rho_{s_i+1}}. \tag{8}$$

Перейдем теперь к оценке величины $\partial^{|k|} h_3(z)/\partial z^k$. Так как $h_2 \in \Lambda^p_\alpha$, то для достаточно больших m_i, $1 \leq i \leq n$

$$|D^{m+1} h_2(z)| \leq \frac{\text{const}}{(1-|z|)^{m+2-(\alpha+2)/p}}.$$

Воспользовавшись леммами 1 и 2 и учитывая, что $1 \leq i \leq j$, $\nu + 1 \leq i \leq n$, интегрированием последнего неравенства по $z_1, ..., z_j, z_{\nu+1}, ..., z_n$ (по радиусу) получим

$$\left|\frac{\partial^{|k|}h_3(z)}{\partial z^k}\right| \le$$

$$\le \frac{C(\alpha)}{\prod_{i=1}^{j}(1-|z_i|)^{k_i}\prod_{i=j+1}^{\nu}(1-|z_i|)^{m_i+2-(\alpha_i+2)/p}\prod_{i=\nu+1}^{n}(1-|z_i|)^{k_i+1-(\alpha_i+2)/p}}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует оценка

$$\mathcal{J} \le \tilde{C}(p)\sum_{s_1\ldots s_n}\sum_{l_1\ldots l_n}\max_{\zeta\in\overline{\Delta}_{s,l}}\left\{|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^{\alpha+2}\times\right.$$

$$\left.\times(1-|\zeta_{\nu+1}|)^{(m_{\nu+1}-k_{\nu+1}+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_{\nu+1}|}\cdots(1-|\zeta_n|)^{(m_n-k_n+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_n|}\right\}.$$

Оценим величину $(1-|\zeta_n|)^{(m_n-k_n+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_n|}$ при $i=\nu+1,\ldots,n$. По условию $(m_i-k_i+2)p=\alpha_i+2$ при $i=\nu+1,,\ldots,n$. Отсюда следует, что $(m_i-k_i+2)p=$ $=\alpha_i+2-p>1-p\ge 0$, т. е. при $\nu+1\le i\le n$ всегда $(m_i-k_i+1)p>0$. Поэтому

$$\sup_{\zeta_i}\left\{(1-|\zeta_i|)^{(m_i-k_i+1)p}\log\frac{1}{1-|\zeta_i|}\right\}<\text{const}.$$

Тем самым, пользуясь леммой 4 из [7] получим

$$\int_{U^n}|T^k_{\overline{h}_2}(f)(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z)\le\tilde{C}(p)\int_{U^n}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha dm_{2n}(\zeta)=$$
$$=\tilde{C}(p)\|f\|^p_{H^p(\alpha)}<+\infty.$$

Поскольку $T_{\overline{h}_2}(f)$ – конечная сумма от $T^k_{\overline{h}_2}(f)$, очевидно $T_{\overline{h}_2}(f)\in H^p(\alpha)$.

Теперь покажем, что $h_1\in H^\infty(U^n)$. Для этого заметим, что

$$T_{h_1}(f)(z)=f(z)h_1(z)\quad\text{и}\quad \|T_{h_1}(f)\|_{H^p(\alpha)}\le\|T_h(f)\|_{H^p(\alpha)}+\|T_{\overline{h}_2}(f)\|_{H^p(\alpha)}.$$

Далее, положим

$$f_r(z)=\frac{C(r)}{(1-z)^k},\quad r=(r_1,\ldots,r_n),\ r_i\in(0,1)\,(1\le i\le n),\ k=(k_1,\ldots,k_n)\in Z^n_+$$

и выберем k_j таким образом, чтобы $\|f_r\|_{H^p(\alpha)}\sim\text{const}$. Тогда нетрудно установить, что

$$C(r)=(1-r)^{k-(\alpha+2)/p}\quad\text{и}\quad\int_{U^n}|f_r(z)|^p|h_1(z)|^p(1-|z|)^\alpha dm_{2n}\le C(p).$$

Взяв

$$\Lambda_{l_j} = \left\{ z_j : \quad |\arg z_j| < \frac{1-r_j}{2}, \frac{3r_j - 1}{2} < |z_j| < \frac{1+r_j}{2} \right\}, \quad \Lambda_l = \Lambda_{l_1} \times \cdots \Lambda_{l_n},$$

получим

$$\int_{\Lambda_l} |f_r(z)|^p |h_1(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \le \int_{U^n} |f_r(z)|^p |h_1(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z).$$

На Λ_l имеет место оценка $|f_r(z)| \ge C(r)(1-r)^{-k}$. Поэтому

$$\frac{C_0}{(1-r)^2} \int_{\Lambda_l} |h_1(z)|^p dm_{2n}(z) \le \text{const}.$$

Далее, функция $g(z) = |h_1(z)|^p$ является n-субгармонической. Следовательно

$$g(r) \le \frac{C}{\pi^n (1-r)2} \int_{K(r)} |h_1(z)|^p dm_{2n} \le \text{const},$$

где $K(r)$ – полидиск с центром в $r = (r_1, ..., r_n)$. Отсюда вытекает, что $|h_1(r)| \le$ $\le$ const. Взяв вместо $f_r(z)$ функцию $f_r(e^{i\theta}z)$, получим $|h_1(e^{i\theta})| \le$ const, т. е. $h_1 \in H^\infty(U^n)$.

Обратно, пусть $h = h_1 + \overline{h}_2$, где $h_1 \in H^\infty(U^n)$, $h_2 \in \Lambda^p_\alpha$. Тогда $T_h(f)(z) =$ $= T_{h_1}(f)(z) + T_{h_2}(f)(z)$, $z \in U^n$. Ограниченность $T_{\overline{h}_2}(f)$ доказана. С другой стороны, $T_{\overline{h}_1}(f)(z) = h_1(z)f(z)$. Тем самым

$$\begin{aligned} ||T_{h_1}(f)||^p_{H^p(\alpha)} &= \int_{U^n} |f(z)h_1(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) \le \\ &\le C(p) \int_{U^n} |f(z)|^p (1-|z|)^\alpha dm_{2n}(z) = C(p)||f||^p_{H^p(\alpha)} < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно

$$||T_h(f)||_{H^p(\alpha)} \le ||T_{h_1}(f)||_{H^p(\alpha)} + ||T_{\overline{h}_2}(f)||_{H^p(\alpha)} \le \bar{C}(p)||f||^p_{H^p(\alpha)},$$

и теорема доказана.

ABSTRACT. The paper establishes a complete characteristic of those $h \in L^1(T^n)$ for which the Toeplitz operator

$$T_h(f)(z_1, ..., z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} \frac{f(\zeta_1, ..., \zeta_n) h(\zeta_1, ..., \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)} dm_{2n}(\zeta_1, ..., \zeta_n),$$

is a bounded operator in some spaces of functions f analytic in the polydisk, for which

$$\int_{U^n} |f(z_1, ..., z_n)|^p (1 - |z_1|)^{\alpha_1} (1 - |z_2|)^{\alpha_2} \cdots (1 - |z_n|)^{\alpha_n} dm_{2n}(z_1, ..., z_n) < +\infty.$$

Here U^n is the unit polydisk of C^n, dm_{2n} is the $2n$-dimensional Lebesgue measure in U^n and T^n-is the distinguished boundary of the polydisk U^n.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении функций, мероморфных в круге", ДАН Армянской ССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
2. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Ин-та математики и механики АН Армянской ССР, Вып. 2, стр. 3 – 30, 1948.
3. Ф. А. Шамоян, "Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций", Изв. АН Армянской ССР, Математика, т. 8, № 6, стр. 474 – 490, 1973.
4. Ф. А. Шамоян, "Теплицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций", ДАН Армянской ССР, т. 76, № 3, стр. 109 – 113, 1983.
5. B. Joericke, "Multidimensional analog of Privalov's theorem", Math. Nachrichten, v. 107, pp. 222 – 233, 1982.
6. J. P. Kahane, "Best approximation in $L^1(T)$", Bull. Amer. Math. Soc., v. 80, № 5, pp. 788 – 804, 1974.
7. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и вопросы представимости в некоторых анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", Сиб. мат. журнал, т. 31, № 2, 1990.

6 февраля 1995

Брянский государственный университет,
Ереванский государственный университет