Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛИДИСКЕ ФУНКЦИЙ

А. В. Арутюнян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том. 30, № 2, 1995

При предположении, что $\omega_j\,(1 \le j \le n)$ – функции, в определенном смысле правильно изменяющиеся на интервале $(0,1)$, и $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, через $H^p(\omega)$ обозначено подпространство голоморфных в полидиске функций, для которых

$$||f||_{H^p(\omega)} = \left(\int_{U^n} |f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < +\infty.$$

В работе найдена исчерпывающая характеристика пространств $H^p(\omega)$ в терминах смешанных производных. В частности, доказано что $f \in$ $\in H^p(\omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}(f(z)z^{k+1})}{\partial z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}} \in H^p(\tilde\omega),$$

где $\tilde\omega = (\tilde\omega_1, ..., \tilde\omega_n)$, $\tilde\omega_j(t) = t^{k_j}\omega_j(t)$ $(1 \le j \le n)$.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть U^n – единичный полидиск n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, а $\mathbf{T}^n$ – его остов. Далее, пусть $H(U^n)$ – множество голоморфных в полидиске функций. Символом S обозначим множество измеримых и неотрицательных на (0,1) функций ω, для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω и q_ω, причем $m_\omega, q_\omega \in (0,1)$ таковы, что

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega$$

при всех $r \in (0,1)$ и $\lambda \in [q_\omega, 1]$. Функции класса S изучены в [1]. Если $\omega_j \in S$, $j = 1, 2, ..., n$, то запись $\omega(1-|z|)$ будет означать произведение $\prod_{j=1}^n \omega_j(1-|z_j|)$. Если $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$, то, как обычно, $z^\alpha = \prod_{j=1}^n z_j^{\alpha_j}$. При $k = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим

$$\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}}.$$

Пусть $\omega_j \in S$, $j = 1, 2, ..., n$ и $0 < p < +\infty$. Обозначим через $L^p(\omega) = L^p(\omega_1, ..., \omega_n)$ класс измеримых по Лебегу функций f в U^n, для которых

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{U^n} |f(z)|^p \omega(1-|z|) dm_{2n}(z)\right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь $m_{2n}(z)$ – $2n$-мерная мера Лебега на U^n. Далее, через $H^p(\omega) = H^p(\omega_1, ..\omega_n)$ обозначим класс голоморфных в U^n функций f, для которых $f \in L^p(\omega)$. Отметим, что при $n = 1$, $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$ эти пространства были впервые введены и изучены М. М. Джрбашяном [2], [3]. В данной работе существенную роль играют интегральные представления, найденные в [2] и [3]. Цель работы – дать полную характеристику пространства $H^p(\omega)$ в терминах производных, посредством обобщения следующей теоремы Кехе Зу [4].

Теорема А. *Пусть $1 \le p < +\infty$. Тогда $f \in H^p$ тогда и только тогда, когда классу L^p принадлежат функции*

$$(1-|z_1|^2)\frac{\partial f(z_1,0)}{\partial z_1}, \quad (1-|z_2|^2)\frac{\partial f(0,z_2)}{\partial z_2}, \quad \text{и} \quad (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_1 \partial z_2}.$$

Мы обобщаем эту теорему по следующим направлениям : а) доказываем, что теорема верна для любого p $(0 < p < +\infty)$, б) берем производные любого порядка, в) рассматриваем анизотропные пространства $H^p(\omega)$. Точнее, доказываем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть f – голоморфная в U^n функция*, $0 < p < +\infty$, $k = (k_1, ..., k_n) \in$

$\in Z_+^n$. *Тогда следующие утверждения равносильны :*

1° $f \in H^p(\omega)$;

2° *каждая функция из последовательности* $(1-|z_j|^2)^{i_j} \dfrac{\partial^{i_j} f(z', 0, z'')}{\partial z_j^{i_j}}$, *где* $0 \leq$ $\leq i_j \leq k_j - 1$, $1 \leq j \leq n$, $z' = (z_1, ... z_{j-1})$, $z'' = (z_{j+1}, ..., z_n)$, $(1-|z|^2)^k \dfrac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k}$ *принадлежит* $L^p(\omega)$. *При этом, норма каждой функции указанной последовательности в пространстве* $L^p(\omega)$ *оценивается сверху нормой* $||f||_{H^p(\omega)}$.

Из этой теоремы можно вывести следующую характеристику класса $L^p(\omega)$ в терминах производных.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p < +\infty$, $\omega_j \in S$ $(j = 1, ..., n)$, $k = (k_1, ..., k_n) \in Z_+^n$. *Тогда следующие утверждения равносильны :*

1° $f \in H^p(\omega)$,

2° $\partial^{|k|}(f(z)z^{k+1})/\partial z^k \in H^p(\tilde{\omega})$, где $\tilde{\omega}_j(t) = t^{k_j}\omega_j(t)$, $j = 1, ..., n$.

Отметим, что как установлено ниже (§2, следствие), при $n = 2$, $k_1 = k_2 = 1$ последняя теорема совпадает с теоремой А.

§1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Будем полагать, чтоs_j, $1 \leq j \leq n$ – неотрицательные целые числа, r_j – целое число такое, что $-2^{s_j} \leq r_j \leq 2^{s_j} - 1$ и

$$\Delta_{s_j, r_j} = \left\{ z_j : 1 - \frac{1}{2^{s_j}} \leq |z_j| < 1 - \frac{1}{2^{s_j+1}}, \frac{\pi r_j}{2_j^s} \leq \arg z_j < \frac{\pi(r_j+1)}{2^{s_j}} \right\},$$

$$\Delta_{s,r} = \Delta_{s_1,r_1} \times ... \times \Delta_{s_n,r_n}.$$

Нам часто понадобятся следующие неравенства (см. [5]) :

$$(1-\eta)(1-|z_{s_j,r_j}) \leq (1-|z_j|) \leq (1+\eta)(1-|z_{s_j,r_j}|), \quad 0 < \eta < 1, \quad z_j \in \Delta_{s_j,r_j},$$
$$\frac{(1-|z_{s_j,r_j}|)^2}{4} \leq |\Delta_{s_j,r_j}| \leq 4(1-|z_{s_j,r_j}|)^2, z_{s,r} \in \Delta_{s,r}. \tag{1.1}$$

Через $D_\alpha(\zeta, z)$ обозначим многомерное ядро М. М. Джрбашяна

$$D_\alpha(\zeta, z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j + 1}{\pi} \frac{(1 - |\zeta|^2)^{\alpha_j}}{(1 - \overline{\zeta}_j z_j)^{\alpha_j + 2}}, \quad \zeta, z \in U^n.$$

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если f – голоморфная в U^n функция и*

$$(1 - |z_j|)^{k_j} \frac{\partial^{k_j} f(z)}{\partial z_j^{k_j}} \in L^p(\omega),$$

то при $k_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$ и обозначениях $\omega' = (\omega_1, ..., \omega_{j-1})$, $\omega'' = (\omega_{j+1}, ..., \omega_n)$

$$(1 - |z_j|)^{k_j} \frac{\partial^{k_j} f(z', 0, z'')}{\partial z_j^{k_j}} \in L^p(\omega', \omega'').$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем полагать, что $j = 1$. Ввиду субгармоничности функции $\left| \frac{\partial^{k_1} f(z)}{\partial z_1^{k_1}} \right|^p$, получаем

$$\left| \frac{\partial^{k_1} f(0, z_2')}{\partial z_1^{k_1}} \right|^p \leq \int_T \left| \frac{\partial^{k_1} f(\rho\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1^{k_1}} \right|^p dm(\zeta_1), \quad 0 < \rho_1 < 1, \; z_2' = (z_2, ..., z_n). \quad (1.2)$$

Умножив обе части этого неравенства на $\rho_1 \tilde{\omega}_1(1 - \rho_1)$, положив $z_1 = \rho_1 \zeta_1$, проинтегрируем полученное неравенство. Тогда будем иметь

$$\left| \frac{\partial^{k_1} f(0, z_2')}{\partial z_1^{k_1}} \right|^p \int_U \tilde{\omega}_1(1 - |z_1|) dm_2(z_1) \leq 2\pi \int_U \left| \frac{\partial^{k_1} f(z)}{\partial z_1^{k_1}} \right|^p \tilde{\omega}_1(1 - |z_1|) dm_2(z_1).$$

Далее, умножив обе части этого неравенства на $\prod_{j=2}^{n} \omega_j(1 - |z_j|)$ и проинтегрировав, получим

$$\int_{U^n} \left| \frac{\partial^{k_1} f(0, z_2')}{\partial z_1^{k_1}} \right|^p \tilde{\omega}_1(1 - |z_1|) \prod_{j=2}^{n} \omega_j(1 - |z_j|) dm_{2n}(\zeta) < +\infty.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем, полагая $m = (m_1, ..., m_n) \in Z_+^n$, будем обозначать $\delta_{m_i}(\zeta_i, z_i) = [1 - (1 - \overline{\zeta}_i z_i)^{m_i + 1}] / \overline{\zeta}_i$. Имеет место следующая

Лемма 2. *Если*

$$(1-|z_j|^2)^{k_j}\frac{\partial F(z)}{\partial z_j}\in L^p(\omega),$$

то $(1-|z_j|^2)^{k_j-1}G(z)\in L^p(\omega)$, *где*

$$G(z)=\frac{m_i+1}{\pi}\int_U\frac{(1-|\zeta_j|^2)^{m_j}}{(1-\overline{\zeta}_j z_j)^{m_j+1}}\delta_{m_j}(\zeta_j,z_j)\frac{\partial F(z',\zeta_j,z'')}{\partial\zeta_j}dm_2(\zeta_j).$$

При этом, $||\varphi||_{L^p(\omega)}\le||\psi||_{L^p(\omega)}$, *где* $\varphi(z)=(1-|z_j|^2)^{k_j-1}G(z)$, *а* $\psi(z)=$ $=(1-|z_j|^{k_j}\partial F(z)/\partial z_j$.

Доказательство. Пусть $j=1$. Спачала рассмотрим случай $0<p\le1$. Имеем

$$\int_{U^n}|G(z)|^p(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)=C\int_{U^n}(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)\times$$
$$\times\left|\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^{m_1+1}}\frac{\partial F(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1}dm_2(\zeta_1)\right|^p dm_{2n}(z)=I.$$

Легко убедится в том, что

$$|\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)|\le C(m_1). \tag{1.3}$$

Следовательно

$$I\le C(m_1)\int_{U^n}(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)\times$$
$$\times\left(\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}}{|1-\overline{\zeta}_1 z_1|^{m_1+1}}\left|\frac{\partial F(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1}\right|dm_2(\zeta_1)\right)^p dm_{2n}(z).$$

Учитывая, что $0<p\le1$, получим

$$I\le C\int_{U^n}(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)\sum_{s_1=0}^{\infty}\sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1}\times$$
$$\times\max_{\zeta_1\in\overline{\Delta}_{s_1,r_1}}\left\{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1p}\left|\frac{\partial F(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1}\right|^p\left(\int_{\Delta_{s_1,r_1}}\frac{dm_2(\zeta_1)}{|1-\overline{\zeta}_1 z_1|^{m_1+1}}\right)^p dm_{2n}(z)\right\}.$$

Теперь введем обозначения

$$J_{s_1,r_1}=\int_U\left(\int_{\Delta_{s_1,r_1}}\frac{dm_2(\zeta_1)}{|1-\overline{\zeta}_1 z_1|^{m_1+1}}\right)^p(1-|z_1|)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z_1|)dm_2(z_1).$$

Взяв m_j достаточно большим, можем предполагать, что $(m_1+2-k_1)p>2$. Оценим интеграл J_{s_1,r_1}. При этом, для простоты изложения будем опускать индексы. Используя определение прямоугольников $\Delta_{s,r}$, интеграл $J_{s,r}$ можно записать в следующем виде :

$$J_{s,r}=\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(i-1)p}rdrd\theta.$$

Здесь $\rho_s=1-2^{-s}$, $\alpha_{s,r}=\frac{\pi r}{2^s}$ и $-2^s\leq r\leq 2^{s-1}$. Используя эти равенства, получаем

$$J_{s,r}=\int_0^1\int_{-\pi}^{\alpha_{s,r}}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(i-1)p}rdrd\theta+$$

$$+\int_0^1\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(i-1)p}rdrd\theta+$$

$$+\int_0^1\int_{\alpha_{s,r+1}}^{\pi}\left(\int_{\rho_s}^{\rho_{s+1}}\int_{\alpha_{s,r}}^{\alpha_{s,r+1}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{|1-\rho e^{-i\varphi}z|^{m+1}}\right)^p(1-r)^{(i-1)p}rdrd\theta=$$

$$=J_{s,r}^1+J_{s,r}^2+J_{s,r}^3.$$

Оценим отдельно $J_{s,r}^1$, $J_{s,r}^2$ и $J_{s,r}^1$. Поскольку

(а) $|1-z\rho e^{-i\varphi}|\geq 1/4|1-z\rho_{s+1}e^{-i\varphi}|$ при условии, что $s\geq 2$, $\rho_s\leq\rho\leq\rho_{s+1}$ и $|z|\geq 1/2$,

(б) $|1-\rho_{s+1}re^{i(\theta-\varphi)}|\geq|1-\rho_{s+1}re^{i(\theta-\alpha_{s,r})}|$ при $-\pi\leq\theta\leq\alpha_{s,r}$,

то для $J_{s,r}^1$ имеем

$$J_{s,r}^1\leq C(p)|\Delta_{s,r}|^p\int_0^1\int_{-\pi}^{\alpha_{s,r}}\frac{r(1-r)^\alpha drd\theta}{|1-\rho_{s+1}re^{i(\theta-\alpha_{s,r})}|^{(m+1)p}}.$$

Теперь заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-r\rho e^{i\theta}|^\lambda}\leq\frac{C(\lambda)}{(1-r\rho)^{\lambda-1}}. \tag{1.4}$$

Используя это неравенство, а также лемму 2 из [5], получаем

$$J_{s,r}^1\leq\frac{C(p)|\Delta_{s,r}|^p\omega(1-\rho_{s+1})}{(1-\rho_{s+1})^{p(m-l+2)-2}}.$$

Последнее неравенство имеет место и для интегралов $J_{s,r}^2$, $J_{s,r}^3$. Действительно, для $J_{s,r}^2$ она следует из леммы 2 [5] и из равенства $\alpha_{s,r+1}-\alpha_{s,r}=2\pi(\rho_{s+1}-\rho_s)$, а для $J^3_{s,r}$ она получается рассуждением, аналогичным оценке $J^1_{s,r}$. Объединяя оценки $J^j_{s,r}$ $(j = 1,2,3)$ и учитывая (1.1), получим

$$I \leq C(p) \int_{U^{n-1}} \omega_2(1-|z_2|)...\omega_n(1-|z_n|)\times$$
$$\times \sum_{s_1=0}^{+\infty} \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1} \max_{\zeta_1 \in \overline{\Delta}_{s_1,r_1}} \left\{ (1-|\zeta_1|^2)^{2+k_1p}\omega_1(1-|\zeta_1|) \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p \right\} dm_{2(n-1)}(z_2').$$

Применив лемму 4 из [5], получим

$$I \leq C(p) \int_{U^n} (1-|z_1|^2)^{k_1p} \left| \frac{\partial F(z)}{\partial z_1} \right|^p \omega(1-|z|)dm_{2n}(z) \leq ||\psi||_{L^p(\omega)} < +\infty.$$

Перейдя к случаю $p > 1$ заметим, что $G(z)$ можно записать в виде

$$G(z) = C(m) \int_U D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)\delta_{m_1}(\zeta_1, z_1)(1-|\zeta_1|^2)\frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} dm_2(\zeta_1).$$

Предположим, что γ_1 – число, удовлетворяющее условиям леммы 2 из [5]. Тогла, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|G(z)|^p \leq C(m) \int_U \frac{|D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)|}{\chi^p_{\gamma_1}(\zeta_1)} |\delta_{m_1}(\zeta_1, z_1)|^p \times$$
$$\times (1-|\zeta_1|^2)^p \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p dm_2(\zeta_1) \left(\int_U |D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)| \chi^q_{\gamma_1}(\zeta) dm_2(\zeta_1) \right)^{p/q} \leq$$
$$\leq C(m)\chi^p_{\gamma_1}(z_1) \int_U \frac{|D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)|(1-|\zeta_1|^2)^p}{\chi^p_{\gamma_1}(\zeta_1)} \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p dm_2(\zeta_1).$$

Здесь мы воспользовались леммой A и оценкой (1.3). Умножив обе части последнего неравенства на $(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)$ и проинтегрировав, будем иметь

$$\int_{U^n} |G(z)|^p(1-|z_1|^2)^{(k_1-1)p}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z) \leq C(m_1) \int_{U^n} (1-|z_1|^2)^{(l_1-1)p}\times$$
$$\times \omega(1-|z|)\chi^p_{\gamma_1}(z_1) \int_U \frac{|D_{m_1-1}(\zeta_1, z_1)|}{\chi^p_{\gamma_1}(\zeta_1)}(1-|\zeta_1|^2)^p \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p dm_2(\zeta_1)dm_{2n}(z).$$

Используя лемму 2 из [5] получим

$$\int_{U^n} |G(z)|^p(1-|z_1|^2)^{(l_1-1)p}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z) \leq C(m_1) \int_{U^{n-1}} \omega_2(1-|z_2|)...\omega_n(1-|z_n|)\times$$
$$\times \left(\int_U (1-|\zeta_1|^2)^{k_1p} \left| \frac{\partial F(\zeta_1, z_2')}{\partial \zeta_1} \right|^p \omega_1(1-|\zeta_1|)dm_2(\zeta_1) \right) dm_{2n-2}(z_2') =$$
$$= C(m_1) \int_{U^n} (1-|z_1|^2)^{k_1p} \left| \frac{\partial F(z)}{\partial z_1} \right|^p \omega(1-|z|)dm_{2n}(z) \leq C(m_1)||\psi||_{L^p(\omega)} < +\infty.$$

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Используя леммы 1 и 2 докажем теорему 1. Сначала докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $f \in H^p(\omega)$. Тогда, по теореме М. М. Джрбашяна [2], при больших $m_j, 1 \le j \le n$ имеет место представление

$$f(z) = \int_{U^n} D_m(\zeta, z) f(\zeta) dm_{2n}(\zeta).$$

Дифференцированием отсюда получим

$$\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} = C(m,n,k) \int_{U^n} \frac{(1-|\zeta|^2)^m \zeta^k}{(1-\overline{\zeta} z)^{m+k+2}} f(\zeta) dm_{2n}(\zeta).$$

Сначала предположим, что $0 < p \le 1$. Тогда, повторяя рассуждения леммы 2, придем к оценке

$$I = \int_{U^n} \left| \frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} \right|^p (1-|z|^2)^{kp} \omega(1-|z|) dm_{2n}(z) \le$$
$$\le C(p) \sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{+\infty} \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1} \cdots \sum_{r_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1} \max_{\zeta \in \overline{\Delta}_{s,r}} \left\{ (1-|\zeta|^2)^{mp} |f(\zeta)|^p \right\} \times$$
$$\times \int_{U^n} \omega(1-|z|)(1-|z|^2)^{kp} \left(\int_{\Delta_{s,r}} \frac{dm_{2n}(\zeta)}{|1-\overline{\zeta} z|^{m+k+2}} \right)^p dm_{2n}(z).$$

Интеграл в правой части этой оценки обозначим через $J_{s,r}$. Для него нетрудно установить неравенство

$$|J_{s,r}| \le \frac{\omega(1-\rho_{s+1})}{(1-\rho_{s+1})mp-2}.$$

Следовательно

$$I \le C(p) \sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{+\infty} \sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1} \cdots \sum_{r_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1} \max_{\zeta \in \overline{\Delta}_{s,r}} \left\{ (1-|\zeta|^2)^2 \omega(1-|\zeta|) |f(\zeta)|^p \right\} \le$$
$$\le C_1(p) \int_{U^n} |f(\zeta)|^p \omega(1-|\zeta|) dm_{2n}(\zeta) = C_1(p) ||f||_{H^p(\omega)} < +\infty.$$

Рассмотрим случай $p > 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\left| \frac{\partial^k f(z)}{\partial z^k} \right|^p \le \int_{U^n} \frac{|D_{m+k}(\zeta,z)||f(\zeta)|^p}{\chi_\gamma^p(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{kp}} dm_{2n}(\zeta) \left(\int_{U^n} |D_{m+k}(\zeta,z)| \chi_\gamma^q(\zeta) dm_{2n}(\zeta) \right)^{p/q}.$$

Здесь γ удовлетворяет условиям леммы 2 из [5]. Из этой леммы следует, что

$$\left| \frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} \right| \le C(p) \chi_\gamma^p(z) \int_{U^n} \frac{|D_{m+k}(\zeta,z)||f(\zeta)|^p}{\chi_\gamma^p(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{kp}} dm_{2n}(\zeta).$$

Отсюда имеем

$$\int_{U^n}\left|\frac{\partial^{|k|}f(z)}{\partial z^k}\right|^p(1-|z|^2)^{kp}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)\le$$
$$\le\int_{U^n}(1-|z|^2)^{kp}\omega(1-|z|)\chi^p_\gamma(z)\left(\int_{U^n}\frac{|D_{m+k}(\zeta,z)||f(\zeta)|^p}{\chi^p_\gamma(\zeta)(1-|\zeta|^2)^{kp}}dm_{2n}(\zeta)\right)dm_{2n}(z).$$

Изменив порядок интегрирования и снова применив лемму 2 из [5], получим

$$\int_{U^n}\left|\frac{\partial^{|k|}f(z)}{\partial z^k}\right|^p(1-|z|^2)^{kp}\omega(1-|z|)dm_{2n}(z)\le$$
$$\le\int_{U^n}|f(\zeta)|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\le C(p)||f||_{H^p(\omega)}<+\infty.$$

Теперь, проведя аналогичные рассуждения, легко доказать, что

$$(1-|z_j|^2)^{i_j}\frac{\partial^{i_j}f(z',0,z'')}{\partial z_j^{i_j}}\in L^p(\omega),\quad z'=(z_1,...,z_{i-1})$$

при $z''=(z_{i+1},...,z_n)$, $0\le i_j\le k_j-1$, $1\le j\le n$. Перейдем к доказательству импликации $2^\circ\Rightarrow 1^\circ$. Так как $\partial^{|k|}f(z)/\partial z^k\in H^p(\overline{\omega})$, то

$$\frac{\partial^{|k|}f(z)}{\partial z^k}=\frac{m_1+1}{\pi}\int_U D_{m_1}(\zeta_1,z_1)\frac{\partial^{|k|}f(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}}dm_2(\zeta_1).$$

Интегрируя это равенство по z_1 по радиусу, получаем

$$f_{k_1-1}(z)=f_{k_1-1}(0,z_2')+C(m_1)\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{m_1+1}}\frac{\partial^{|k|}f(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}}dm_2(\zeta_1),\tag{2.1}$$

где $f_{k_1-i}(z)=\partial^{k_1-i+k_2+...+k_n}f(z)/\partial z_1^{k_1-i}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}$, $0\le i\le k_1$. Ввиду того, что

$$(1-|z_1|^2)^{k_1-1}\frac{\partial^{k_1-1}f(0,z_2')}{\partial z_1^{k_1-1}}\in L^p(\omega),$$

очевидно имеем $(1-|z_1|^2)^{k_1-1}f_{k_1-1}(0,z_2')\in L^p(\omega_1,\bar\omega_2')$ и $\bar\omega_2'=(\bar\omega_2',...,\bar\omega_n')$. Теперь, воспользовавшись леммой 2 приходим к заключению, что интегральное выражение (2.1), умноженное на $(1-|z_1|^2)^{k_1-1}\prod_{j=2}^n(1-|z_j|^2)^{k_j}$, принадлежит $L^p(\omega)$. Следовательно $(1-|z_j|^2)^{k_1-1}f_{k_1-1}(z)\in L^p(\omega_1,\bar\omega_2')$. Тем самым,

$$f_{k_1-2}(z)=f_{k_1-2}(0,z_2')+$$
$$+C(m_1)\int_U\frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)}{(1-\overline{\zeta}_1z_1)^{m_1+1}}\frac{\partial^{k_1-1+k_2+...+k_n}f(\zeta_1,z_2')}{\partial\zeta_1^{k_1-1}\partial z_2^{k_2}...\partial z_n^{k_n}}dm_2(\zeta_1).$$

Отсюда следует, что $(1-|z_1|^2)^{k_1-2}f_{k_1-2}(z) \in L^p(\omega_1,\tilde{\omega}_2')$. Продолжая процесс снижения порядка дифференцирования, в итоге получаем

$$\frac{\partial^{k_2+\ldots+k_n} f(z)}{\partial z_2^{k_2}\ldots\partial z_n^{k_n}} \in L^p(\omega_1,\tilde{\omega}_2').$$

Повторяя эти рассуждения для остальных переменных, придем к заключению, что $f\in H^p(\omega)$.

Следствие. Функции $f(z_1,0)$ и $(1-|z_1|^2)\{\partial f(z_1,0)/\partial z_1\}$, а также функции $f(0,z_2)$ и $(1-|z_2|^2)\{\partial f(0,z_2)/\partial z_2\}$ принадлежат $L^p(\omega_1,\omega_2)$ одновременно. Действительно, пусть

$$(1-|z_1|^2)\frac{\partial f(z_1,0)}{\partial z_1} \in L^p(\omega_1,\omega_2).$$

Тогда

$$f(z_1,0)=f(0,0)+C(m_1)\int_U \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^{m_1+1}}\delta_{m_1}(\zeta_1,z_1)\frac{\partial f(\zeta_1,0)}{\partial \zeta_1}dm_2(\zeta_1).$$

Из леммы 2 следует, что $f(z_1,0)\in L^p(\omega_1,\omega_2)$. Обратно, если $f(z_1,0)\in L^p(\omega_1,\omega_2)$, то

$$f(z_1,0)=\frac{m_1+1}{\pi}\int_U \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{m_1}}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^{m_1+2}} f(\zeta_1,0)dm_2(\zeta_1).$$

Дифференцируя это равенство и рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что

$$(1-|z_1|^2)\frac{\partial f(z_1,0)}{\partial z_1} \in L^p(\omega_1,\omega_2).$$

Что и требовалось доказать.

Для доказательства теоремы 2 введем обозначения

$$\Delta^*_{s_j,r_j}=\left\{z_j:\quad \frac{\pi(r_j-1)}{2^{s_j}}\le \arg z_j<\frac{\pi(r_j+2)}{2^{s_j}}, 1-\frac{1}{2^{s_j-1}}\le |z_j|<1-\frac{1}{2^{s_j+2}}\right\},$$
$$1\le j\le n,\quad -2^{s_j}\le r_j\le 2^{s_j}-1,\quad \Delta^*_{s,r}=\Delta^*_{s_1,r_1}\ldots\Delta^*_{s_n,r_n}.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $f\in H^p(\omega)$. Тогда очевидно, что $z^{k+1}f(z)\in$ $\in H^p(\omega)$. Из теоремы 1 следует, что $\dfrac{\partial^{|k|}\left(f(z)z^{k+1}\right)}{\partial z^k}\in H^p(\tilde{\omega})$. Обратно, предположим, что выполнено последнее включение. Тогда $z^{k+1}f(z)\in H^p(\omega)$, и достаточно доказать, что $g(z) \in H^p(\omega)$, где $g(z) = z_1^{k_1} z_2^{k_2+1} \dots z_n^{k_n+1} f(z)$. С этой целью докажем, что если $z_1 g(z) \in H^p(\omega)$, то $g \in H^p(\omega)$. Сначала покажем, что

$$\max_{z\in\overline{\Delta}_{s,r}} |g(z)|^p \le C \max_{z\in\overrightarrow{\Delta}_{s,r}} |g(z)z_{-1}|^p. \tag{2.2}$$

Действительно, если $s_1 \ne 0$, то $\frac{1}{|z_1|} \le \frac{2^{s_1}}{2^{s_1}-1}$. Тем самым

$$\max_{z\in\overline{\Delta}_{s,r}} \left|\frac{g(z)z_1}{z_1}\right|^p \le \frac{2^{s_1}}{2^{s_1}-1} \max_{z\in\overrightarrow{\Delta}_{s,r}} |g(z)|^p,$$

поскольку $\overrightarrow{\Delta}_{s,r}$ шире, чем $\overline{\Delta}_{s,r}$. Пусть $s_1 = 0$, тогда $0 \le |z_1| < 1/2$. Взяв окружность $\Gamma_1 = \{\zeta_1, |\zeta_1| = 2/3\}$, получим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta_1, z_2')\zeta_1 d\zeta_1}{\zeta_1(\zeta_1 - z_1)},$$

$$|g(z)| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\zeta_1\in\Gamma_1}|g(\zeta_1, z_2')\zeta_1| \int_{\Gamma_1}\frac{|d\zeta_1|}{|\zeta_1||\zeta_1-\zeta_1|} \le \frac{1}{12\pi}\max_{\zeta_1\in\Gamma_1}|g(\zeta_1, z_2')\zeta_1|, \quad |\zeta_1 - z_1| > \frac{1}{6}.$$

Так как функции $|g(z)|^p$ и $|g(z)z_1|^p$ субгармоничны (по z_1), то применяя принцип максимума модуля получим, что (2.2) выполнено при всех s_j, $j = 0, 1, 2, \dots$. Тем самым, используя лемму 4 из [5] получим

$$\sum_{s_1\dots s_n=0}^{+\infty}\sum_{r_1=-2^{s_1}}^{2^{s_1}-1}\dots\sum_{r_n=-2^{s_n}}^{2^{s_n}-1}\max_{\zeta\in\overrightarrow{\Delta}_{s,r}}\left\{|g(\zeta)\zeta_1|^p\omega(1-|\zeta|)|\Delta^*_{s,t}|\right\} \le$$
$$\le C_o\int_{U^n}|g(\zeta)\zeta_1|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta).$$

Таким образом

$$\int_{U^n}|g(z)|^p\omega(1-|z|)dm_{2n}(z) \le C_o\int_{U^n}|g(\zeta)\zeta_1|^p\omega(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta) < +\infty.$$

Продолжая процесс деления, в итоге получим $||f||_{H^p(\omega)} < +\infty$. Теорема доказана.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить профессора Ф. А. Шамояна за постановку задач и постоянное внимание.

ABSRTACT. Assuming that ω_j $(1 \le j \le n)$ are functions having somehow regular variation in $(0,1)$ and $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, a function f holomorphic in U^n is said to be of the weighted space $H^p(\omega)$, if

$$||f||_{H^p(\omega)} = \left(\int_{U^n}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)dm_{2n}(\zeta)\right)^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < +\infty.$$

In the paper it is found a complete characterization of the spaces $H^p(\omega)$ in the terms of partial derivatives. Particularly it is proved that $f \in H^p(\omega)$ if and only if

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}(f(z)z^{k+1})}{\partial z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}} \in H^p(\tilde{\omega}),$$

where $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n)$, $\tilde{\omega}_j(t) = t^{k_j}\omega_j(t)$ $(1 \le j \le n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно изменяющиеся функции, Наука, Москва, 1985.
2. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении функций, мероморфных в круге", ДАН Армянской ССР, т. 3, №1, стр. 3 – 9, 1945.
3. М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР, Вып. 2, стр. 3 – 30, 1948.
4. Kehe Zhu, "The Bergman spaces, the Bloch space and Geeasons problem", Trans. of AMS, v. 309, №1, стр. 253 – 267, 1988.
5. Ф. А. Шамоян, "Диагональные отображения и вопросы представимости в некоторых анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций", Сиб. мат. журнал, т. 31, №2, стр. 195 – 215, 1990.

6 февраля 1995

Ереванский государственный университет,
Институт математики
Национальной Академии Наук Армении