Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

РАСШИРЕНИЕ ТЕОРИИ ФАКТОРИЗАЦИИ М. М. ДЖРБАШЯНА*

А. М. Джрбашян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том. 30, № 2, 1995

В статье построенная М. М. Джрбашяном теория факторизации мероморфных в единичном круге функций расширена вплоть до исчерпывающей теории представлений типа Рисса δ-субгармонических функций. Общая теория построена по новому, упрощенному методу, подобному примененному при построении теории автора в полуплоскости и основанному на обратимости оператора L_ω М. М. Джрбашяна. Получен окончательный результат, относящийся к качественному сравнению ω-характеристических функций М. М. Джрбашяна с неванлинновскими характеристиками. Также получен частный результат, относящийся к проблеме вложения N_ω классов М. М. Джрбашяна и к аналогичной задаче для рассмотренных классов δ-субгармонических функций.

ВВЕДЕНИЕ

На Международной конференции по теории аналитических функций, Ереван 1965, М. М. Джрбашяном [1] была предложена общая идея расширения его теории факторизации классов N_α функций, мероморфных в круге (см. [2], гл. IX) до теории представлений типа Рисса определенных классов субгармонических функций. Поскольку основной отправной точкой этой идеи является замена $\log|f(z)|$ произвольной субгармонической функцией $u(z)$ и произведений типа Бляшке М. М. Джрбашяна – определенными потенциалами типа Грина, эта идея имеет смысл также при применении к его более поздней, исчерпывающей

---

*Работа частично финансирована исследовательским грантом акционерного общества "Закнефтегазстрой-Прометей"

теории факторизации и граничных свойств функций, мероморфных в единичном круге, часто называемой N_ω-теорией [3] – [7]. Однако, с 1965 года по расширению N_ω-теории получены лишь немногие результаты (см. [8] – [10], где в некотором частном случае решены сопряженные задачи).

В этой статье построена исчерпывающая теория представлений типа Рисса функций δ-субгармонических в единичном круге комплексной плоскости (т. е. представимых в $|z| < 1$ в виде разности двух субгармонических функций). Общая теория построена по упрощенному методу, аналогичному примененному в теории автора в полуплоскости [11]. Этот метод позволяет некоторым образом отождествлять рассматриваемые аналоги N_ω-классов с вполне определенными подмножествами неванлинновского класса N, рассматриваемого для δ-субгармонических функций. Рассуждения основаны на новых результатах об обратимости оператора L_ω М. М. Джрбашяна и о представлениях рассмотренных потенциалов типа Грина посредством обычных гриновских потенциалов со специальным распределением массы. Получен также окончательный результат, относящийся к качественному сравнению ω-характеристик М. М. Джрбашяна с характеристиками Неванлинны. Кроме того, доказан результат о вложении рассматриваемых классов δ-субгармонических функций, что приводит к частичному решению проблемы вложения N_ω классов М. М. Джрбашяна, которую можно сформулировать также в виде хаусдорфовой проблемы моментов [3, 12]. Решение последней в случае, когда классы N_ω являются *подмножествами* неванлинновского класса N мероморфных функций ограниченного вида в $|z| < 1$, ранее было найдено И. В. Островским [13]. Однако, здесь мы рассматриваем только аналоги классов N_ω, *содержащих* N, т. е. некоторые классы δ-субгармонических функций, *содержащие* функции, представимые в $|z| < 1$ в виде разности двух неотрицательных субгармонических функций и исчерпывающие все множество функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$.

Вспомогательные результаты §1 являются аппаратом, использованным в §2 для построения общей теории. Доказательства утверждений §1 отодвинуты в §3.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Начнем с некоторых упрощений общей операции интегродифференцирования типа Римана–Лиувилля L_ω, использованной в N_ω-теории. Оператор L_ω определен в [3] следующим образом. Функция $\omega(x)$ принадлежит классу Ω, если она положительна в $[0,1)$, $\omega(0) = 1$ и

$$\int_0^1 \omega(x)dx < +\infty.$$

Далее, функция $P(t)$ принадлежит классу P_ω, если при некотором $\omega(x) \in \Omega$ имеем

$$P(0) = 1 \quad \text{и} \quad P(t) = t\int_t^1 \frac{\omega(x)}{x^2}dx, \quad 0 < t < 1. \tag{1.1}$$

Если $P(t) \in P_\omega$, то для измеримой в $|z| < R \leq +\infty$ функции $u(z)$ формально

$$L_\omega u(re^{i\varphi}) = -\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^1 u(tre^{i\varphi})dP(t)\right\}.$$

Использование этого определения оператора L_ω было целесообразно в N_ω-теории ввиду его приспособленности к обоим случаям $\omega(1-0) = 0$ и $\omega(1-0) = = +\infty$. Однако, можно убедиться в том, что какие-либо ограничения на гладкость функции $\omega(x)$ вблизи *левого* конца интервала $(0,1)$, по существу, не приводит к потере общности в N_ω-теории. Поэтому могут быть успешно применены также упрощенные формы оператора L_ω, данные в нижеприведенной лемме.

Лемма 1.1. 1°. *Если функция $\omega(x) \in \Omega$ такова, что $\omega(1-0) = 0$, $\omega'(x)$ существует при любом $x \in [0,1)$ и принадлежит $L_1(0,1)$, и, кроме того*

$$t\log t\int_t^1 \frac{\omega'(x)}{x}dx = o(1) \quad \text{при} \quad t \to +0, \tag{1.2}$$

то для любой функции $u(z)$, δ-субгармонической в $|z| < R \leq +\infty$

$$L_\omega u(z) = -\int_0^1 u(tz)d\omega(t), \quad |z| < R. \tag{1.3}$$

2°. *Для любых функций $\omega(x) \in \Omega$ и $u(z)$, гармонической в $|z| < R \le +\infty$*

$$L_\omega u(z) = u(0) + L_{\omega_1} U(z), \quad |z| < R, \tag{1.4}$$

где оператор L_{ω_1} определен как в (1.5), но

$$\omega_1(t) = \int_t^1 \frac{\omega(x)}{x} dx \notin \Omega \quad и \quad U(z) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} u(z).$$

Замечание. Первое утверждение леммы 1.1 распространяет одну из формул леммы 2 работы [3] на δ-субгармонические функции, а второе утверждение, по существу, доказано в [3]. Кроме того, из (1.5) очевидно, что L_ω является обобщением оператора интегродифференцирования Римана–Лиувилля, поскольку приобретает такую форму при

$$\omega(x) = \frac{(1-x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad \alpha > 0.$$

В следующей лемме мы называем область $G \subseteq \mathbf{C}$ *звездообразной*, если наряду с любой точкой $z \in G$ она содержит отрезок $[0, z]$.

Лемма 1.2. 1°. *Пусть функция $\omega(x) \in \Omega$ такова как в утверждении 1° леммы 1.1 и, кроме того, пусть $\omega(x)$ непрерывно дифференцируема в $[0, 1)$ и при некотором $\beta > 0$*

$$|\omega(t)| \le O\left((1-t)^\beta\right) \quad \text{при} \quad t \to 1-0. \tag{1.5}$$

Далее, пусть функция $u(z)$ субгармонична в некоторой звездообразной области G. Тогда функция $L_\omega u(z)$ субгармонична в G и непрерывна в $G \setminus \{0\}$. Кроме того, если $u(0) \ne -\infty$, то $L_\omega u(z)$ непрерывна также в точке $z = 0$.

2°. *Если $u(z)$ голоморфна или гармонична в звездообразной области G, то при любом $\omega(x) \in \Omega$ такого же типа в G и функция $L_\omega u(z)$. Кроме того, если $L_\omega u(z) \equiv C = const$ в окрестности начала координат, то $u(z) \equiv C$.*

1.2. Ниже приведены некоторые свойства потенциалов типа Грина, построенных с применением факторов типа Бляшке М. М. Джрбашяна

$$A_\omega(z,\zeta) = \exp\left\{-\int_{|\zeta|}^{1}\left[C_\omega\left(\frac{z}{\zeta}x\right) + C_\omega\left(\frac{z\bar{\zeta}}{x}\right) - 1\right]\frac{\omega(x)}{x}dx\right\},$$

$$A_\omega(z,\zeta)\Big|_{\omega(t)\equiv 1} = A(z,\zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\frac{|\zeta|}{\zeta}, \tag{1.6}$$

$$A_\omega(z,0) = z, \quad C_\omega(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \quad \Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx.$$

Следует отметить, что при любом $\omega(x) \in \Omega$ функция $A_\omega(z,\zeta)$ ($|\zeta| < 1$) голоморфна в $|z| < 1$ и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке $z = \zeta$ (см. [4], лемму 1.5 и формулы (1.9), (1.64) – (1.68)).

Теорема 1.1. *Пусть $\omega(x) \in \Omega$ – любая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 \frac{|1-\omega(x)|}{x}dx < +\infty.$$

и пусть $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера в $|\zeta| < 1$ такая, что

$$\iint_{|\zeta|<1}\left(\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)dx\right)d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{1.7}$$

1°. *Тогда потенциал типа Грина*

$$I_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1}\log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) \tag{1.11}$$

– субгармоническая в $|z| < 1$ функция.

2°. *Если наряду с (1.7) $\nu(\zeta)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_{|\zeta|<1}(1-|\zeta|)d\nu(\zeta) < +\infty, \tag{1.8}$$

то

$$I_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1}\log|A(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} S_\omega(ze^{-i\theta})d\psi(\theta), \quad |z| < 1, \tag{1.9}$$

где

$$S_\omega(z) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \quad |z| < 1,$$

а $\psi(\theta)$ – *ограниченная в* $[0, 2\pi]$ *функция, которую можно найти из соотношения*

$$\psi(\theta) = \lim_{r\to 1-0}\int_0^\theta L_\omega[I_\omega(re^{i\varphi}) - I(re^{i\varphi})]d\varphi, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.10}$$

При этом, если $\omega(x)$ – *невозрастающая функция, то* $\psi(\theta)$ – *неубывающая в* $[0, 2\pi]$ *и наоборот.*

Ниже приведено иное представление потенциала типа Грина, осуществляемое посредством обычного гриновского потенциала, справедливое при $\omega(x)$, удовлетворяющем некоторым условиям гладкости в $[0, 1]$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\omega(x)$ $(\omega(0) = 1)$ – *положительная, непрерывно дифференцируемая в* $[0, 1)$ *функция, удовлетворяющая условию (1.5). Далее, пусть* $\nu(\zeta)$ – *неотрицательная борелевская мера в* $|\zeta| < 1$, *подчиненная условию (1.7). Тогда функция* $L_\omega I_\omega(z)$ *субгармонична и непрерывна в* $0 < |z| < 1$. *Кроме того, в* $|z| < 1$ *имеет место представление*

$$L_\omega I_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1} L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<1} \log|A(z,\zeta)|d\nu_\omega(\zeta), \tag{1.11}$$

где

$$\nu_\omega(E) = L_\omega\nu(E) \equiv -\int_0^1 \omega'(t)\nu(tE)dt \tag{1.12}$$

для любого борелевского множества E, *компактно содержащегося в* $\{|z| < 1\}$.

Обратимость оператора L_ω в классе гармонических функций, вытекающая из следующей теоремы, необходима для дальнейших построений.

Теорема 1.3. *Пусть функция* $U(z)$ *субгармонична в* $|z| < 1$, *и пусть* $\omega(x)$ – *невозрастающая в* $[0, 1)$ *функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1.2. Если* $L_\omega U(z) \equiv 0$ *в* $|z| < 1$, *то* $U(z) \equiv 0$.

Замечание. Как было отмечено выше, при $\omega(x) = (1 - x)^\alpha$, $\alpha > 0$, оператор L_ω переходит в дробное интегрирование Римана–Лиувилля. Тем самым, в этом случае L_ω имеет обратное, являющееся дробным дифференцированием такого же типа. В общем случае задача обратимости оператора L_ω была рассмотрена в [4] (теоремы Б и В) с целью нахождения явного вида обратного оператора. Это было достигнуто только в случае, когда $\omega(1-0)=+\infty$. В предыдущей же теореме рассматривается случай $\omega(1-0)=0$.

1.3. Ниже мы приводим лемму о разложимости оператора L_ω.

Лемма 1.3. *Пусть функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3 и, кроме того, пусть*

$$\omega_2(x)\equiv 1, \quad 0\le x\le \varepsilon_o$$

при некотором $\varepsilon_o\in(0,1)$. Тогда функция

$$\omega_3(x)=-\int_x^1 \omega_2\left(\frac{x}{t}\right)d\omega_1(t)=-\int_x^1 \omega_1\left(\frac{x}{t}\right)d\omega_2(t) \tag{1.13}$$

принадлежит Ω_s и справедливы равенства

$$\omega_3'(x)=-\int_x^1 \omega_1'(t)\omega_2'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}=-\int_x^1 \omega_2'(t)\omega_1'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}. \tag{1.14}$$

Кроме того, если $u(z)$ – функция, δ-субгармоническая в звездообразной области D, то

$$L_{\omega_3}u(z)=L_{\omega_1}L_{\omega_2}u(z)=L_{\omega_2}L_{\omega_1}u(z), \quad z\in D. \tag{1.15}$$

§2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Метод построения нижеприводимой общей теории представлений типа Рисса функций, δ-субгармонических в $|z|<1$, основан на обратимости оператора L_ω и приведенных в предыдущем параграфе свойствах потенциалов типа Грина. Этот метод позволяет привести проблему представления к хорошо известному неванлинновскому случаю, когда функция – “ограниченного вида”, т. е. представима в $|z|<1$ как разность двух неположительных субгармонических функций. Всюду ниже будем говорить, что функция $u(z)$ δ-субгармонична в области D, если $u(z) \not\equiv \pm\infty$ и имеет место представление $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_{1,2}(z)$ - субгармонические в D функции.

2.1. Начнем с неванлинновской теории. Пусть функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z| < R \leq +\infty$, и пусть $\nu(\zeta)$ – ассоциированная с ней мера. Для любого борелевского множества $E \subset \{|z| < R\}$, компактно содержащегося в $\{|z| < R\}$ (т. е. такого, что $\overline{E} \subset \{|z| < R\}$), обозначим

$$\nu_\pm(E) = \iint_E (d\nu(\zeta))^\pm .$$

Отметим, что мы пользуемся *верхними* индексами "+" и "−" как обычно, полагая $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a = a^+ - a^-$. Последний же интеграл можно понимать как $\sup\left\{\sum_k [\nu(E_k)]^+\right\}$, взятый по всевозможным разложениям $E = \bigcup_k E_k$, где E_k – непересекающиеся борелевы множества. Очевидно $\nu(E) = \nu_+(E) - \nu_-(E)$ и

$$\iint_E |d\nu(\zeta)| = \iint_E d\nu_+(\zeta) + \iint_E d\nu_-(\zeta).$$

Взяв $z = 0$ *в разности* риссовских представлений $u(z)$ в $|z| < r$ и в $|z| < r_o$ $(0 < r_o < r < R)$, приходим к формуле Иенсена–Неванлинны :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_o e^{i\theta})d\theta =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta - \iint_{r_o<|\zeta|<r} \log\frac{r}{|\zeta|}d\nu(\zeta) - \\ &- \log\frac{r}{r_o}\iint_{|\zeta|\leq r_o} d\nu(\zeta), \quad r_o < r < 1.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Далее, вводя неванлинновские характеристики $n_\pm(t) = \iint_{|\zeta|\leq t} \nu_\mp(\zeta)$ и

$$\begin{aligned}m(r, \pm\infty) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^\pm(re^{i\theta})d\theta,\\ N(r, r_o, \pm\infty) &= \int_{r_o}^r \frac{n_\pm(t) - n_\pm(r_o)}{t}dt + n_\pm(r_o)\log\frac{r}{r_o},\\ T(r, r_o, \pm\infty) &= m(r, \pm\infty) + N(r, r_o, \pm\infty),\end{aligned}$$

можем записать (2.1) в форме соотношения равновесия

$$T(r, r_o, +\infty) = T(r, r_o, -\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_o e^{i\theta})d\theta, \quad r_o < r < R, \tag{2.2}$$

являющегося частным случаем первой основной теоремы Неванлинны. Класс N функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$, естественно определять условием

$$\sup_{r_o < r < 1} T(r, r_o, +\infty) < +\infty. \tag{2.3}$$

При этом, выбор $r_o \in (0, 1)$ здесь не существенен, поскольку (2.3) очевидно эквивалентно тому же условию с любым другим $r_o \in (0, 1)$. Далее, из (2.2) следует, что (2.3) эквивалентно ограниченности $T(r, r_o, -\infty)$. Кроме того, стандартные рассуждения, связанные с предельным переходом $r \to 1-0$ в представлении Рисса $u(z)$ в $|z| < r$, приводят к следующей неванлинновской теореме.

Теорема 2.1. 1°. *Класс N совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{|\zeta|<1} \log\left|\frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z}\right| d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\mu(\theta), \quad |z| < 1, \tag{2.4}$$

где $\nu(\zeta)$ – борелевская мера такая, что

$$\iint_{|\zeta|<1} (1 - |\zeta|)\, |d\nu(\zeta)| < +\infty, \tag{2.5}$$

а $\mu(\theta)$ – функция ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$.

2°. *Класс N совпадает с множеством функций, представимых в $|z| < 1$ в виде разности двух неположительных субгармонических функций.*

3°. *Если имеет место представление (2.4) – (2.5), то функция $\mu(\theta)$ может быть найдена из соотношения*

$$\mu(\theta) = \lim_{r \to 1-0} \int_0^\theta u(re^{i\varphi}) d\varphi, \tag{2.6}$$

где предел конечен при любом $\theta \in [0, 2\pi]$. Если $\mu(\theta)$ определено по (2.6), то при любом $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\mu_\pm(\theta) \equiv \int_0^\theta (d\mu(t))^\pm = \lim_{r \to 1-0} \int_0^\theta u^\pm(re^{i\varphi}) d\varphi,$$

$$\mu(\theta)=\mu_+(\theta)-\mu_-(\theta),\quad \bigvee_0^\theta \mu=\bigvee_0^\theta \mu_+\bigvee_0^\theta \mu_-.$$

2.2. Для построения аналога теории факторизации М. М. Джрбашяна предположим, что функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z|<R\le+\infty$, и обозначим через Ω_s класс функций $\omega(x)$, удовлетворяющих следующим условиям :

(а) *функция $\omega(x)$ положительна, невозрастающая и непрерывно дифференцируемая в* $[0,1)$,

(б) $\omega(0)=1$ *и существует $\beta>0$ такое, что $\omega(x)\le O((1-x)^\beta)$ при* $x\to 1-0$.

Отметим что, если $\omega(x)\in\Omega_s$, то $\omega(x)$ удовлетворяет условиям всех утверждений предыдущего §1. Далее, полагая что $\nu(\zeta)$ – ассоциированная с $u(z)$ мера, для какого-либо $r\in(0,R)$ введем в рассмотрение гармоническую в $|z|<r$ функцию

$$U(z)=u(z)-\iint_{|\zeta|<r}\log\left|A_\omega\left(\frac{z}{r},\frac{\zeta}{r}\right)\right|d\nu(\zeta).$$

По лемме 1.2 гармонична в $|z|<r$ также функция $U_\omega(z)=L_\omega U(z)$. С другой стороны, по той же лемме функция $u_\omega(z)=L_\omega u(z)$ непрерывна в $\{|z|\le r\}\setminus\{0\}$. Кроме того, из представления (1.11) теоремы 1.2 следует, что

$$\lim_{\rho\to r-0}\int_0^{2\pi}\left|L_\omega\iint_{|\zeta|<r}\log\left|A_\omega\left(\frac{\rho}{r}e^{i\theta},\frac{\zeta}{r}\right)\right|d\nu(\zeta)\right|d\theta=0.$$

Поэтому, устремляя $\rho\to r-0$ в представлении Пуассона $U_\omega(z)$ в $|z|<\rho$, получим

$$U_\omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}u_\omega(re^{i\theta})d\theta,\quad |z|<r.$$

Взяв $z=0$ в разности двух таких представлений, записанных в $|z|<r$ и в $|z|<r_o$ $(0<r_o<r<R)$, приходим к формуле типа Иенсена-Неванлинны

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_\omega u(r_oe^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_\omega u(re^{i\theta})d\theta-\iint_{r_o<|\zeta|<r}\left(\int_{|\zeta|/r}^1\frac{\omega(x)}{x}dx\right)d\nu(\zeta)-$$
$$-\iint_{|\zeta|\le r_o}\left(\int_{|\zeta|/r}^{|\zeta|/r_o}\frac{\omega(x)}{x}dx\right)d\nu(\zeta),\quad r_o<r<R.\qquad(2.7)$$

Однако предварительное применение представления (1.11) теоремы 1.2 приводит к другой форме этой формулы, где слагаемые, очевидно, равны соответствующим слагаемым в (2.7) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega u(r_o e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega u(re^{i\theta})d\theta - \iint_{r_o<|\zeta|<r} \log\frac{r}{|\zeta|}d\nu_\omega(\zeta) -$$
$$-\log\frac{r}{r_o}\iint_{|\zeta|\le r_o} d\nu_\omega(\zeta), \quad r_o<r<R.$$

Таким образом, Формула типа Иенсена–Неванлинны для функции $u(z)$ почленно совпадает с обычной формулой Иенсена–Неванлинны, записанной для функции $u_\omega(z) = L_\omega u(z)$. Тем самым, вводя ω-характеристики М. М. Джрбашяна

$$\begin{aligned}
m_\omega(r,\pm\infty) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[L_\omega u(re^{i\theta})\right]^{\pm} d\theta,\\
N_\omega(r,r_o,\pm\infty) &= \int_{r_o}^{r}\frac{n_\pm(t)-n_\pm(r_o)}{t}\omega\left(\frac{t}{r}\right)dt + \int_0^{r_o}\left(\int_{t/r}^{t/r_o}\frac{\omega(x)}{x}dx\right)dn_\pm(t) =\\
&= \int_{r_o}^{r}\frac{n_\pm(t)-n_\pm(r_o)}{t}\omega\left(\frac{t}{r}\right)dt+\\
&+\left\{n_\pm(r_o)\int_{r_o/r}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx + \int_0^{r_o}\frac{n_\pm(t)}{t}\left[\omega\left(\frac{t}{r}\right)-\omega\left(\frac{t}{r_o}\right)\right]dt\right\},\\
T_\omega(r,r_o,\pm\infty) &= m_\omega(r,\pm\infty) + N_\omega(r,r_o,\pm\infty),
\end{aligned}$$

приходим к нижеследующей теореме, относящейся к качественному сравнению этих характеристик с неванлинновскими.

Теорема 2.2. *Если $\omega(x)\in\Omega_s$ и функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z|<R\le$ $\le+\infty$, то при любых $r, r_o\in(0,R)$ ω-характеристики М. М. Джрбашяна от $u(z)$ совпадают с характеристиками Неванлинны функции $u_\omega(z) = L_\omega u(z)$.*

Замечание. Задача качественного сравнения характеристик М. М. Джрбашяна с характеристиками Неванлинны хорошо известна. Первые результаты были доказаны в [4] (леммы 4.6 и 4.7). Окончательный характер теоремы 2.2 – результат рассмотрения неванлинновских характеристик δ-субгамонических функций.

Аналоги классов М. М. Джрбашяна – классы N_ω функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$, естественно определять условием

$$\sup_{r_o<r<1} T_\omega(r, r_o, +\infty) < +\infty, \tag{2.8}$$

где $r_o \in (0,1)$ – любое фиксированное число. $T_\omega(r, r_o, +\infty, u) = T(r, r_o, +\infty, u_\omega)$ в силу теоремы 2.2. Поэтому выбор r_o здесь не существенен. С другой стороны,

$$u(z) \in N_\omega \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad u_\omega(z) \in N.$$

Более того, оказывается, что используя обратимость оператора L_ω (теорема 1.3) и представление неванлинновского класса N, можно установить представления классов N_ω.

Теорема 2.3. *Пусть $\omega(x) \in \Omega_s$ – любая функция. Тогда :*

1°. *Класс N_ω совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = \iint_{|\zeta|<1} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\, S_\omega(ze^{-i\theta})d\mu(\theta), \quad |z| < 1, \tag{2.9}$$

где A_ω – фактор типа Бляшке М. М. Джрбашяна

$$S_\omega(\zeta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{\Delta_k}, \quad \Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx$$

– его ядро типа Шварца, $\nu(\zeta)$ – борелевская мера, удовлетворяющая условию

$$\iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx\right) |d\nu(\zeta)| < +\infty, \tag{2.10}$$

а $\mu(\theta)$ – функция ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$.

2°. *Если имеют место представления (2.9) – (2.10), то для $\mu(\theta)$ справедливо утверждение 3° теоремы 2.1, где $u(z)$ заменено на $u_\omega(z) = L_\omega u(z)$.*

3°. *Класс N содержится в любом N_ω ($\omega(x) \in \Omega_s$). С другой стороны, теоретико-множественная сумма классов N_ω, взятая по всем $\omega(x) \in \Omega_s$, совпадает с множеством всех функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$.*

Доказательство. 1°. Если $u(z) \in N_\omega$, то $L_\omega u(z) = u_\omega(z) \in N$. Тем самым, функция $u_\omega(z)$ представима в виде (2.4) – (2.5), где ν заменено на ν_ω. Но

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = L_\omega \mathrm{Re}\, S_\omega(e^{-i\theta}z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \ |z| < 1,$$

поэтому, в силу (1.11)

$$L_\omega u(z) = L_\omega \left\{ \iint_{|\zeta|<1} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_\omega(e^{-i\theta}z)d\mu(\theta) \right\}, \quad |z|<1,$$

и (2.9) следует из теоремы 1.3, так как разность $u(z)$ и функции в фигурных скобках гармонична в $|z|<1$. Условие (2.10) легко следует из ограниченности характеристики $N_\omega(r, r_o, \pm\infty)$. Обратно, если $u(z)$ представима в виде (2.9) – (2.10), то из (1.11) следует, что $u_\omega(z)$ представима в виде (2.4) – (2.5). Отсюда следует, что $u_\omega(z) \in N$, и $u(z) \in N_\omega$. Доказательство утверждения 2° очевидно.

3°. Если $u(z) \in N$, то $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, где $u_{1,2}(z)$ – неположительные, субгармонические в $|z|<1$ функции. Тем самым, $L_\omega u(z) = L_\omega u_1(z) - L_\omega u_2(z)$, где функции $L_\omega u_{1,2}(z)$ тоже неположительны и субгармоничны в $|z|<1$. Следовательно, $L_\omega u(z) \in N$, и $u(z) \in N_\omega$. Пользуясь вышеприведенными формулами для ω-характеристик, для любой функции $u(z)$, δ-субгармонической в $|z|<1$, нетрудно подобрать $\omega(x) \in \Omega_s$ такое, что $u(z) \in N_\omega$.

Замечание 1. Как было отмечено выше, $u(z) \in N_\omega$ при некотором $\omega(x) \in$ $\in \Omega_s$ тогда и только тогда, когда $L_\omega u(z) \in N$. Более того, из приведенных рассуждений очевидно следует, что $L_\omega N_\omega$ является *строгим* подмножеством N, совпадающим с множеством *непрерывных* субгармонических в $|z|<1$ функций, допускающих представление вида

$$U(z) = \iint_{|z|<1} \log\left|\frac{\zeta - z}{1-\bar\zeta z}\right| d\nu_\omega(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}d\mu(\theta), \quad |z|<1,$$

где $\mu(\theta)$ и $\nu_\omega(\zeta)$ такие, как в представлении (2.4) – (2.5) класса N, однако, в дополнение, для ν_ω *существует борелевская мера* ν, *удовлетворяющая условию* (2.10) *и связанная с* ν_ω *формулой* (1.12).

Замечание 2. Если функция $u(z)$ *субгармонична* в $|z|<1$ и $\omega(x) \in \Omega_s$, то условие (2.8), определяющее класс N_ω, можно записать в виде

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left[L_\omega u(re^{i\theta})\right]^+ d\theta < +\infty.$$

Если, в добавок, $u(z)$ *неотрицательна*, то пользуясь представлением (1.3) оператора L_ω, можно показать, что последнее условие эквивалентно тому, что

$$\iint_{|z|<1} u(z)|\omega'(|z|)|d\sigma(z) < +\infty,$$

где $d\sigma(z)$ – плоская мера Лебега. Взяв здесь $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ $(\alpha > 0)$, можно проследить связь между N_ω и первоначальными классами, факторизованными М. М. Джрбашяном [14], [15]. Следует отметить, что некоторые свойства последних впервые были изучены Неванлинной (см. [16], п. 216).

2.3. Ниже установлены некоторые результаты, связанные с *проблемой вложения классов* N_ω.

Теорема 2.4. *Если функции* $\omega_1(x), \omega_2(x) \in \Omega_s$ *совпадают при* $x \in [0,1]$ *достаточно близком к 1, то* $N_{\omega_1} = N_{\omega_2}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ – фиксированное число, и пусть $\omega_1(x) = \omega_2(x)$ для всех $x \in [\varepsilon, 1]$. Полагая, что функция $u(z)$ δ-субгармонична в $|z| < 1$, можно убедиться в том, что

$$m_{\omega_2}(r,+\infty) \le \max_{0\le t\le 1-\varepsilon} |\omega'_{1,2}(t)| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+\left((1-\varepsilon)e^{i\theta}\right) d\theta + m_{\omega_1}(r,+\infty), \quad 0<r<1.$$

С другой стороны, простое вычисление показывает, что

$$N_{\omega_2}(r, 1-\varepsilon, +\infty) = N_{\omega_1}(r, 1-\varepsilon, +\infty) + Q(r), \quad 1-\varepsilon < r < 1,$$

где слагаемое

$$Q(r) = \int_0^{(1-\varepsilon)^2} \frac{n(t)}{t}\left[\omega_2\left(\frac{t}{r}\right) - \omega_2\left(\frac{t}{1-\varepsilon}\right)\right] dt - \\ - \int_0^{(1-\varepsilon)^2} \frac{n(t)}{t}\left[\omega_1\left(\frac{t}{r}\right) - \omega_1\left(\frac{t}{1-\varepsilon}\right)\right] dt$$

равномерно ограничено в $[1-\varepsilon, 1]$. Отсюда следует, что

$$\sup_{1-\varepsilon<r<1} T_{\omega_2}(r, 1-\varepsilon, +\infty) < +\infty,$$

если T_{ω_1} удовлетворяет тому же условию. Таким образом, $u(z) \in N_{\omega_2}$, если $u(z) \in N_{\omega_1}$. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 2.4 показывает, что класс N_ω по существу определяется лишь поведением $\omega(x)$ вблизи 1. Тем самым, изменение $\omega(x) \in \Omega_s$ в окрестности начала координат (при котором $\omega(x)$ остается в Ω_s) не отражается на классе N_ω. Очевидно можно изменять значения $\omega(x) \in \Omega_s$ в окрестности начала координат, положив $\omega(x) \equiv 1$, $0 \le x \le l/2$, при некотором $l \in (0,1)$ и продолжив $\omega(x)$ в $l/2 \le x \le l$ как непрерывно дифференцируемую функцию. Использование такой функции $\tilde{\omega}(x) \in \Omega_s$, имеющей простое поведение вблизи начала координат, приводит, в частности, к доказательству следующей теоремы.

Теорема 2.5. *Если функции $\omega_{1,2}(x)$ принадлежат Ω_s и, для x достаточно близких к 1, $\omega_3(x) \in \Omega_s$ определена по формуле (1.13), то $N_{\omega_1}, N_{\omega_2} \subseteq N_{\omega_3}$.*

Доказательство. Пусть при $x \in [0,1]$ $(0 \le l < 1)$ функция $\omega_3(x)$ определена по формуле (1.13). Положив $\tilde{\omega}_{1,2}(x) \equiv 1$ при $0 \le x < l/2$ и продолжив $\tilde{\omega}_{1,2}(x)$ в $l/2 \le x \le l$ как непрерывно дифференцируемые функции, такие, что $\tilde{\omega}_{1,2}(x) = \omega_{1,2}(x)$ при $x \in [l,1]$, по формуле (1.13) получаем новую функцию $\tilde{\omega}_3(x) \in \Omega_s$ такую, что $\tilde{\omega}_3(x) \equiv \omega_3(x)$ при $x \in [l,1]$ и $\tilde{\omega}_3(x) \equiv 1$ при $x \in [0, l/2]$. С другой стороны, функции $\tilde{\omega}_{1,2,3}(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1.3. Тем самым, для этих функций верна формула (1.15). Если $u(z) \in N_{\tilde{\omega}_1}$, то $L_{\tilde{\omega}_1}u(z) \in N$, т. е. $L_{\tilde{\omega}_1}u(z) \equiv U_1(z) - U_2(z)$, где $U_{1,2}(z)$ субгармоничны и неположительны в $|z| < 1$. Следовательно, $L_{\tilde{\omega}_3}u(z) = V_1(z) - V_2(z)$, где $V_{1,2}(z) = L_{\tilde{\omega}_2}U_{1,2}(z)$ – неположительные субгармонические функции в $|z| < 1$. Отсюда следует, что $L_{\tilde{\omega}_3}u(z) \in N$ и, что то же самое, $u(z) \in N_{\tilde{\omega}_3}$. Итак, $N_{\tilde{\omega}_1} \subset N_{\tilde{\omega}_3}$. Аналогично доказывается вложение $N_{\tilde{\omega}_2} \subset N_{\tilde{\omega}_3}$, а нужное утверждение вытекает из равенства $N_{\tilde{\omega}_{1,2,3}} = N_{\omega_{1,2,3}}$ и теоремы 2.4.

2.4. Обратная задача вложения классов N_ω может быть сформулирована следующим образом : *при каком соотношении между $\omega_1(x) \in \Omega_s$ и $\omega_3(x) \in \Omega_s$ имеет место вложение $N_{\omega_1} \subset N_{\omega_3}$?* Эта проблема была предложена М. М. Джрбашаном [12] (для классов N_ω мероморфных функций) в форме проблемы моментов Хаусдорфа. Одновременно, в [12] было выдвинуто предположение (которое справедливо, когда функции $\omega(x)$ принадлежат основной шкале $(1-x)^\alpha$) : $N_{\omega_1} \subseteq N_{\omega_3}$ (или, что то же самое, предложенная проблема моментов имеет искомое решение) *если только* $\omega_{1,3}(x) \in \Omega$ *монотонны в* $[0,1)$, *и отношение* $\omega_3(x)/\omega_1(x)$ *не возрастает.* В дальнейшем решение этой проблемы было найдено И. В. Островским [13], рассмотревшим случай, когда функции $\omega_{1,3}(x)$ не убывают в $[0,1]$, т. е. классы N_ω являются *подмножествами* неванлинновского класса N мероморфных функций ограниченного вида в $|z| < 1$. В [13] было найдено условие, более ограничительное, чем невозрастание $\omega_3(x)/\omega_1(x)$, обеспечивающее вложение $N_{\omega_1} \subseteq N_{\omega_3}$. Было показано, что *найденное условие не может быть заменено невозрастанием* $\omega_3(x)/\omega_1(x)$.

Напомним, что в этой статье рассматривается случай, когда $\omega(1-0) = 0$, и, тем самым, классы N_ω *содержат* класс N и исчерпывают множество всех функций, δ-субгармонических в $|z| < 1$. Как ясно из леммы 1.3, решение отмеченной проблемы вложения можно свести к решению интегрального уравнения Вольтерра (1.14). В общем случае это может быть предметом для нового исследования. Ниже мы будем рассматривать простой случай – когда $\omega_1(x)$ принадлежит основной шкале, т. е. $\omega_1(x) = (1-x)^\alpha$ $(\alpha > 0)$. В этом случае (1.13) переходит в интегральное уравнение Абеля

$$f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y (y-t)^{\alpha-1} g(t)dt,$$

где

$$f(y) = \frac{\omega_3(1-y)}{(1-y)\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{и} \quad g(y) = \frac{\omega_2(1-y)}{(1-y)^{1+\alpha}}.$$

Опираясь на теорему 2.5 и хорошо известное решение последнего уравнения, данное Я. Д. Тамаркиным [17] (см. также [2], стр. 574), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.6. *Пусть $\omega_1(x) = (1-x)^\alpha$ $(0 < \alpha < +\infty)$, p – натуральное число, определенное из неравенств $p-1 < \alpha \leq p$, а функция $\omega_3(x) \in \Omega_s$ такова, что при некотором $l \in [0,1)$*

(а) $d^p/dx^p\, A(x) \in L_1(l,1)$ *при некотором* $l \in [0,1)$, *где*

$$a(x) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{p-\alpha-1} \omega_3(t) \frac{dt}{t},$$

(б) $a(1) = a'(1) = \ldots = a^{(p)}(1) = 0$,

(в) $(-1)^p x^{1+\alpha} a^{(p)}(x) \leq 1$ – *неотрицательная, невозрастающая и непрерывно дифференцируемая в* $(l,1)$ *функция.*

Тогда для функций $\omega_{1,3}(x)$ *и*

$$\omega_2(x) = \frac{(-1)^p x^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} a^{(p)}(x), \quad l < x < 1$$

в $(l,1)$ *справедливы формулы (1.13) – (1.14). Кроме того,* $N_{\omega_1} \subseteq N_{\omega_3}$ *и* $N_{\omega_2^*} \subseteq N_{\omega_3}$ *при любом* $\omega_2^*(x) \in \Omega_s$, *совпадающем с* $\omega_2(x)$ *в* $(l,1)$.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство леммы 1.1. 1°. Из (1.1) вытекает, что $\omega(t) = P(t) - tP'(t)$. Поэтому, если $z = re^{i\varphi}$ и $|z| = r < R$, то

$$\int_0^r L_\omega u(xe^{i\varphi})dx = -\int_0^1 \left(\int_0^r u(xte^{i\varphi})dx \right) d[P(t) - tP'(t)], \tag{3.1}$$

где интегралы абсолютно сходятся. Обозначив

$$J(te^{i\varphi}) = tP'(t) \int_0^r u(xte^{i\varphi})dx, \quad 0 < t < 1, \tag{3.2}$$

заметим, что

$$J(te^{i\varphi}) = O(1)P'(t) = o(1) \quad \text{при} \quad t \to 1-0. \tag{3.3}$$

Для доказательства такого же соотношения при $t \to +0$ заметим, что по теореме Рисса

$$u(\sigma e^{i\varphi}) = \iint_{|\zeta|<r} \log \left| \frac{r(\zeta - \sigma e^{i\varphi})}{r^2 - \bar{\zeta}\sigma e^{i\varphi}} \right| d\nu(\zeta) + U_1(\sigma e^{i\varphi}) - U_2(\sigma e^{i\varphi}); \quad 0 \leq \sigma < r,$$

где $U_{1,2}$ – наименьшие гармонические мажоранты субгармонических функций какого-либо разложения $u = u_1 - u_2$, а $\nu(\zeta)$ – ограниченная борелевская мера в $|\zeta| \le r$. Из этого представления и условия (1.2) следует, что

$$|J(te^{i\varphi})| \le P'(t) \iint_{|\zeta|<r} \left(\int_0^{rt} \log \frac{2r}{||\zeta| - \sigma|} \right) |d\nu(\zeta)| + o(1) \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Легко проверить, что в обоих случаях $0 \le |\zeta| < rt$ и $rt \le |\zeta| < r$ имеем

$$0 < \int_0^{rt} \log \frac{2r}{||\zeta| - \sigma|} d\sigma < rt \log \frac{2e}{t}, \quad 0 < t < \frac{1}{e}.$$

Отсюда, по (1.2) $A(te^{i\varphi}) = o(1)$ при $t \to +0$. Тем самым, из формул (3.1) – (3.3) следует, что

$$\int_0^r L_\omega u(xe^{i\varphi})dx = - \int_0^1 \left(\int_0^r u(xte^{i\varphi})dx \right) dP(t) - \int_0^1 tP'(t)d \left(\int_0^r u(xte^{i\varphi})dx \right) =$$
$$= -r \int_0^1 u(tre^{i\varphi})dP(t).$$

2°. Согласно лемме 2 из [3]

$$L_\omega u(z) = u(0) + \int_0^1 \left(|z| \frac{\partial}{\partial |z|} u(z) \right) \Big|_{zt} \frac{\omega(t)}{t} dt = u(0) + L_{\omega_1} U(z).$$

Доказательство леммы 1.2. 2°. Если функция $u(z)$ голоморфна в G, то для функции $L_\omega u(z)$, записанной в виде (1.4), легко проверить справедливость полярных уравнений Коши-Римана. С другой стороны, если $u(z)$ гармонична в G, то существует функция $f(z)$, голоморфная в G и такая, что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$. Тем самым, функция $L_\omega u(z) = \operatorname{Re} L_\omega f(z)$ гармонична в G. Далее, если функция $f(z)$ голоморфна в G, то ее разложение Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

сходится в $|z| < \rho = \min\{|z| : z \in \partial G\}$. Как легко проверить, разложение

$$L_\omega f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \Delta_k z^k, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_k = k \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx, \quad k \ge 1$$

имеет тот же радиус сходимости. Поэтому из тождества $L_\omega f(z) \equiv C =$ $= \mathrm{const}$, $(|z| < \varepsilon)$ следует, что $C_0 = C$, $C_k = 0 (k \geq 1)$, и $f(z) \equiv C = C_0$. Это рассуждение очевидно можно повторить в случае, когда функция $u(z)$ гармонична в G и $L_\omega u(z) \equiv C = \mathrm{const}$ в окрестности начала координат.

1°. Полагая, что $\zeta \neq 0$ – фиксированная точка, сначала докажем, что при любом $R > 0$ интеграл

$$\begin{aligned} J(z) =& L_\omega \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \overline{\zeta} z}\right| = \\ &= -\int_0^1 \log|R(\zeta - zt)|\omega'(t)dt + \int_0^1 \log|R^2 - \overline{\zeta} zt|\omega'(t)dt \equiv J_1(z) + J_2(z) \end{aligned}$$

– непрерывная в $|z| < R$ функция. Действительно, если $|z| \leq \delta < R$, то $J_2(z)$ равномерно сходится, поскольку

$$\left|\omega'(t) \log|R^2 - \overline{\zeta} zt|\right| \leq \max\left\{\log 2R, \log\frac{1}{R(R-\delta)}\right\} |\omega'(t)| \in L_1(0,1).$$

Тем самым, $J_2(z)$ гармонична в $|z| < R$. Далее, если $\mathbf{K}$ – содержащийся в $|z| < R$ компакт, не пересекающийся с отрезком $[\zeta, R\zeta/|\zeta|)$, а $z \in \mathbf{K}$, то ясно, что $|\log|R(\zeta - zt)|| \leq C < +\infty$ $(0 \leq t \leq 1)$, где C – постоянная, зависящая только от расстояния между $\mathbf{K}$ и $[\zeta, R\zeta/|\zeta|)$. Отсюда следует, что $J_1(z)$ гармонична в $\{|z| < R\} \backslash [\zeta, R\zeta/|\zeta|)$. Чтобы показать, что $J_1(z)$ непрерывно продолжима на отрезок $[\zeta, R\zeta/|\zeta|)$, предположим $z = \zeta/\lambda$ $(|\zeta|/R < \lambda \leq 1)$. Тогда

$$J_1(z) = \log R|\zeta| - \int_0^1 \log\left|1 - \frac{t}{\lambda}\right| \omega'(t)dt = \log R|\zeta| + \Phi(\lambda),$$

и, очевидно, достаточно только показать, что $\Phi(\lambda)$ (где λ рассматривается как комплексный параметр) непрерывно продолжима на отрезок $(|\zeta|/R, 1]$. Для этого воспользуемся представлением

$$\Phi(\lambda) = \mathrm{Re}\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t - \lambda} dt,$$

полученным интегрированием по частям. Так как функция $\omega'(t)$ непрерывна в $[0, 1)$ и удовлетворяет условию (1.5), то по хорошо известному свойству интегралов типа Коши (см., напр., [18], разделы 5.1 и 8.1) $\Phi(\lambda)$ непрерывно продолжима на $[\zeta/R, 1]$. Далее, полагая, что $\delta \in (0,1)$ – любое число, $R = \sup\{\delta|z| : z \in G\}$, и обозначив

$$I_\delta(z) = \iint_{\zeta\in\delta G} \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{\zeta} z}\right| d\nu(\zeta),$$

где $\nu(\zeta)$ – борелевская мера, ассоциированная с $u(z)$, докажем, что функция $L_\omega I_\delta(z)$ непрерывна в $0 < |z| < R$ и такова, что

$$L_\omega I_\delta(z) = \iint_{\zeta\in\delta G} L_\omega \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{\zeta} z}\right| d\nu(\zeta), \quad 0 < |z| < R. \tag{3.4}$$

Для этого заметим, что

$$\frac{R||\zeta| - |z|t|}{R^2 - |\zeta z|t} \le \left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{\zeta} z}\right| \le 1, \quad |\zeta|, |z| \le R, \quad 0 \le t \le 1.$$

Следовательно

$$\left|L_\omega \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{\zeta} z}\right|\right| \le \int_0^1 \log\frac{R^2 - |\zeta z|t}{R||\zeta| - |z|t|}|\omega'(t)|dt <$$
$$< \log R + \int_0^1 \log\frac{1}{||\zeta| - |z|t|}|\omega'(t)|dt \equiv \log R + A.$$

Если $|z| \le |\zeta|$, то ввиду свойств $\omega(t)$ имеем

$$A \le \log\frac{1}{|\zeta|} + \int_0^1 \log\frac{1}{1-t}|\omega'(t)|dt \equiv \log\frac{1}{|\zeta|} + C_1 < +\infty.$$

С другой стороны, если $|\zeta| < |z| < R$, то по тем же свойствам

$$A \le \log\frac{1}{|z|} + \int_0^1 \log\frac{1}{\left|\left|\frac{\zeta}{z}\right| - t\right|}|\omega'(t)|dt \le$$
$$\le \log\frac{1}{|z|} + \max_{0\le x\le 1}\int_0^1 \log\frac{1}{|x - t|}|\omega'(t)|dt \equiv \log\frac{1}{|z|} + C_2 < +\infty.$$

Таким образом

$$\left|L_\omega \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{\zeta} z}\right|\right| \le \log R + \min\left\{\log\frac{1}{|z|}, \log\frac{1}{|\zeta|}\right\} + C_3. \tag{3.5}$$

Тем самым, правый интеграл в (3.4) абсолютно и равномерно сходится внутри $0 < |z| < R$. Отсюда следует, что формула (3.4) справедлива и функция $L_\omega I_\delta(z)$ непрерывна в $0 < |z| < R$. Если $u(0) \ne -\infty$, то

$$\iint_{|\zeta|<R/2} \log\frac{1}{|\zeta|} d\nu(\zeta) < +\infty$$

(см. [19], раздел 3.9). Следовательно, по (3.5) функция $L_\omega I_\delta(z)$ непрерывна также в точке $z = 0$. Наконец, остается заметить, что если D – звездообразная область такая, что $\overline{D} \subset \delta G$, и $g(\zeta, z)$ – ее функция Грина, то функция

$$\Psi(z) = \iint_{\zeta \in D} g(\zeta, z) d\nu(\zeta) + \iint_{\zeta \in \delta G} \log\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \overline{\zeta} z}\right| d\nu(\zeta)$$

гармонична в D. Следовательно, по только что доказанному утверждению 2°, $L_\omega \Psi(z)$ гармонична в D, а $L_\omega u(z)$ непрерывна в $D \setminus \{0\}$ (а также в точке $z = 0$, если $u(0) \neq -\infty$). Отсюда следует, что $L_\omega u(z)$ непрерывна в $G \setminus \{0\}$ (а также в $z = 0$, если $u(0) \neq -\infty$). Далее, неравенство между $L_\omega u(z)$ и ее средним, обеспечивающее нужную субгармоничность, можно непосредственно проверить, пользуясь формулой (1.3).

Доказательство теоремы 1.1. Полагая, что $\delta \in (0, 1)$ – любое число и пользуясь асимптотической формулой (1.68′) из [4], можно проверить, что второй интеграл в правой стороне представления

$$I_\omega(z) = \iint_{|\zeta| < \delta} \log|A_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta) + \iint_{\delta \leq |\zeta| < 1} \log|A_\omega(z, \zeta)| d\nu(\zeta) \tag{3.6}$$

является гармонической в $|z| < \delta$ функцией. Для исследования первого интеграла правой части этой формулы введем в рассмотрение функции

$$u(z, \zeta) = \log|A_\omega(z, \zeta)| - \log|A(z, \zeta)|, \quad u_\omega(z, \zeta) = L_\omega u(z, \zeta),$$

гармонические в $|z| < 1$. Из формул (2.21) и (3.10) работы [3] следует, что при $|\zeta| < \delta$ и $r \in (\delta, 1)$ имеем

$$u(z, \zeta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\omega\left(\frac{z}{r} e^{-i\theta}\right) u_\omega(re^{i\theta}, \zeta) d\theta\right\}, \quad |z| < r, \tag{3.7}$$

$$u_\omega(z, \zeta) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S\left(\frac{z}{r} e^{-i\theta}\right) u_\omega(re^{i\theta}, \zeta) d\theta\right\}, \quad |z| < r, \tag{3.8}$$

где

$$S_\omega\left(\frac{z}{r} e^{-i\theta}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{r} e^{-i\theta}\right)^k \Delta_k^{-1}\Bigg|_{\omega(t) \equiv 1} = \frac{e^{i\theta} + z/r}{e^{i\theta} - z/r} = S\left(\frac{z}{r} e^{-i\theta}\right),$$

$$\Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx, \quad k \geq 1.$$

Последние формулы могут быть рассмотрены также как очевидные следствия утверждения 2° леммы 1.2. Действительно, (3.8) справедливо, так как $u(z,\zeta)$ гармонична в $|z|<1$, а (3.7) следует из (3.8), поскольку разница правой и левой сторон (3.8) – гармоническая функция, обращающаяся тождественно в нуль после применения L_ω.

По формуле (2.40) из [4]

$$u_\omega(z,\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\log\frac{1}{|\zeta|} - \int_0^{|\zeta|}\frac{\omega(x)}{x-\zeta/z}dx - \int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)}{x-\overline{\zeta}z}dx - \int_0^1 \frac{\overline{\zeta}z\omega(x)}{1-\overline{\zeta}zx}dx\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}|u_\omega(z,\zeta)| \leq &\left|\int_0^{|\zeta|}\frac{\omega(x)}{x-\zeta/z}dx\right| + \left|\int_0^1 \frac{\overline{\zeta}z\omega(x)}{1-\overline{\zeta}zx}dx\right| + \\ &+\left|\int_{|\zeta|}^1\left\{\frac{1}{x}-\frac{\omega(x)}{x-\overline{\zeta}z}\right\}dx\right| \equiv I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

При $z=re^{i\theta}$ и $|\zeta|<\delta$ ($\delta<r<1$)

$$\begin{aligned}&I_1 \leq \max_{0\leq x\leq\delta}\{\omega(x)\}\int_0^{|\zeta|}\frac{dx}{|\zeta|/r-x} = \max_{0\leq x\leq\delta}\{\omega(x)\}\log\frac{1}{1-r} < +\infty,\\ &I_2 \leq \frac{\delta r}{1-\delta r}\int_0^1\omega(x)dx < +\infty,\\ &I_3 \leq \int_{|\zeta|}^1\left|\frac{1-\omega(x)}{x-\overline{\zeta}z}\right|dx + \left|\int_{|\zeta|}^1\frac{dx}{x} - \int_{|\zeta|}^1\frac{dx}{x-\overline{\zeta}z}\right| \leq\\ &\qquad \leq \pi + \frac{1}{1-r}\int_{|\zeta|}^1\frac{|1-\omega(x)|}{x}dx + \log\frac{1+r}{1-r} < +\infty.\end{aligned}$$

Таким образом

$$|u_\omega(re^{i\theta},\zeta)| \leq M_{\delta,r} < +\infty, \quad |\zeta|<\delta<r<1, \tag{3.9}$$

где $M_{\delta,r}$ – постоянная, зависящая лишь от δ и r. Полагая, что $|z|\leq\kappa r$ ($0<\kappa<1$), $|z|<\delta<r<1$, из (3.9) и (3.7) получим

$$|u(z,\zeta)| \leq M_{\delta,r}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\kappa^k\Delta_k^{-1}\right),$$

где

$$\Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)x^{k-1}dx > k\int_{(1+\kappa)/2}^1 \omega(x)x^{k-1}dx \geq$$
$$\geq k\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{k-1}\int_{(1+\kappa)/2}^1 \omega(x)dx = k\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)^{k-1} J_\kappa > 0.$$

Тем самым, при $|z| \leq \kappa r$ $(0 < \kappa < 1)$ и $|\zeta| < \delta < r < 1$

$$|u(z,\zeta)| \leq M_{\delta,r}\left[1 + \frac{2}{J_\kappa}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{2\kappa}{1+\kappa}\right)^k\right].$$

Следовательно, интеграл

$$U_\delta(z) = \iint_{|\zeta|<\delta} u(z,\zeta)d\nu(\zeta)$$

абсолютно и равномерно сходится в $|z| \leq \kappa r$. Поскольку числа $\kappa \in (0,1)$ и $r \in (\delta, 1)$ произвольны, то функция $U_\delta(z)$ гармонична в $|z| < 1$ и

$$\iint_{|\zeta|<\delta} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta} \log|A(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + U_\delta(z), \quad |z| < 1. \tag{3.10}$$

Интеграл в правой части (3.6) является функцией, гармонической в круге $|z| < \delta$. Тем самым, ввиду последней формулы, интеграл $I_\omega(z)$ является функцией, субгармонической в любом круге $|z| < \delta < 1$ и обладает в любом таком круге тем же характером сходимости, что обычный потенциал Грина.

2°. Формулу (1.9) можно получить, устремив в (3.10) $\delta \to 1-0$. Однако, ниже мы кратко опишем иной, более предпочтительный путь получения (1.9). Полагая, что $\delta \in (0,1)$ и $|z| \leq \delta/2 = r$, будем иметь

$$\Phi(z) = \iint_{|\zeta|<1} F(z,\zeta)d\nu(\zeta) = \left(\iint_{|\zeta|<\delta} + \iint_{\delta\leq|\zeta|<1}\right) F(z,\zeta)d\nu(\zeta) \equiv \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \tag{3.11}$$

где $F(z,\zeta)$ – интеграл из (3.7), являющийся голоморфной в $|z| < \delta/2$ функцией. Повторяя вышеприведенные рассуждения, придем к неравенству $|u_\omega(\delta e^{i\theta}/\zeta)| \leq \leq M_\delta < +\infty$ $(|\zeta| < \delta)$, где M_δ – постоянная, зависящая лишь от δ. Из этого неравенства следует оценка $F(z,\zeta)$, обеспечивающая абсолютную и равномерную сходимость интеграла $\Phi_1(z)$ внутри $|z| < \delta/2$. Тем самым, функция $\Phi_1(z)$ голоморфна в $|z| < \delta/2$. С другой стороны, нетрудно показать, что

$$L_\omega \Phi_1(z) = \iint_{|\zeta|<\delta} L_\omega F(z,\zeta) d\nu(\zeta),$$

где правый интеграл абсолютно и равномерно сходится в $|z| < \delta/2$. Аналогичные утверждения для $\Phi_2(z)$ доказываются с привлечением надлежащих оценок слагаемых представления

$$F(z,\zeta) = -\Omega_\omega(z,\zeta) + \Omega(z,\zeta).$$

Здесь $-\Omega_\omega(z,\zeta)$ – интеграл в экспоненте в первой формуле (1.6), а

$$\Omega(z,\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1} \left\{ \frac{1}{1-\frac{x\bar{\zeta}}{z}} + \frac{1}{1-\frac{zx}{\zeta}} - 1 \right\} \frac{dx}{x}$$

(см. [4], лемму 1.6, где доказана одна из используемых оценок). Итак, функция $\Phi(z)$ голоморфна в $|z| < 1$ и справедливо представление

$$L_\omega \operatorname{Re} \Phi(z) = \operatorname{Re} L_\omega \Phi(z) = \iint_{|\zeta|<1} L_\omega u(z,\zeta) d\nu(\zeta), \tag{3.12}$$

где интеграл абсолютно и равномерно сходится внутри $|z| < 1$. По лемме 2.5 из [4], $L_\omega u(z.\zeta) \equiv u_\omega(z,\zeta) \leq 0$, если $\omega(x)$ не убывает в $(0,1)$, и $u_\omega(z,\zeta) \geq 0$, если $\omega(x)$ не возрастает в $(0,1)$. Тем самым, по теореме Герглотца–Рисса

$$L_\omega \operatorname{Re} \Phi(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\psi(\theta) \right\}, \quad |z| < 1,$$

где $\psi(\theta)$ – мера с надлежащими свойствами. Отсюда легко следует формула (1.10), а (1.9) следует из (1.10) так, как (3.7) из (3.8).

Доказательство теоремы 1.2. Так как $\omega(x)$ удовлетворяет условиям утверждения 1° леммы 1.2, то функция $L_\omega I_\omega(z)$ непрерывна и субгармонична в $0 <$ $< |z| < 1$. Полагая $\delta \in (0,1)$, из (3.4), где берем $G = \{|z| < \delta^{-1}\}$, заключаем, что в $0 < |z| < 1$

$$L_\omega \iint_{|\zeta|<\delta} \log|A(z,\zeta)| d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta} L_\omega \log|A(z,\zeta)| d\nu(\zeta).$$

Следовательно, ввиду (3.11) и (3.12)

$$L_\omega \iint_{|\zeta|<\delta} \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\delta} L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta), \quad 0<|z|<1. \quad (3.13)$$

Докажем первое равенство в (1.11). Ввиду (1.6), при $|z| \le \delta/2$ и $\delta < |\zeta| < 1$ имеем

$$|\log|A_\omega(z,\zeta)|| \le \frac{1}{\delta}\int_{|\zeta|}^1 \left\{1+\sum_{k=1}^\infty \left|\frac{z}{\zeta}x\right|^k \Delta_k^{-1} + \sum_{k=1}^\infty \left|\frac{z\bar{\zeta}}{x}\right|^k \Delta_k^{-1}\right\}\omega(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{\delta}\left\{1+\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k \Delta_k^{-1} + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\delta}{2}\right)^k \Delta_k^{-1}\right\}\int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx,$$

где суммы сходятся. Ввиду (1.3), (1.7) и теоремы Фубини при $|z| \le \delta/2$ для интегралов по области $\delta \le |\zeta| < 1$ имеет место аналогичное (3.13) равенство. Следовательно, (1.11) имеет место при $0<|z|\le\delta/2$ $(0<\delta<1)$ и, тем самым, всюду в $0<|z|<1$. Перейдя к доказательству второго равенства (1.11), отметим, что $L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)| \le 0$ $(|z|, |\zeta|<1)$. Как нетрудно проверить, при $r \to 1-0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |L_\omega I_\omega(re^{i\theta})|d\theta = \iint_{|\zeta|<r}\left(\int_{|\zeta|}^{|\zeta|/r} \frac{\omega(x)}{x}dx\right)d\nu(\zeta) +$$

$$+\iint_{r\le|\zeta|<1}\left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)}{x}dx\right)d\nu(\zeta) = o(1).$$

Отсюда следует равенство (1.11) с неотрицательной борелевской мерой ν_ω на $|\zeta|<1$, удовлетворяющей условию (1.8).

Основной предпосылкой для доказательства (1.12) является формула

$$L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)| = -\int_{|\zeta|}^1 \log\left|A\left(z,\frac{\zeta}{x}\right)\right|\omega'(x)dx, \quad |z|,|\zeta|<1, \qquad (3.14)$$

которую нетрудно проверить, пользуясь (1.3), (1.6) и равенством $L_\omega C_\omega(z) = C(z) = (1-z)^{-1}$ (см. [4], формулы (1.9), (1.13) и (1.29)). Отметим, что формула (1.11) впервые была получена в работе [11], для специального случая $\omega(x) = (1-x)^\alpha/\Gamma(1+\alpha)$, $0<\alpha<+\infty$. Следуя рассуждению из [20], предположим, что $\zeta \in \mathbb{C}$ – фиксированная точка, $E \subset \mathbb{C}$ – борелевское множество и рассмотрим функцию Дирака

$$\delta_\zeta(E) = \begin{cases} 1, & \text{при } \zeta \in E \\ 0, & \text{при } \zeta \notin E. \end{cases}$$

Для ассоциированной меры ν субгармонической функции u хорошо известна формула $\nu = (2\pi)^{-1}\Delta u$, являющаяся следствием идентифицирования ν с линейным функционалом

$$(\nu, \varphi) \equiv \iint_D \varphi(z)d\nu(z) = \iint_D u(z)\Delta\varphi(z)d\sigma(z), \tag{3.15}$$

где $\sigma(z)$ – плоская мера Лебега. При этом, равенство (3.15) верно для любой субгармонической в области $D \subset \mathbf{C}$ функции $u(z)$ и любой функции $\varphi(z)$ из $C_o^\infty(D)$ (т. е. из класса бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, лежащим в D). Пусть $\nu_\omega^{(\zeta)}$ – ассоциированная мера функции $L_\omega \log|A_\omega(z,\zeta)|$, субгармонической в $|z|<1$. Ввиду (3.14) и (3.15) имеем

$$\begin{aligned}(\nu_\omega^{(\zeta)}, \varphi) &= -\int_{|\zeta|}^1 \omega'(x)\left\{\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|<1} \log\left|A_\omega\left(z, \frac{\zeta}{x}\right)\right|\Delta\varphi(z)d\sigma(z)\right\}dx = \\ &= -\int_{|\zeta|}^1 \omega'(x)\varphi\left(\frac{\zeta}{x}\right)dx, \quad \varphi \in C_o^\infty(|z|<1).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что

$$\nu_\omega^{(\zeta)}(E) = -\int_{|\zeta|}^1 \omega'(x)\delta_\zeta(xE)dx, \quad E \subset \{|z|<1\}.$$

По первому из равенств (1.11), в силу (3.16), при любом $\varphi \in C_o^\infty(|z|<1)$ имеем

$$\begin{aligned}(\nu_\omega, \varphi) &= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<1} L_\omega I_\omega(z)\Delta\varphi(z)d\sigma(z) = \iint\limits_{|\zeta|<1} (\nu_\omega^{(\zeta)}, \varphi)d\nu(\zeta) = \\ &= -\int_0^1 \omega'(x)dx \iint\limits_{|\zeta|<1} \varphi(\zeta)d\nu(\zeta x),\end{aligned}$$

Отсюда приходим к (1.12).

Доказательство теоремы 1.3. По теореме представления Рисса, при любых $\rho_o \in (0,1)$ и z, $|z|<\rho_o$

$$U(z) = \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|\frac{\rho_o(z-\zeta)}{\rho_o^2 - z\bar{\zeta}}\right| d\nu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_o^2 - |z|^2}{|\rho_o e^{i\theta} - z|^2} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta. \tag{3.17}$$

Тем самым

$$L_\omega U(z) = \log\frac{1}{\rho_o}\iint_{|\zeta|<\rho_o} d\nu(\zeta) + L_\omega \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|\frac{\frac{z}{\rho_o}-\frac{\zeta}{\rho_o}}{1-\frac{z}{\rho_o}\frac{\bar\zeta}{\rho_o}}\right| d\nu(\zeta) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta, \quad |z|<\rho_o. \tag{3.18}$$

Как следует из (1.9) и (1.11) – (1.12)

$$L_\omega \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|\frac{\frac{z}{\rho_o}-\frac{\zeta}{\rho_o}}{1-\frac{z}{\rho_o}\frac{\bar\zeta}{\rho_o}}\right| d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<\rho_o} \log\left|A\left(\frac{z}{\rho_o},\frac{\zeta}{\rho_o}\right)\right| d\mu(\zeta) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2}\left(\iint_{|\zeta|<\rho_o} L_\omega \log\left|\frac{e^{i\theta}-\frac{\zeta}{\rho_o}}{1-e^{i\theta}\frac{\bar\zeta}{\rho_o}}\right| d\nu(\zeta)\right) d\theta,$$

где последнее слагаемое – гармоническая функция и

$$\mu(E) = L_\omega \nu(E) = -\int_0^1 \nu(tE)d\omega(t), \quad E\subset\{|z|<\rho_o\}.$$

Отсюда следует, что $\nu_1 \equiv \nu_2$. Тем самым

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta \equiv 0, \quad |z|<\rho_o.$$

Поскольку

$$L_\omega \frac{1-\left|\frac{z}{\rho_o}\right|^2}{\left|e^{i\theta}-\frac{z}{\rho_o}\right|^2} = \mathrm{Re}\, L_\omega \frac{1+e^{-i\theta}\frac{z}{\rho_o}}{1-e^{-i\theta}\frac{z}{\rho_o}} = \mathrm{Re}\, L_\omega\left\{2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k e^{-ik\theta}-1\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{-2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k e^{-ik\theta}\int_0^1 t^k d\omega(t) - 1\right\},$$

то последнее тождество можно записать в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k \int_0^1 t^k d\omega(t)\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}U(\rho_o e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta\right\} \equiv 0,$$

где $|z|<\rho_o$. Выражение в фигурных скобках является голоморфной в $|z|<\rho_o$ функцией. Поэтому, при $|z|<\rho_o$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_o}\right)^k \int_0^1 t^k d\omega(t)\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}U(\rho_o e^{i\theta})d\theta \equiv iC,$$

где C – вещественная постоянная. Очевидно, что $C = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho_o e^{i\theta})d\theta = 0, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta}U(\rho_o e^{i\theta})d\theta = 0, \quad k \geq 1.$$

Так как все коэффициенты Фурье функции $U(\rho_o e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ равны нулю, то $U(\rho_o e^{i\theta}) = 0$ почти для всех $\theta \in [0, 2\pi]$, откуда следует, что $U(z) \equiv 0$.

Доказательство леммы 1.3. Определение (1.13) функции $\omega_3(x)$ корректно, поскольку в справедливости второго равенства нетрудно убедиться интегрированием по частям и простой заменой переменной. Поменяв порядок интегрирования, получим

$$\omega_3(x) = \int_x^1 \omega_1'(t)dt \int_{x/t}^1 \omega_2'(\tau)d\tau = \int_x^1 d\tau \int_\tau^1 \omega_1'(t)\omega_2'\left(\frac{\tau}{t}\right) dt.$$

Следовательно, $\omega_3(0) = 1$ и верны равенства (1.14). В силу (1.14) функция $\omega_3'(x)$ непрерывна в $[0, 1]$. С другой стороны, при x достаточно близких к 1 заменой переменной $t \to x/t$ в первом из равенств (1.13) получим

$$\omega_3(x) = -\int_x^1 \omega_2(t)d\omega_1\left(\frac{x}{t}\right) \leq O(1-x)^{\varepsilon_2}\omega_1(x) \leq O(1-x)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

где $\varepsilon_{1,2} > 0$ такие же, как в соотношениях (1.5) для $\omega_{1,2}(x)$. Следовательно $\omega_3(x) \in \Omega_s$. Первое равенство (1.15) можно проверить используя (1.14), а второе справедливо, поскольку в рассуждении $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ можно поменять местами.

ABSTRACT. **M. M. Djrbashian's theory of factorization of functions meromorphic in the unit disk is extended to a exhaustive theory of Riesz type representations of δ-subharmonic functions. A new, simplified way of construction is chosen which resembles the author's previous consrtuctions for the half-plane and is based on the invertibility of the operator L_ω of M. M. Djrbashian. An exhausting result is obtained on the qualitative comparison of M. M. Djrbashian's ω-characteristics with Nevanlinna characteristics. Some results on the problems of embedding of M. M. Djrbashian's N_ω classes and of certain classes of δ-subharmonic functions also follow.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "Классы функций и их параметрическое представление",

Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965. стр. 118 – 137, Наука, Москва, 1966.

2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
3. М. М. Джрбашян, "Обобщенный оператор Римана–Лиувилля и некоторые приложения", Известия АН СССР, Сер. матем., т. 32, стр. 1075 – 1111, 1968.
4. М. М. Джрбашян, "Теория факторизации функций, мероморфных в круге", Мат. сборник, т. 79(121), стр. 517 – 615, 1969.
5. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, "Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида", Известия АН Армении, Математика, т. 2 – 3, стр. 182 – 194, 1971.
6. M. M. Djrbashian, "Theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in the disk", Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974, pp. 197 – 202.
7. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге, Наука, Москва, 1993.
8. В. С. Захарян, "Сегментальные вариации потенциала типа Грина", ДАН Армении, т. 66, № 4, стр. 212 – 215, 1978.
9. В. С. Захарян, А. Г. Унанян, "Вариация потенциалов типа Грина на сегменте", ДАН Армении, т. 73, № 1, стр. 3 – 8, 1981.
10. С. Л. Берберян, "О граничном поведении субгармонических функций классов U_α", Известия АН Армении, Математика, т. 21, № 2, стр. 187 – 197, 1986.
11. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций", Известия НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 34 – 49, 1994
12. M. M. Djrbashian, "Some open problems in the theory of representations of analytic functions", Lecture Notes in Mathematics, vol. 1043, pp. 522 – 526, 1984.
13. И. В. Островский, "Об одной проблеме моментов Хаусдорфа", Известия АН Армении, Математика, т. 25, № 1, стр. 91 – 96, 1990.
14. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении функций, мероморфных в единичном круге", ДАН Армянской ССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
15. М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Института матем. и мех. АН Армянской ССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
16. R. Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1936.
17. J. D. Tamarkin, "On integrable solutions of Abel's integral equation", Ann. of Math., vol. (2)31, pp. 219 – 228, 1930.
18. Ф. Д. Гахов, Граничные задачи, ГИФМЛ, Москва, 1958.
19. W. K. Hayman, P. B. Kennedy, Subharmonic functions, Ac. Press., London, 1976.
20. К. Л. Аветисян, "Потенциалы типа Грина и представимость весовых классов субгармонических функций", Известия НАН Армении, Математика, т. 30, № 2, стр. 3 – 34, 1995.

6 февраля 1995

Институт математики
Национальной Академии Наук Армении