Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

ПОТЕНЦИАЛЫ ТИПА ГРИНА И ПРЕДСТАВИМОСТЬ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. Л. Аветисян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, том 30, № 2, 1995

В статье устанавливаются некоторые свойства потенциалов типа Грина для круга и для полуплоскости комплексной плоскости, построенных посредством факторов типа Бляшке М. М. Джрбашяна и аналогичных факторов, введенных А. М. Джрбашяном и Г. В. Микаеляном. Основными результатами статьи являются представления типа Рисса для некоторых весовых классов субгармонических функций. Результаты статьи обобщают представления для голоморфных и гармонических функций, полученные ранее М. М. Джрбашяном и Ф. А. Шамояном в круге и А. М. Джрбашяном в полуплоскости. Эти представления здесь распространены на субгармонические функции, а представляющие меры модифицированы с применением функциональных классов О. В. Бесова. Получены аналоги формулы обращения Стилтьеса.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В классической монографии Неванлинны (см. [1], раздел 216) содержатся некоторые результаты о распределении нулей голоморфных в единичном круге функций, удовлетворяющих условию весовой интегрируемости

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^{\alpha-1} \log^+ |f(re^{i\theta})| r dr d\theta < +\infty \quad (\alpha > 0,\ \log^+ |f| = \max\{\log |f|, 0\}).$$

Позднее, М. М. Джрбашян [2], [3] установил канонические факторизации этих классов, а Ф. А. Шамоян [4] – [7] – их параметрические представления. Аналогичные результаты для функций, мероморфных в полуплоскости, были получены А. М. Джрбашяном [8]. Основными результатами настоящей статьи являются представления типа Рисса, которые обобщают результаты работ [4] – [8]. Представления [4] – [8] здесь распространены на субгармонические функции, а представляющие меры модифицированы с применением функциональных классов О. В. Бесова. В то же время, результаты статьи усиливают и дополняют результаты работ [9], [10], в частности тем, что здесь устанавливаются формулы обращения, аналогичные формулам обращениям Стилтьеса. Полные доказательства даны в случае полуплоскости, который более сложен, а в случае круга доказательства мы пропускаем.

Возможность расширения факторизаций монографии [11] на субгармонические функции впервые была указана М. М. Джрбашяном [12]. На Международной конференции по теории аналитических функций, Ереван, 1965, М. М. Джрбашян ввел потенциалы типа Грина, основанные на своих произведениях типа Бляшке для единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (см. [11], гл. IX). Позднее, А. М. Джрбашян [13] ввел аналогичные потенциалы типа Грина для полуплоскости. В [10] были введены следующие потенциалы типа Грина :

$$V_\alpha(z) \equiv V_\alpha(z,\nu) = \iint\limits_{\mathbb{D}} \log|A_\alpha(z,\zeta)| d\nu(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.1}$$

$$I_\alpha(z) \equiv I_\alpha(z,\mu) = \iint\limits_{G+} \log|a_\alpha(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+. \tag{1.2}$$

Здесь

$$A_\alpha(z,\zeta) = \exp\left[-\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^\alpha}{(1-z\zeta^{-1}t)^{\alpha+1}}\,\frac{dt}{t}\right] \quad |\zeta|<1,\ -1<\alpha<+\infty. \tag{1.3}$$

– элементарный фактор типа Бляшке М. М. Джрбашяна [2], [3], а $\nu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\alpha+1} d\nu(\zeta) + \int\limits_{|\zeta|<1/2}\int \log\frac{1}{|\zeta|} d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{1.4}$$

Далее

$$a_\alpha(z,\zeta) = \exp\left[-\int_0^{2\operatorname{Im}\zeta} \frac{\tau^\alpha d\tau}{(\tau+i\zeta-iz)^{\alpha+1}}\right] \quad (-1<\alpha<+\infty) \tag{1.5}$$

– элементарный фактор типа Бляшке, введенный А. М. Джрбашяном и Г. В. Микаеляном [14], а $\mu(\zeta)$ – неотрицательная борелевская мера на G^+, удовлетворяющая условию

$$\iint\limits_{G^+} (\mathrm{Im}\,\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < +\infty. \tag{1.6}$$

Потенциалы типа Грина V_α и I_α становятся обычными потенциалами Грина при $\alpha = 0$. Всюду ниже, для простоты, вместо выражения ***неотрицательная борелевская мера*** будем употреблять слово ***мера***.

В статье установлены некоторые свойства потенциалов типа Грина (1.1) и (1.2), выраженные в терминах операторов дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и Вейля. Приведем определения этих операторов. Полагая, что $f(z) = f(re^{i\theta})$ – измеримая в $\mathbb{D}$ функция, рассмотрим оператор интегродифференцирования Римана–Лиувилля, определяемый следующим образом :

$$\begin{gathered} D^{-\alpha} f(re^{i\theta}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(te^{i\theta})dt = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\sigma)^{\alpha-1} f(\sigma z)d\sigma, \\ D^0 f(z) = f(z), \quad D^\alpha f(z) = \frac{\partial^n}{\partial r^n} D^{-(n-\alpha)} f(z), \qquad z = re^{i\theta}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $0 < \alpha < \infty$, а n – целое число, определяемое из неравенств $n - 1 < \alpha \le n$. Для измеримых функций $f(z) = f(x+iy)$, заданных в G^+, введем в рассмотрение операцию интегродифференцирования по Вейлю относительно переменной y :

$$\begin{gathered} W_y^{-\alpha} f(z) \equiv W^{-\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^{+\infty} (t-y)^{\alpha-1} f(x+it)dt = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(z+i\sigma)d\sigma, \\ W^0 f(z) = f(z), \quad W^\alpha f(z) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} W^{-(p-\alpha)} f(z), \qquad z = x+iy, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где α и n такие как выше. Сходимость этих интегралов и другие свойства операторов $D^{-\alpha}$ и $W^{-\alpha}$ исследованы в [11] и [13], [15]. Мы будем использовать также рассмотренные в [13], [15] классы M_β функций, убывающих в бесконечности. В соответствии с [13], [15] будем говорить, что измеримая в G^+ функция $f(z)$ принадлежит классу $M_\beta (\beta \ge 0)$, если существует угловая область

$$\Lambda(\delta_0, R_0) = \left\{z \in \mathbf{C} : \left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| < \delta_0, |z| > R_0\right\} \quad \left(0 < \delta_0 < \frac{\pi}{2}, 0 < R_0 < +\infty\right)$$

такая, что для любого компакта $K \subset \Lambda(\delta_0, R_0)$

$$\sup_{z\in K} \int_1^{+\infty} \sigma^{\beta-1}|f(z+i\sigma)|d\sigma < +\infty.$$

Следующие две теоремы являются основными результатами о потенциалах типа Грина.

Теорема 1. *Если $0 < \alpha < \infty$ и ν – мера на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4), то потенциал типа Грина $V_\alpha(z) \equiv V_\alpha(z, \nu)$ обладает следующими свойствами :*

1°. *Для любого $\beta \geq \alpha$ функция $r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(z)$ субгармонична в $\mathbb{D}$, непрерывна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, и*

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(z) = \iint\limits_{\mathbb{D}} r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\beta(z,\zeta)|d\nu(\zeta), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}, \tag{1.9}$$

где интеграл абсолютно и равномерно сходится в любом кольце $\rho_1 < |z| < \rho_2$ $(0 < \rho_1 < \rho_2 < 1)$.

2°. *Для любого $\beta \geq \alpha$ функция $r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(z)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\beta(re^{i\theta})\right)^+ d\theta < +\infty \quad (u^+ = \max\{u, 0\}), \tag{1.10}$$

и имеет место представление

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}V_\alpha(z,\nu) = V_0(z,\nu_\alpha) + h_\alpha(z), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.11}$$

где ν_α – мера на $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условию (1.4) с $\alpha = 0$, а $h_\alpha(z)$ – гармоническая в $\mathbb{D}$ функция.

3°. *Для мер ν и ν_α справедлива следующая формула :*

$$\nu_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\nu(tE)dt, \qquad \overline{E} \subset \mathbb{D}, \tag{1.12}$$

где $tE = \{z \in \mathbf{C} : t^{-1}z \in E\}$.

Теорема 2. *Если $0 < \alpha < \infty$ и $\mu(\zeta)$ – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6), то потенциал типа Грина $I_\alpha(z) \equiv I_\alpha(z, \mu)$ имеет следующие свойства :*

1°. *Если $\alpha \le \beta < \alpha + 1$, то включение $I_\beta(z) \in M_\gamma$ справедливо для всех* $\gamma \in (0, \alpha + 1)$.

2°. *Для любого β $(\alpha \le \beta < \alpha + 1)$ функции $W^{-\beta} I_\beta(z)$ и $W^{-\alpha} I_\beta(z)$ непрерывны и субгармоничны в G^+. При этом, имеют место представления*

$$W^{-\beta} I_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} W^{-\beta} \log |a_\beta(z, \zeta)| \, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+, \tag{1.13}$$

$$W^{-\alpha} I_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} W^{-\alpha} \log |a_\beta(z, \zeta)| \, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+, \tag{1.14}$$

где интегралы абсолютно и равномерно сходится в любой полуплоскости $G_\rho^+ = \{z \in \mathbf{C} : Im\, z > \rho\}$ $(\rho > 0)$.

3°. *Функция $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} I_\alpha(x + iy)| dx < +\infty \tag{1.15}$$

и представима в виде

$$W^{-\alpha} I_\alpha(z, \mu) = I_0(z, \mu_\alpha) + h_\alpha(z), \qquad z \in G^+, \tag{1.16}$$

где μ_α – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6) с $\alpha = 0$, а $h_\alpha(z)$ – гармоническая в G^+ функция.

4°. *Если β $(\alpha < \beta < \alpha + 1)$ – нецелое число, то функция $W^{-\alpha} I_\beta(z)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W^{-\alpha} |I_\beta(x + iy)| dx < +\infty. \tag{1.17}$$

5°. *Для мер μ и μ_α справедлива следующая формула :*

$$\mu_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} \mu(E + i\sigma) d\sigma, \tag{1.18}$$

где $E \subset G^+$ – любое борелевское множество, удаленное от вещественной оси на положительное расстояние, а $E + i\sigma = \{z \in \mathbf{C} : z - i\sigma \in E\}$.

Замечание. Утверждения, аналогичные 1°,2° (для $\beta = \alpha$) и 4° теоремы 2, ранее были установлены А. М. Джрбашяном [13] для его потенциалов типа

Грина. Кроме того, в [13] было указано на возможность установления формул, аналогичных (1.12) и (1.18). Следует отметить, что такие формулы можно доказывать аналогично (1.12) и (1.18).

В работе [10] введены следующие классы функций в верхней полуплоскости G^+ и в единичном круге $\mathbb{D}$: $S^*_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ - как множество функций $u(z)$, субгармонических в G^+ и удовлетворяющих условиям

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < +\infty, \tag{1.19}$$

$$\sup_{y>y_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x+iy)| dx < +\infty \qquad \text{для любого} \quad y_0 > 0, \tag{1.20}$$

$$\limsup_{y\to+\infty} y u(iy) \geq 0, \tag{1.21}$$

и класс $S^*_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ – как множество функций $u(z) \not\equiv -\infty$, субгармонических в $\mathbb{D}$ и удовлетворяющих условию

$$\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{\alpha-1} u^+(z)\, dm_2(z) < +\infty, \tag{1.22}$$

где $u^+ = \max\{u, 0\}$, и m_2 – мера Лебега на плоскости.

Замечание. В [10] классы $S^*_\alpha(G^+)$ субгармонических в G^+ функций были введены иначе. А именно, классы $S^*_\alpha(G^+)$ были определены условиями (1.6) и

$$\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1} |u(z)|\, dm_2(z) < +\infty, \tag{1.23}$$

где μ – мера Рисса, ассоциированная с $u(z)$. Ниже будет доказано, что условия (1.19) – (1.21) и (1.6), (1.23) эквивалентны.

Чтобы сформулировать основные результаты статьи, необходимо предварительно ввести некоторые известные функциональные классы и ряд обозначений. Пусть $H^p = H^p(G^+)$ и $h^p = h^p(G^+)$ $(0 < p \leq \infty)$ – обычные голоморфные и (вещественные) гармонические классы Харди в полуплоскости G^+. Обозначим через $H^p_\alpha = H^p_\alpha(G^+)$ $(0 < p < \infty, 0 < \alpha < \infty)$ пространство голоморфных в G^+ функций с конечной нормой

$$\|f\|_{H^p_\alpha} = \left(\iint\limits_{G^+} (\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}|f(z)|^p \, dm_2(z)\right)^{1/p}, \tag{1.24}$$

и пусть $h^p_\alpha = h^p_\alpha(G^+)$ – аналогичный класс гармонических в G^+ функций. Удобно использовать обозначение $\|\cdot\|$, даже если это не является нормой. На вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ рассмотрим одномерные классы О. В. Бесова. Пусть для любых p, q, α $(1 \le p, q \le \infty, 0 < \alpha < 2)$

$$B^{p,q}_\alpha(f) = \begin{cases} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{-1-\alpha q}\|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\|^q_p dt\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup_{|t|>0} |t|^{-\alpha}\|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\|_p \, , & q = \infty, \end{cases} \tag{1.25}$$

и для любых p, q, α $(1 \le p, q \le \infty, 0 < \alpha < \infty)$ –

$$L^{p,q}_\alpha(u) = \begin{cases} \left(\int_0^{+\infty} y^{(m-\alpha)q-1}\|\partial^m u\|^q_p dy\right)^{1/q}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup_{y>0} y^{m-\alpha}\|\partial^m u\|_p, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.26}$$

где функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R}$, а функция $u = u(x, y)$ – на G^+, $\|\cdot\|_p$ – норма Лебега в $L^p(\mathbb{R})$, m – целое число, превосходящее α, а $\partial^m u$ – частная производная $u(x, y)$относительно x и y суммарного порядка m. Определим следующие классы :

$$\Lambda^{p_0,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{p_0} + B^{p,q}_\alpha(f) < +\infty\}, \quad 1 \le p_0 \le \infty, 0 < \alpha < 2,$$

$$\Lambda^{BMO,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{BMO} + B^{p,q}_\alpha(f) < +\infty\}, \quad 0 < \alpha < 2,$$

где $\|\cdot\|_{BMO}$ – норма в пространстве функций с ограниченным средним колебанием (см., напр., [17]). Если $0 < \alpha < 1$, то вторая разность в (1.25) может быть заменена первой разностью $f(x+t) - f(x)$. Для произвольных $\alpha > 0$ положим

$$\Lambda^{p_0,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{p_0} + L^{p,q}_\alpha(u) < +\infty\}, \quad 1 \le p_0 \le \infty,$$

$$\Lambda^{BMO,p,q}_\alpha = \{f(x) : \|f\|_{BMO} + L^{p,q}_\alpha(u) < +\infty\},$$

где $u = u(x, y)$ – интеграл Пуассона функции $f(x)$ в G^+. Для удобства обозначим $\Lambda^{p_0}_\alpha = \Lambda^{p_0,1,1}_\alpha$ и $\Lambda^{BMO}_\alpha = \Lambda^{BMO,1,1}_\alpha$. Целое число m не фигурирует в приведенных определениях, поскольку имеет место следующая лемма, где, как и в [18], использовано обозначение

$$\|v\|_{pq}=\begin{cases}\left(\int_0^{+\infty}\|v\|_p^q\,dy/y\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \sup_{y>0}\|v\|_p, & q=\infty.\end{cases}$$

Лемма А. *(Тейблсон [18]) Пусть* $0<\beta<\infty$, $1\le p,q\le\infty$ *и* $v=v(x,y)$ *– гармоническая в* G^+ *функция, ограниченная в каждой полуплоскости* $G^+_\rho=\{z\in\in\mathbf{C}: Im\, z>\rho\}$ $(\rho>0)$. *Тогда*

$$\left\|y^{\beta+1}\frac{\partial v}{\partial y}\right\|_{pq}\le C_\beta\|y^\beta v\|_{pq},\qquad \left\|y^{\beta+1}\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{pq}\le C_\beta\|y^\beta v\|_{pq},$$

а нормы $\left\|y^{\beta+1}\partial v/\partial y\right\|_{pq}$ *и* $\left\|y^{\beta+1}\partial v/\partial x\right\|_{pq}$ *эквивалентны. К тому жс, если* $v(x,y)\to 0$ *при* $y\to+\infty$, *то*

$$\|y^\beta v\|_{pq}\le C_\beta\left\|y^{\beta+1}\frac{\partial v}{\partial y}\right\|_{pq}.$$

Таким образом, величина $L^{p,q}_\alpha(u)$ не зависит, с точностью до эквивалентности, от выбора $m>\alpha$ и производной $\partial^m u$. Заметим, что при $p=q=1$ норма $\|y^\beta v\|_{pq}$ сводится к норме $\|v\|_{h^1_\beta}$. Ниже для положительных постоянных, зависящих только от параметров $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ мы будем пользоваться обозначениями c и C. При необходимости выражения зависимости таких постоянных от параметров будем записывать $c(\alpha,\beta,\dots)$ или $C_{\alpha,\beta}$ и т. п. .

Классы О. В. Бесова на единичной окружности $\partial\mathbb{D}=\{z:|z|=1\}$ состоят из функций $f(\theta)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{\lambda^{p,q}_\alpha}=\begin{cases}\|f\|_p+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{-1-\alpha q}\|f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta)\|_p^q\,dt\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \|f\|_p+\sup_{|t|>0}|t|^{-\alpha}\|f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta)\|_p, & q=\infty.\end{cases}$$

Для произвольного $\alpha>0$ положим

$$\|f\|_{\lambda^{p,q}_\alpha}=\begin{cases}\|f\|_p+\left(\int_0^1(1-r)^{(m-\alpha)q-1}\|\partial^m u\|_p^q\,dr\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty,\\ \|f\|_p+\sup_{0<r<1}(1-r)^{m-\alpha}\|\partial^m u\|_p, & q=\infty,\end{cases}$$

где $u=u(re^{i\theta})$ – интеграл Пуассона функции $f(\theta)$ в $\mathbb{D}$, $m>\alpha$ – целое число, а $\partial^m u$ обозначает частную производную функции $u(re^{i\theta})$ суммарного порядка m по переменным r и θ. При этом, норма $\|\cdot\|_{\lambda^{p,q}_\alpha}=\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$ с точностью до эквивалентности независима от выбора $m>\alpha$ и производной $\partial^m u$. Основными результатами статьи являются следующие две теоремы.

Теорема 3. а) *Класс* $S^*_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ *совпадает с множеством функций* $u(z)$, *представимых в* G^+ *в виде*

$$u(z) = \iint\limits_{G^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta) + \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\operatorname{Re}\,\frac{1}{(it-iz)^{\beta+1}}\right]\varphi(t)\,dt, \quad (1.27)$$

где $\beta > \alpha$ *– любое число,* $a_\beta(z,\zeta)$ *– элементарный фактор типа Бляшке (1.5),* $\mu(\zeta)$ *– мера на* G^+, *удовлетворяющая условию (1.6), а* $\varphi(t) \equiv \varphi_\beta(t)$ *– вещественнозначная функция, дифференцируемая* k *раз в* $\mathbb{R}$ *(*k *– целое число, определяемое из неравенств* $k < \beta - \alpha \le k+1$*) и такая, что*

$$\varphi^{(k)}(t) \in \Lambda^p_{\beta-\alpha-k} \qquad \text{при некотором} \quad p, \quad 1 \le p \le \infty. \quad (1.28)$$

б) *Если функция* $u(z)$ *представима в виде (1.27) – (1.28), то мера Рисса, ассоциированная с* $u(z)$, *совпадает с* μ. *Если к тому же* $\beta \in (\alpha, \alpha+1)$, *то почти для всех* $x \in \mathbb{R}$ *справедлива формула обращения*

$$\varphi(x) = \lim_{y\to+0} W^{-\beta}u(x+iy) + \lim_{y\to+0}\Psi_\beta(x+iy), \quad (1.29)$$

где функция $\Psi_\beta(x+iy)$ *гармонична и неотрицательна в* G^+.

Теорема 4. а) *Класс* $S^*_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ *совпадает с множеством функций* $u(z)$, *представимых в виде*

$$\begin{aligned} u(z) =& C\log|z| + \iint\limits_{\mathbb{D}} \log|A_\beta(z,\zeta)|d\nu(\zeta) + \\ &+ \frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\operatorname{Re}\,\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+1}} - 1\right]\varphi(e^{i\theta})\,d\theta, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1.30)\end{aligned}$$

где $C \ge 0$ *и* $\beta > \alpha$ *– любые числа,* $A_\beta(z,\zeta)$ *– элементарный фактор типа Бляшке (1.3),* $\nu(\zeta)$ *– неотрицательная борелевская мера на* $\mathbb{D}$, *удовлетворяющая условию (1.4), и* $\varphi(e^{i\theta})$ *– вещественнозначная функция класса* $\lambda^{1,1}_{\beta-\alpha}$.

б) *Если функция* $u(z)$ *представима в виде (1.30), то почти для всех* $\theta \in$ $\in (-\pi, \pi)$ *справедлива формула обращения*

$$\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to1-0} r^{-\beta}D^{-\beta}u(re^{i\theta}) + \lim_{r\to1-0}\Phi_\beta(re^{i\theta}), \quad (1.31)$$

где $\Phi_\beta(re^{i\theta})$ – функция класса Харди $h^1(\mathbb{D})$.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Рассмотрим функцию

$$v_\alpha(z) = W^{-\alpha}\log|a_\alpha(z,\zeta)| = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\mathrm{Re}\int_0^{2\mathrm{Im}\,\zeta}\frac{\tau^\alpha d\tau}{\tau+i\zeta-iz}, \qquad z\in\mathbf{C}, \quad (2.1)$$

исследованную в [14], подразумевается, что при $z\in(\overline{\zeta},\zeta)$ интеграл (2.1) следует понимать в смысле главного значения Коши.

Лемма 2.1. *Пусть $\zeta\in G^+$ – фиксированная точка. Тогда :*

а) *если $-1<\alpha<\infty$, то функция $v_\alpha(z)$ гармонична в $\mathbf{C}\setminus[\overline{\zeta},\zeta]$ и допускает непрерывное продолжение на интервал $(\overline{\zeta},\zeta)$;*

б) *если $0<\alpha<\infty$, то функция $v_\alpha(z)$ допускает непрерывное продолжение на отрезок $[\overline{\zeta},\zeta]$ и всюду в $\mathbf{C}$ представима в виде*

$$v_\alpha(z) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(\mathrm{Im}\,\zeta)^\alpha\log\frac{1}{|\overline{\zeta}-z|}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\mathrm{Im}\,\zeta}t^{\alpha-1}\log|\zeta-z-it|dt. \quad (2.2)$$

К тому же, $v_\alpha(z)$ субгармонична в $\mathbf{C}\setminus\{\overline{\zeta}\}$.

Доказательство. Если в (2.1) $\zeta=\xi+i\eta$ и $z=\zeta-iw$ ($w\in\mathbf{C}\setminus[0,2\eta]$), то очевидно $v_\alpha(\zeta-iw)=2\pi(\Gamma(\alpha+1))^{-1}\mathrm{Im}\,\Phi_\alpha(w)$, где

$$\Phi_\alpha(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\eta}\frac{t^\alpha dt}{t-w}, \qquad -1<\alpha<\infty.$$

Поэтому а) и первое утверждение б) непосредственно следуют из известных свойств интеграла типа Коши. Представление (2.2) следует из (2.1) интегрированием по частям.

Теперь мы готовы к доказательству утверждений 1° и 2° теоремы 2. Пусть $\rho>0$ и $z=x+iy\in\overline{G_\rho^+}=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Im}\,z\geq\rho\}$ – любые фиксированные числа. Условившись, что $\alpha\leq\beta\leq\gamma<\alpha+1$ положим

$$I=\iint\limits_{G+}d\mu(\zeta)\int_0^{+\infty}\sigma^{\gamma-1}\big|\log|a_\beta(z+i\sigma,\zeta)|\big|d\sigma\equiv I^{(1)}+I^{(2)}+I^{(3)}, \quad (2.3)$$

где

$$I^{(1)} = \iint\limits_{G^+\setminus G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{+\infty} \sigma^{\gamma-1} \big| \log |a_\beta(z+i\sigma,\zeta)| \big| d\sigma,$$

$$I^{(2)} = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_\eta^{+\infty} \sigma^{\gamma-1} \big| \log |a_\beta(z+i\sigma,\zeta)| \big| d\sigma,$$

$$I^{(3)} = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{\eta} \sigma^{\gamma-1} \big| \log |a_\beta(z+i\sigma,\zeta)| \big| d\sigma \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

и оценим интегралы $I^{(i)}$ по отдельности. Используя (1.5) и хорошо известную формулу

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}dx}{(x+w)^\delta} = \frac{\Gamma(\delta-\lambda)}{\Gamma(\delta)} \frac{1}{w^{\delta-\lambda}}, \qquad \delta > \lambda > 0, |\arg w| < \pi, \tag{2.4}$$

получим

$$I^{(1)} \le \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}{\Gamma(\beta+1)} \iint\limits_{G^+\setminus G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \frac{\tau^\beta d\tau}{(\tau+y-\eta)^{\beta+1-\gamma}} =$$

$$= c(\beta,\gamma) \iint\limits_{G^+\setminus G_y^+} \eta^{\beta+1} d\mu(\zeta) \int_0^2 \frac{t^\beta dt}{(\eta t + y - \eta)^{\beta+1-\gamma}} \le c(\alpha,\beta,\gamma,\rho) \iint\limits_{G^+\setminus G_y^+} \eta^{\alpha+1} d\mu(\zeta). \tag{2.5}$$

Далее, ввиду представления (1.5)

$$I^{(2)} \le \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \tau^\beta d\tau \int_\eta^{+\infty} \frac{\sigma^{\gamma-1} d\sigma}{(\sigma+\tau+y-\eta)^{\beta+1}}.$$

Если $0 < \gamma \le 1$, то прямая оценка показывает, что

$$I^{(2)} \le c(\beta) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta).$$

Если $\gamma > 1$, то ввиду очевидного неравенства $(a+b)^\lambda \le \max\{1, 2^{\lambda-1}\}(a^\lambda + b^\lambda)$ $(a, b, \lambda > 0)$ и формулы (2.4)

$$I^{(2)} \le \max\{1, 2^{\gamma-2}\} \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \tau^\beta d\tau \int_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\gamma-1} + \eta^{\gamma-1}}{(\sigma+\tau+y)^{\beta+1}} d\sigma \le$$

$$\le c(\beta,\gamma) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta).$$

Таким образом, для любого $\gamma > 0$

$$I^{(2)} \le c(\beta,\gamma) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma d\mu(\zeta) \le c(\beta,\gamma,\rho) \iint\limits_{G_y^+} \eta^{\alpha+1} d\mu(\zeta). \tag{2.6}$$

Для оценки $I^{(3)}$ при $0<\beta<\infty$ и $p-1<\beta\le p$ используем представление

$$\log|a_\beta(z,\zeta)| = -\operatorname{Re}\int_\eta^{2\eta}\frac{\tau^\beta d\tau}{(\tau+i\zeta-iz)^{\beta+1}} + \\ +\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\beta-k}\left(\frac{\eta}{i\xi-iz}\right)^{\beta-k} - \operatorname{Re}\int_0^\eta\frac{\tau^{\beta-p}d\tau}{(\tau+i\zeta-iz)^{\beta-p+1}}$$
$$(0<\beta<\infty,\ p-1<\beta\le p),$$

получающееся интегрированием (1.5) по частям. Тогда очевидно

$$I^{(3)} \le \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta)\int_0^\eta \sigma^{\gamma-1}\left[\int_\eta^{2\eta}\frac{\tau^\beta d\tau}{|\tau+i\zeta-iz+\sigma|^{\beta+1}} + \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{\beta-k}\left(\frac{\eta}{|\xi-z-i\sigma|}\right)^{\beta-k} + \right.$$
$$\left. + \left|\operatorname{Re}\int_0^\eta\frac{\tau^{\beta-p}d\tau}{(\tau+i\zeta-iz+\sigma)^{\beta-p+1}}\right|\right] d\sigma \equiv J_1+J_2+J_3, \tag{2.7}$$

где $J_{1,2,3}$ – интегралы от слагаемых в квадратных скобках. Используя (2.4), легко проверить, что

$$J_1 \le c(\alpha,\beta,\gamma,\rho)\iint\limits_{G_y^+}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta). \tag{2.8}$$

Заметив, что при любом $\delta\in(0,\beta]$ имеем $\eta^\delta\int_0^\eta\frac{\sigma^{\gamma-1}d\sigma}{(\sigma+y)^\delta}\le c(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\rho)\eta^{\alpha+1}$, получим

$$J_2 \le c(\alpha,\beta,\gamma,\rho)\iint\limits_{G_y^+}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta). \tag{2.9}$$

Для оценки J_3 рассмотрим два случая. Спачала, если β – не целое, т. е. $p-1<\beta<p$, то

$$J_3 \le \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta)\int_0^\eta\int_0^\eta\frac{\sigma^{\gamma-1}\tau^{\beta-p}d\sigma d\tau}{|\sigma+\tau+y-\eta|^{\beta-p+1}} =$$
$$= \iint\limits_{G_y^+}\eta^\gamma\,d\mu(\zeta)\int_0^1\int_0^1\frac{\sigma^{\gamma-1}\tau^{\beta-p}d\sigma d\tau}{|\sigma+\tau-1+y/\eta|^{\beta-p+1}}.$$

Поскольку для любого $\lambda\in(0,1)$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\sigma^{\gamma-1}\tau^{\beta-p}}{|\sigma+\tau-\lambda|^{\beta-p+1}}d\sigma d\tau \le c(\beta,\gamma),$$

то получим

$$J_3 \le c(\beta,\gamma,\rho)\iint\limits_{G_y^+}\eta^{\alpha+1}d\mu(\zeta). \tag{2.10}$$

Пусть теперь β – целое, т. е. $\beta = p$. Тогда

$$J_3 = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^\eta \sigma^{\gamma-1} \left| \mathrm{Re} \int_0^\eta \frac{d\tau}{\tau + i\zeta - iz + \sigma} \right| d\sigma,$$

где интеграл под знаком модуля понимается в смысле главного значения Коши.

Отсюда следует, что

$$J_3 = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^\eta \sigma^{\gamma-1} \left| \mathrm{v.p.} \int_0^\eta \frac{\tau + \sigma + y - \eta}{(\tau + \sigma + y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} d\tau \right| d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_0^\eta \sigma^{\gamma-1} \left| \frac{1}{2} \log \frac{(\sigma + y)^2 + (x - \xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} \right| d\sigma \equiv T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$T_1 = \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_{\eta - y}^\eta \sigma^{\gamma-1} \log \left(\frac{(\sigma + y)^2 + (x - \xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} \right)^{1/2} d\sigma,$$

$$T_2 = \int\limits_{y < \mathrm{Im}\, \zeta \le 2y} \int d\mu(\zeta) \int_0^{\eta - y} \sigma^{\gamma-1} \log \left(\frac{(\sigma + y)^2 + (x - \xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} \right)^{1/2} d\sigma,$$

$$T_3 = \iint\limits_{G_{2y}^+} d\mu(\zeta) \int_0^{\eta - y} \sigma^{\gamma-1} \left| \frac{1}{2} \log \frac{(\sigma + y)^2 + (x - \xi)^2}{(\sigma + y - \eta)^2 + (x - \xi)^2} \right| d\sigma,$$

Ввиду того, что $1 \le \beta \le \gamma < \alpha + 1$, и очевидных неравенств $1/2(a+b)^2 \le a^2 + b^2 \le \le (a + b)^2$ $(a, b > 0)$ имеем

$$T_1 \le \iint\limits_{G_y^+} d\mu(\zeta) \int_{\eta - y}^\eta \sigma^{\gamma-1} \log \left(\sqrt{2} \frac{\sigma + y}{\sigma + y - \eta} \right) d\sigma \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2} \log 2 + 2 \right) \iint\limits_{G_y^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta) \le c(\alpha, \gamma, \rho) \iint\limits_{G_y^+} \eta^{\alpha+1} d\mu(\zeta). \tag{2.11}$$

Легко показать, что T_2 допускает такую же оценку. К тому же

$$T_3 \le \iint\limits_{G_{2y}^+} \eta^{\gamma-1} \, d\mu(\zeta) \left[\int_0^{\eta/2 - y} \log \left(\sqrt{2} \frac{\eta - y - \sigma}{\sigma + y} \right) d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_{\eta/2 - y}^{\eta - y} \log \left(\sqrt{2} \frac{\sigma + y}{\eta - y - \sigma} \right) d\sigma \right] \le c \iint\limits_{G_{2y}^+} \eta^\gamma \, d\mu(\zeta) \le c(\alpha, \gamma, \rho) \iint\limits_{G_{2y}^+} \eta^{\alpha+1} \, d\mu(\zeta). \tag{2.12}$$

Поэтому из (1.6) и (2.3) – (2.12) заключаем, что

$$I \le c(\alpha, \beta, \gamma, \rho) \iint\limits_{G+} \eta^{\alpha+1} \, d\mu(\zeta) < +\infty.$$

Это, очевидно, доказывает включение $I_\beta(z) \in M_\gamma$ $(\beta \le \gamma < \alpha + 1)$ и равенство (1.13), где интеграл абсолютно и равномерно сходится в $\overline{G_\rho^+}$. Более того, поскольку $M_{\gamma_1} \subset M_{\gamma_2}$ $(\gamma_1 > \gamma_2)$, то доказанное включение справедливо для любого

$\gamma \in (0, \alpha+1)$. По лемме 1.1 из [13] и лемме 3.2 из [10], $W^{-\beta} I_\beta(z)$ есть функция, непрерывная и субгармоническая в G^+. Таким образом, утверждение 1° и формула (1.13) доказаны. Формула (1.14) доказывается аналогично. Теперь заметим, что согласно (1.13) и (2.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} I_\alpha(x+iy)| dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \iint\limits_{G+} d\mu(\zeta) \int_0^{2\eta} \tau^\alpha d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau+y-\eta| dx}{(\tau+y-\eta)^2+(x-\xi)^2} =$$
$$= \frac{2^{\alpha+1}\pi}{\Gamma(\alpha+2)} \iint\limits_{G+} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) < +\infty.$$

Применение теоремы XX из [19] и теоремы 8 из [20] ведет к представлению (1.16), и, тем самым, доказано также утверждение 3°. Утверждение 4° доказывается тем же способом.

Следующие две леммы необходимы для доказательства утверждения 5°.

Лемма 2.2. *Пусть* α $(-1 < \alpha < \infty)$ *– любое число,* μ *– мера на* G^+, *удовлетворяющая условию (1.6), и* $n(\rho) = \mu(G^+_\rho) = \iint\limits_{G^+_\rho} d\mu$, $0 < \rho < \infty$. *Тогда*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \rho^{\alpha+1} n(\rho) = 0, \qquad \lim_{\rho\to+0} \rho^{\alpha+1} n(\rho) = 0.$$

Доказательство. Поскольку в обобщенном смысле

$$dn(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\mu(x+it),$$

то

$$\iint\limits_{G+} (\mathrm{Im}\,\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta) = -\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} dn(t) < +\infty.$$

Устремляя $\rho \to +\infty$ в неравенстве

$$-\int_\rho^{+\infty} t^{\alpha+1} dn(t) \geq \rho^{\alpha+1} n(\rho),$$

получим $\lim_{\rho\to+\infty} \rho^{\alpha+1} n(\rho) = 0$. Далее, пределы

$$\lim_{\rho\to+0} \rho^{\alpha+1} n(\rho) \quad \text{и} \quad \lim_{\rho\to+0} \int_\rho^{+\infty} t^\alpha n(t) dt$$

существуют и конечны ввиду равенства

$$-\int_\rho^{+\infty} t^{\alpha+1} dn(t) = \rho^{\alpha+1} n(\rho) + (\alpha+1) \int_\rho^{+\infty} t^\alpha n(t) dt,$$

которое легко получить интегрированием по частям. Теперь остается заметить, что по критерию сходимости Коши

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\alpha+1} n(\rho) \le \int_{\rho/2}^{\rho} t^{\alpha} n(t)dt = o(1) \quad \text{при} \quad \rho \to +0.$$

Тем самым, лемма доказана.

Пусть $\zeta \in \mathbf{C}$ – произвольная фиксированная точка, и пусть

$$\delta_\zeta(E) = \begin{cases} 1, & \text{при } E \ni \zeta \\ 0, & \text{при } E \not\ni \zeta, \quad E \subset \mathbf{C} \end{cases}$$

есть δ-мера Дирака с единичной массой в ζ. Вообще говоря, мера Рисса ν, ассоциированная с функцией $u(z)$, субгармонической в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{C}$, определяется формулой $\nu = (2\pi)^{-1}\Delta u$, где Δ – оператор Лапласа. Эту формулу следует понимать в смысле обобщенных функций, т. е. в смысле того, что для любой функции $\varphi(z) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$\iint_\Omega \varphi(z)d\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega u(z)\Delta\varphi(z)\, dm_2(z),$$

где m_2 – мера Лебега на Ω, а $C_0^\infty(\Omega)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω. Ниже мы будем отождествлять борелевскую меру ν с линейным функционалом

$$(\nu, \varphi) = \iint_\Omega \varphi(z)d\nu(z), \qquad \varphi(z) \in C_0^\infty(\Omega).$$

Лемма 2.3. *При любых фиксированных α $(0 < \alpha < \infty)$ и $\zeta \in G^+$ мера Рисса $\mathcal{E}_\alpha$, ассоциированная с функцией $v_\alpha(z) = W^{-\alpha}\log|a_\alpha(z,\zeta)|$, представима в виде*

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}\delta_\zeta(E+it)dt, \quad \overline{E} \subset \mathbf{C} \setminus \{\overline{\zeta}\}. \qquad (2.13)$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi(z) \in C_0^\infty(\mathbf{C} \setminus \{\overline{\zeta}\})$ имеем

$$(\mathcal{E}_\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbf{C}} v_\alpha(z)\Delta\varphi(z)\, dm_2(z).$$

Следовательно, согласно (2.2)

$$(\mathcal{E}_\alpha, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}\left[\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbf{C}} \log|z-\zeta+it|\Delta\varphi(z)\, dm_2(z)\right]dt.$$

Поскольку интеграл в квадратных скобках – мера Рисса, ассоциированная с функцией $\log|z-(\zeta-it)|$ и равная δ–мере Дирака, сосредоточенной в точке $\zeta - it$, то

$$(\mathcal{E}_\alpha, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}(\delta_{\zeta-it}, \varphi)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{2\eta} t^{\alpha-1}\varphi(\zeta-it)dt.$$

Так как $\varphi(z) \in C_0^\infty(\mathbb{C} \setminus \{\overline{\zeta}\})$ – произвольная функция, то

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{2\eta} t^{\alpha-1} \delta_{\zeta - it}(E) dt, \qquad \overline{E} \subset \mathbb{C} \setminus \{\overline{\zeta}\}.$$

Тем самым, воспользовавшись тем, что $\delta_{\zeta-it}(E) = \delta_\zeta(E+it)$, приходим к (2.13).

Замечание. Мера $\mathcal{E}_\alpha$ сосредоточена на $(\overline{\zeta}, \zeta]$ и

$$\mathcal{E}_\alpha\left((\overline{\zeta}, \zeta]\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{2\eta} t^{\alpha-1} dt = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \eta^\alpha.$$

Если $E \subset \overline{G^+}$, то $\delta_\zeta(E+it) = 0$ $(\eta < t < 2\eta)$. Поэтому, при $E \subset \overline{G^+}$ формулу (2.13) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\eta} t^{\alpha-1} \delta_\zeta(E+it) dt. \tag{2.14}$$

Переходя к доказательству утверждения 5° заметим, что μ – мера Рисса функции $I_\alpha(z)$, а μ_α – мера Рисса функции $W^{-\alpha} I_\alpha(z)$. Ясно, что

$$(\mu_\alpha, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G^+} W^{-\alpha} I_\alpha(z) \Delta\varphi(z)\, dm_2(z) \quad \text{при любой} \quad \varphi \in C_0^\infty(G^+).$$

Следовательно, согласно (1.13) и (2.14)

$$(\mu_\alpha, \varphi) = \iint\limits_{G^+} (\mathcal{E}_\alpha, \varphi) d\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \iint\limits_{G^+} \left[\int_0^\eta t^{\alpha-1} \varphi(\zeta - it) dt\right] d\mu(\zeta).$$

Поменяв порядок интегрирования, отсюда находим

$$(\mu_\alpha, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \left[\iint\limits_{G^+} \varphi(\zeta) d\mu(\zeta + it)\right] dt.$$

Так как $\varphi \in C_0^\infty(G^+)$, то последнее равенство можно записать в виде (1.18), где E $(\overline{E} \subset G^+)$ – любое борелевское множество. Более того, формула (1.18) имеет место и в случае, когда $E \subset G^+$ – любое неограниченное борелевское множество, удаленное от вещественной оси на положительное расстояние. Действительно, при любом $\rho > 0$

$$n_\alpha(\rho) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} n(\rho + \sigma) d\sigma, \tag{2.15}$$

где n_α и n определены посредством мер μ_α и μ. Интегрированием по частям и использованием леммы 2.2 приходим к заключению, что интеграл (2.15) сходится. Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Как было отмечено выше, доказательство теоремы 1 мы пропускаем, поскольку оно аналогично и во многом проще доказательства теоремы 2. Тем не менее, приведем без доказательства следующие две леммы, относящиеся к факторам типа Бляшке М. М. Джрбашяна [2], [3], которые, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

Лемма 2.1′. *Пусть $\zeta \in \mathbb{D}$, $\zeta \neq 0$ – фиксированная точка.*

а) *Если $-1 < \alpha < \infty$, то функция*

$$u_\alpha(z) \equiv r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log|A_\alpha(z,\zeta)| = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} Re \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\alpha}{1-z\zeta^{-1}t}\frac{dt}{t}, \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

(где интеграл понимается в смысле главного значения Коши на (ζ, ζ^*), $\zeta^* = 1/\overline{\zeta}$) гармонична в $\mathbb{C}\setminus[\zeta,\zeta^*]$ и допускает непрерывное продолжение на интервал (ζ,ζ^*).

б) *Если $0 < \alpha < \infty$, то функция $u_\alpha(z)$ допускает непрерывное продолжение на сегмент $[\zeta,\zeta^*]$ и представима в виде*

$$u_\alpha(z) = \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \log\left|\frac{\zeta}{1-\overline{\zeta}z}\right| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{|\zeta|^2}^{1}(1-t)^{\alpha-1}\log\left|z-\frac{\zeta}{t}\right|dt, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

При этом, функция $u_\alpha(z)$ субгармонична в $\mathbb{C}\setminus\{\zeta^*\}$.

Лемма 2.3′. *При любых фиксированных α $(0 < \alpha < \infty)$ и $\zeta \in \mathbb{D}$, $\zeta \neq 0$ рисовская мера $\mathcal{E}_\alpha$, ассоциированная с функцией $u_\alpha(re^{i\theta}) = r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\alpha(re^{i\theta},\zeta)|$, представима в виде*

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{|\zeta|^2}^{1}(1-t)^{\alpha-1}\delta_\zeta(tE)dt,$$

где E – любое борелевское множество такое, что $\overline{E} \subset \mathbb{C}\setminus\{\zeta^*\}$. В частности, если $E \subset \overline{\mathbb{D}}$, то

$$\mathcal{E}_\alpha(E) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{|\zeta|}^{1}(1-t)^{\alpha-1}\delta_\zeta(tE)dt.$$

§3. СООТНОШЕНИЯ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ТИПА ГРИНА

В [10] получена формула в полуплоскости, аналогичная формуле Иенсена. Именно, при предположении, что функция $u(z)$ субгармонична в G^+ и такова, что для любого $\rho > 0$

$$\sup_{y>\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x+iy)|\,dx \leq C_\rho < +\infty, \tag{3.1}$$

установлено, что при любом $\rho > 0$ имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x+i\rho)\,dx = -\int_{\rho}^{+\infty}(t-\rho)\,dn(t) + \frac{1}{2}\limsup_{R\to+\infty} Ru(iR), \qquad (3.2)$$

где последний предел конечен, а $n(t)$ – значение меры Рисса μ, ассоциированной с $u(z)$, в полуплоскости $G_t^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > t\}$, т. е.

$$n(t) = \mu(G_t^+) = \iint\limits_{G_t^+} d\mu.$$

При этом, формула (3.2) остается справедливой, если в ней верхний предел заменить на $\lim_{n\to\infty} R_n u(iR_n)$ по любой последовательности $R_n \to +\infty$, $n \to \infty$, такой, что $u(R_n) > -\infty$, $\quad n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 3.1. *Пусть $0 < \alpha < \infty$ и $u(z) \in S_\alpha^*(G^+)$. Тогда выполнены условия (1.6) и (1.23), где μ – мера Рисса, ассоциированная с $u(z)$. Кроме того, справедлива формула*

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\pi}\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im} z)^{\alpha-1}u(z)\,dm_2(z) = \iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta). \qquad (3.3)$$

Доказательство. Для любой функции $u(z) \in S_\alpha^*(G^+)$ выполнено условие (3.1). Умножив члены (3.2) на $y^{\alpha-1}$ и проинтегрировав по $(0, +\infty)$, получим $\limsup_{R\to+\infty} Ru(iR) = 0$. Отсюда следуют все утверждения леммы.

Вторая лемма этого параграфа содержит оценку для модуля потенциала типа Грина (1.2). Эта оценка получена с применением метода Хеймана [21].

Лемма 3.2. *Пусть $0 \le \alpha < \infty$ и μ – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6). Тогда для каждого $\beta \ge \alpha$ неравенство*

$$|I_\beta(x+iy)| \le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^{\alpha+1}}\iint\limits_{G^+}(\operatorname{Im}\zeta)^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad (3.4)$$

справедливо для всех $y \ge 1$, за исключением некоторого открытого множества $E \subset [1, +\infty)$ конечной логарифмической длины, т. е. такого, что $\int_E r^{-1}dr < +\infty$.

Доказательство. Используем представление

$$\log|a_\beta(z,\zeta)| = \log|a_0(z,\zeta)| + \operatorname{Re}\, F_\beta(z,\zeta), \qquad z, \zeta \in G^+ \qquad (3.5)$$

(см. доказательство леммы 3.2 из [10]), где $|F_\beta(z,\zeta)| \le K_\beta$ и K_β – постоянная, не зависящая от $z,\zeta \in G^+$. При фиксированном $z = x + iy \in G^+$ положим

$$|I_\beta(x+iy)| \le \iint\limits_{G^+} \big|\log|a_\beta(z,\zeta)|\big|\,d\mu(\zeta) \le \int\limits_{0<\operatorname{Im}\zeta\le y/2}\int \big|\log|a_\beta(z,\zeta)|\big|\,d\mu(\zeta)+$$
$$+\iint\limits_{G^+_{y/2}} |\mathrm{Re}\ F_\beta(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta)+\iint\limits_{G^+_{y/2}} \big|\log|a_0(z,\zeta)|\big|\,d\mu(\zeta) \equiv J_1+J_2+J_3$$

и оценим последние интегралы по отдельности. Непосредственная оценка J_1 и J_2 сразу приводит к требуемому неравенству для всех $y>0$. Действительно, если $\zeta = \xi + \eta$, то

$$J_1 \le \int\limits_{0<\operatorname{Im}\zeta\le y/2}\int d\mu(\zeta)\int_0^{2\zeta}\frac{\tau^\beta\,d\tau}{(y+\tau-\eta)^{\beta+1}} \le \frac{c_\beta}{y^{\beta+1}}\int\limits_{0<\operatorname{Im}\zeta\le y/2}\int \eta^{\beta+1}\,d\mu(\zeta) \le$$
$$\le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^{\alpha+1}}\int\limits_{0<\operatorname{Im}\zeta\le y/2}\int \eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta),$$
$$J_2 \le K_\beta\iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^{\alpha+1}}\iint\limits_{G^+_{y/2}}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta).$$

Для оценки J_3 положим

$$J_3 = \int\limits_{G^+_{y/2}\cap\{|\zeta-z|\ge y/2\}}\int \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right|d\mu(\zeta)+\int\limits_{|\zeta-z|<y/2}\int \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right|d\mu(\zeta) \equiv T_1+T_2.$$

При $\zeta \in G^+_{y/2}\cap\{|\zeta-z|\ge y/2\}$ очевидно

$$0 \le \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right| = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{4y\eta}{|\zeta-z|^2}\right) \le 8\frac{\eta}{y}.$$

Следовательно

$$T_1 \le \frac{8}{y}\int\limits_{G^+_{y/2}\cap\{|\zeta-z|\ge y/2\}}\int \eta\,d\mu(\zeta) \le \frac{c_\alpha}{y^{\alpha+1}}\iint\limits_{G^+_{y/2}}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta).$$

Переходя к оценке T_2, предположим, что $\varepsilon>0$ – фиксированное число. Будем говорить, что число $y\ge 1$ ε*–нормально*, если

$$\int\limits_{y-h<\operatorname{Im}\zeta<y+h}\int \eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) < \frac{h\varepsilon}{y} \qquad \text{для всех} \quad h\in(0,y/2]. \tag{3.6}$$

Далее, через R_ε обозначим множество всех ε–нормальных чисел и докажем, что при любом $\varepsilon>0$ множество $[1,+\infty)\setminus R_\varepsilon$ имеет конечную логарифмическую длину. Ввиду (3.6), для каждого $y \in [1,+\infty) \setminus R_\varepsilon$ существует число $h_y \in (0, y/2]$ такое, что

$$\int\limits_{y-h_y<\mathrm{Im}\,\zeta<y+h_y}\int \eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) \geq \frac{h_y\varepsilon}{y}.$$

Тем самым, множество $[1,+\infty)\setminus R_\varepsilon$ покрыто набором $\{L_y\}_y$ открытых интервалов $L_y = (y-h_y, y+h_y)$, $y \in [1,\infty)\setminus R_\varepsilon$. Очевидно, что существует не более чем счетное множество $\{L_{y_k}\}_k \subset \{L_y\}$, покрывающее $[1,\infty)\setminus R_\varepsilon$. Можем также добиться того, чтобы ни одна точка луча $[1,\infty)$ не была покрыта более чем двумя интервалами L_{y_k}. Тем самым

$$\sum_k \int\limits_{y_k-h_{y_k}<\mathrm{Im}\,\zeta<y_k+h_{y_k}}\int \eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) \leq 2\iint\limits_{G+}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta).$$

Полагая $E = \cup_k L_{y_k}$ и пользуясь двумя последними неравенствами, получим

$$\int_E \frac{dt}{t} \leq \sum_k \int_{L_{y_k}} \frac{dt}{t} = \sum_k \log\left(1+\frac{2h_{y_k}}{y_k-h_{y_k}}\right) \leq 4\sum_k \frac{h_{y_k}}{y_k} \leq$$
$$\leq \frac{4}{\varepsilon}\sum_k \int\limits_{y_k-h_{y_k}<\mathrm{Im}\,\zeta<y_k+h_{y_k}}\int \eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) \leq \frac{8}{\varepsilon}\iint\limits_{G+}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta).$$

Далее, докажем неравенство (3.4) для всех чисел $y \geq 1$, ε–нормальных в смысле (3.6), т. е. для множества R_ε, где ε будет выбрано ниже. Рассмотрим следующие кольцевые множества : $D_k = \left\{\zeta : \frac{y}{2^{k+1}} \leq |\zeta - z| < \frac{y}{2^k}\right\}$, $\quad k = 1,2,\dots$. Ясно, что $\{\zeta : |\zeta - z| < y/2\} = \{z\} \cup (\cup_{k=1}^{\infty} D_k)$. Кроме того, ввиду (3.6) для всех $h \in (0, y/2]$

$$\iint\limits_{\{z\}}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) \leq \int\limits_{y-h<\mathrm{Im}\,\zeta<y+h}\int \eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) < \frac{h\varepsilon}{y}.$$

Устремляя здесь $h \to +0$, получим $\iint\limits_{\{z\}}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) = 0$. Следовательно

$$T_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\iint\limits_{D_k}\log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right|\,d\mu(\zeta). \tag{3.7}$$

С другой стороны, при $\zeta \in D_k$

$$\log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right| = \log\left|1+\frac{z-\overline{z}}{\zeta-z}\right| \leq \log\left(1+\frac{2y}{|\zeta-z|}\right) \leq \log(5\cdot 2^k).$$

Так как число y ε-нормально, то взяв $h = y/2^k$, получим

$$T_2 \leq \left(\frac{2}{y}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=1}^{\infty}\log(5\cdot 2^k)\iint\limits_{D_k}\eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) \leq \left(\frac{2}{y}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=1}^{\infty}\log(5\cdot 2^k)\times$$
$$\times\int\limits_{y-2^{-k}y<\mathrm{Im}\,\zeta<y+2^{-k}y}\int \eta^{\alpha+1}\,d\mu(\zeta) \leq \varepsilon\left(\frac{2}{y}\right)^{\alpha+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log(5\cdot 2^k)}{2^k} \leq \frac{2^{\alpha+3}}{y^{\alpha+1}}\varepsilon.$$

Беря $\varepsilon = \iint\limits_{G^+} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta)$, приходим к требуемому результату.

Лемма 3.3. *Пусть $0 < \alpha < \infty$ и μ – мера на G^+, удовлетворяющая условию (1.6). Тогда для любого $\beta \geq \alpha$ справедливы следующие соотношения :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_\beta(x+iy)|dx \leq \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha} \iint\limits_{G^+} (\mathrm{Im}\,\zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta), \qquad y > 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I_\beta(x+iy)dx = -\int_y^{+\infty}(t-y)dn(t), \qquad y > 0, \tag{3.9}$$

$$I_\beta(z) \leq C_\beta \iint\limits_{G^+} \frac{(\mathrm{Im}\,\zeta)^{\beta+1}}{|\overline{\zeta}-z|^{\beta+1}}\, d\mu(\zeta), \qquad z \in G^+. \tag{3.10}$$

Доказательство. Обозначив $z = x+iy, \zeta = \xi + i\eta$, при фиксированном $y > 0$ положим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_\beta(x+iy)|dx \leq \iint\limits_{G^+} d\mu(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \big|\log|a_\beta(z,\zeta)|\big|dx \equiv J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \int\int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2} d\mu(\zeta)\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\log|a_\beta(x+iy,\zeta)|\big|dx,$$

$$J_2 = \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta)\int_{|x|>\eta}\big|\log|a_\beta(x+iy,\zeta)|\big|dx,$$

$$J_3 = \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta)\int_{-\eta}^{\eta}\big|\log|a_\beta(x+iy,\zeta)|\big|dx.$$

Оценим эти интегралы по отдельности. Используя представление (1.5), получим

$$J_1 \leq c(\beta)\int\int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2} d\mu(\zeta)\int_0^{2\eta}\frac{\tau^\beta d\tau}{(y+\tau-\eta)^\beta} \leq$$

$$\leq \frac{c(\beta)}{y^\beta}\int\int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2}\eta^{\beta+1}\, d\mu(\zeta) \leq \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha}\int\int\limits_{0<\mathrm{Im}\,\zeta\leq y/2}\eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta),$$

$$J_2 \leq \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta)\int_{|x|>\eta}dx\int_0^{2\eta}\frac{\tau^\beta d\tau}{((y+\tau-\eta)^2+x^2)^{(\beta+1)/2}} \leq$$

$$\leq \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta)\int_{|x|>\eta}\frac{dx}{|x|^{\beta+1}}\int_0^{2\eta}\tau^\beta d\tau \leq \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha}\iint\limits_{G^+_{y/2}}\eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta).$$

Для оценки интеграла J_3 используем представление (3.5). Тогда получим

$$J_3 \le \iint\limits_{G^+_{y/2}} d\mu(\zeta) \int_{-\infty}^{+\infty} \big|\log|a_0(z,\zeta)|\big| dx + 2K_\beta \iint\limits_{G^+_{y/2}} \eta \, d\mu(\zeta).$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right| dx = \min\{y,\eta\}, \qquad z,\zeta \in G^+, z = x+iy, \zeta = \xi + i\eta,$$

то

$$J_3 \le \frac{c(\alpha,\beta)}{y^\alpha} \iint\limits_{G^+_{y/2}} \eta^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta),$$

и неравенство (3.8) доказано. Далее заметим, что для потенциала $I_\beta(z) \equiv I_\beta(z,\mu)$ выполнена формула Иенсена (3.2). Кроме того, по лемме 3.2 $\overline{\lim}_{R\to+\infty} R|I_\beta(iR)| = 0$. Тем самым, (3.9) установлено. Наконец, (3.10) непосредственно следует из неравенства

$$\log|a_\beta(z,\zeta)| \le C_\beta \left(\frac{\eta}{|\overline{\zeta}-z|}\right)^{\beta+1}, \qquad z,\zeta\in G^+, \quad -1<\beta<\infty,$$

доказанного в лемме 3.1 из [8].

Лемма 3.4. *В условиях леммы 3.3 справедливы следующие соотношения :*

а) $$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\pi}\int_0^{+\infty} y^{\alpha-1}dy \int_{-\infty}^{+\infty} I_\alpha(x+iy)dx = \iint\limits_{G+} (Im\ \zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta). \tag{3.11}$$

б) *Если $\beta > \alpha$, то $I_\beta(z) \in S^*_\alpha(G^+)$, и следовательно*

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\pi}\iint\limits_{G+} y^{\alpha-1} I_\beta(x+iy)dxdy = \iint\limits_{G+} (Im\ \zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta). \tag{3.12}$$

в) *Для любого $\alpha > 0$ существует мера ν на G^+, удовлетворяющая условию (1.6) и такая, что $I_\alpha(z,\nu) \notin S^*_\alpha(G^+)$.*

Доказательство. Если $\beta > \alpha$, то используя (3.10) легко показать, что

$$\iint\limits_{G+} y^{\alpha-1} I^+_\beta(x+iy)dxdy \le c(\alpha,\beta)\iint\limits_{G+} (\mathrm{Im}\ \zeta)^{\alpha+1}\, d\mu(\zeta),$$

и утверждения а) и б) следуют из лемм 3.1 – 3.3. Контрпример с дискретной мерой, который доказывает утверждение в), построен в работе [8].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Первая лемма, доказанная ниже, является обобщением результата М. Тейблсона ([18], теорема 4).

Лемма 4.1. *Пусть* $0 < \alpha < 2$, $1 \le p, q \le \infty$ *и* $f(x) \in L^1\left(dx/(1+x^2)\right)$, т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx/(1+x^2) < +\infty$. *Далее, пусть* $u = u(x,y)$ – *интеграл Пуассона функции* $f(x)$ *в* G^+. *Тогда величины* $B_\alpha^{p,q}(f)$ *и* $L_\alpha^{p,q}(u)$ *эквивалентны, т. е. существуют постоянные* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *такие, что* $c_1 B_\alpha^{p,q}(f) \le L_\alpha^{p,q}(u) \le c_2 B_\alpha^{p,q}(f)$.

Для частного случая $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$ доказательство леммы 4.1 можно найти в [18] (теорема 4) или в монографии И. М. Стейна [22] (гл. V, §5, предложение 8′). Мы не приводим доказательства леммы 4.1, так как метод доказательства по существу тот же, что в указанной монографии Стейна.

Следствие. Пусть $0 < \alpha < 2$, $1 \le p_0 \le \infty$ и $f(z) \in H^{p_0}(G^+)$. Тогда нижеследующие утверждения эквивалентны :

$$\text{а) } f''(z) \in H^1_{2-\alpha}, \qquad \text{б) } f(x) = \lim_{y\to+0} f(x+iy) \in \Lambda_\alpha^{p_0}.$$

Обозначим через $\widetilde{\psi}(x)$ функцию, сопряженную с $\psi(x)$, т. е. ее преобразование Гильберта

$$\widetilde{\psi}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x|>\varepsilon} \frac{\psi(t)dt}{x-t}, \quad \text{если} \quad \psi(t) \in L^p \quad (1 \le p < \infty)$$

или

$$\widetilde{\psi}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x|>\varepsilon} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2}\right) \psi(t)dt, \quad \text{если} \quad \psi(t) \in L^1\left(\frac{dt}{1+t^2}\right).$$

Отметим, что $L^p \subset L^1(dt/(1+t^2))$ при любом p $(1 \le p \le \infty)$, и $BMO(\mathbb{R}) \subset$ $\subset L^1(dt/(1+t^2))$.

Лемма 4.2. *Пусть* $0 < \alpha < \infty$, $1 \le p, q \le \infty$ *и* $1 < p_0 < \infty$. *Тогда*

а) *если* $\psi(x) \in \Lambda_\alpha^{p_0,p,q}$, *то* $\widetilde{\psi}(x) \in \Lambda_\alpha^{p_0,p,q}$,

б) *если* $\psi(x) \in \Lambda_\alpha^{\infty,p,q}$, *то* $\widetilde{\psi}(x) \in \Lambda_\alpha^{BMO,p,q}$,

в) *если* $\psi(x) \in \Lambda_\alpha^{BMO,p,q}$, *то* $\widetilde{\psi}(x) \in \Lambda_\alpha^{BMO,p,q}$.

Доказательство. Не теряя общности можно считать, что функция $\psi(x)$ вещественнозначна. Кроме того, $\widetilde{\psi} \in BMO$, если $\psi \in L^\infty$ или $\psi \in BMO$ (см., напр., [17]). Введем в рассмотрение функцию

$$U(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-t,y)\psi(t)dt,$$

и функцию

$$\widetilde{U}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}Q(x-t,y)\psi(t)dt, \quad \text{если} \quad \psi(t)\in L^{p_0}\,(1<p_0<\infty),$$

$$\widetilde{U}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[Q(x-t,y)+\frac{1}{\pi}\frac{t}{1+t^2}\right]\psi(t)dt, \quad \text{если} \quad \psi\in L^{\infty} \quad \text{или} \quad \psi\in \mathrm{BMO}.$$

Здесь $P(x,y)=y/(\pi(x^2+y^2))$ и $Q(x,y)=x/(\pi(x^2+y^2))$, соответственно – ядро и сопряженное ядро Пуассона. Заметим, что

$$\widetilde{U}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x-t,y)\widetilde{\psi}(t)dt,$$

и почти для всех $x\in\mathbb{R}$ имеем $\lim_{y\to+0}U(x,y)=\psi(x)$ и $\lim_{y\to+0}\widetilde{U}(x,y)=\widetilde{\psi}(x)$. Отсюда, в силу лемм A и 4.1 следуют все необходимые утверждения, поскольку U и $\widetilde{U}$ – гармонически сопряженные функции.

Для функций $f(z)=f(x+iy)$, определенных в G^+, вместо интегродифференцирования Вейля по переменной y будем иногда пользоваться таким же интегродифференцированием по переменной x. Функции

$$W_{x(\pm)}^{-\alpha}f(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\sigma^{\alpha-1}f(z\mp\sigma)d\sigma, \quad \alpha>0$$

будем называть, соответственно, левосторонним и правосторонним вейлевскими первообразными (интегралами) порядка α по переменной x от функции $f(z)$. Аналогично, производная $f(z)$ порядка $\alpha>0$ определяется формулой

$$W_{x(\pm)}^{\alpha}=(\pm1)^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}W_{x(\pm)}^{-(n-\alpha)},$$

где n – целое число, определенное неравенствами $n-1<\alpha\le n$.

Лемма 4.3. а) *Класс $H_\alpha^1(G^+)$ $(0<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций $g(z)$, представимых в виде*

$$g(z)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{(it-iz)^{\beta+1}}dt, \quad z\in G^+, \tag{4.1}$$

где $\beta>\alpha$ – любое число, $\varphi(t)\equiv\varphi_\beta(t)$ – любая вещественнозначная функция, k раз дифференцируемая в $\mathbb{R}$ (k – целое число, определяемое из неравенств $k<\beta-\alpha\le k+1$) и такая, что

$$\varphi^{(k)}(t)\in\Lambda^p_{\beta-\alpha-k} \quad \text{при некотором} \quad p, \quad 1\le p\le\infty. \tag{4.2}$$

б) *Если функция $g(z)$ представима в виде (4.1)–(4.2) с $\beta \in (\alpha, \alpha+1)$, то почти для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение*

$$\varphi(x) = \lim_{y\to+0} W^{-\beta} Re\ g(x+iy). \tag{4.3}$$

Доказательство. а) Пусть $0 < \alpha < \infty$ и $g(z) \in H^1_\alpha$ – какая-либо функция. Полагая $\beta > \alpha$, введем в рассмотрение функцию $\psi(z) = e^{i(\alpha-\beta)\pi/2} W_y^{-\alpha} g(z)$. Как легко проверить, $\psi(z) \in H^1(G^+)$. Тем самым, имеет место представление Пуассона

$$\mathrm{Re}\ \psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathrm{Re}\ \frac{1}{\pi i(t-z)}\right] \mathrm{Re}\ \psi(t)dt$$

и

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}\ \psi(t)}{t-z}dt. \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что

$$e^{i(\alpha-\beta)\pi/2} g(z) = W_y^\alpha \psi(z), \tag{4.5}$$

так как очевидно $H^1_\alpha(G^+) \subset M_\gamma$ для всех $\gamma \in (0, \alpha+1)$, и, тем самым, оператор Вейля обратим (т. е. $W_y^\alpha W_y^{-\alpha} = W^0$) в классах $H^1_\alpha(G^+)$ (см. [15], формулу (1.19)). Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$W_y^\alpha \left[\frac{1}{\pi i(t-z)}\right] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi} \frac{1}{[i(t-z)]^{\alpha+1}}, \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{[i(t-z)]^{\alpha+1}} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)} e^{i(\alpha-\beta)\pi/2} \left[W_{t(+)}^{-(\beta-\alpha)} \frac{1}{(it-iz)^{\beta+1}}\right]. \tag{4.7}$$

Из формул (4.4) – (4.7) вытекает представление

$$g(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\ \psi(t) \left[W_{t(+)}^{-(\beta-\alpha)} \frac{1}{(it-iz)^{\beta+1}}\right] dt.$$

Поменяв порядок интегрирования, заключаем, что

$$g(z) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_{(-)}^{-(\beta-\alpha)}\mathrm{Re}\ \psi(t)}{(it-iz)^{\beta+1}}dt. \tag{4.8}$$

Теперь остается только показать, что функция $\varphi(t) = W_{(-)}^{-(\beta-\alpha)}\mathrm{Re}\ \psi(t)$ удовлетворяет условию (4.2). Для этого мы докажем, что этому условию удовлетворяет функция $f(t) = W_{(-)}^{-(\beta-\alpha)}\psi(t)$. Не теряя общности, можно считать, что

$0 < \beta - \alpha \le 1$, т. е. $k = 0$ (при $k \ge 1$ интеграл (4.8) проинтегрируем по частям k раз). Сначала предположим, что $0 < \beta - \alpha < 1$. Ясно, что функция $f(t)$ допускает голоморфное продолжение в G^+ :

$$f(x+iy) = W_{x(-)}^{-(\beta-\alpha)}\psi(x+iy) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^{+\infty} \sigma^{\beta-\alpha-1}\psi(\sigma+x+iy)d\sigma.$$

Как следует из результатов [23] (теоремы G и H), интеграл Вейля $W_x^{-\gamma}$ $(0<\gamma<$ $<1)$ является ограниченным оператором из $H^1(G^+)$ в $H^{1/(1-\gamma)}(G^+)$. Тем самым, $f(z) \in H^{1/(1-\beta+\alpha)}(G^+)$. Далее, для операторов Вейля W_x^γ и W_y^γ справедливы неравенства

$$\|W^\gamma F\|_{H^1_\lambda} \le c(\gamma,\lambda)\|F\|_{H^1_{\lambda-\gamma}}, \tag{4.9}$$

$$\|W^{-\gamma} F\|_{H^1_{\lambda-\gamma}} \le c(\gamma,\lambda)\|F\|_{H^1_\lambda}, \qquad 0<\gamma<\lambda, \tag{4.10}$$

которые доказываются тем же способом, что и лемма А, пользуясь (4.9) и (4.10). Действительно, по лемме А $g'(z) \in H^1_{\alpha+1}(G^+)$, а по (4.10) $\psi'(z) \in H^1_1(G^+)$. Тем самым, $f'(z) \in H^1_{1-\beta+\alpha}(G^+)$. По той же причине $f'(z) = W_x^{-(\beta-\alpha)}\psi'(z) \in$ $\in H^1_{1-\beta+\alpha}(G^+)$. Ввиду леммы 4.1, $f(x) = \lim_{y\to+0} f(x+iy) \in \Lambda_{\beta-\alpha}^{1/(1-\beta-\alpha)}$. В случае когда $\beta - \alpha = 1$ то же рассуждение приводит к включениям $f(z) \in$ $\in H^\infty(G^+)$ и $f(x) \in \Lambda_1^\infty$. Для доказательства обратного утверждения предположим, что $g(z)$ – функция, представимая в виде (4.1) – (4.2) при некотором $\beta > \alpha$. Не теряя общности можно считать, что $\alpha < \beta \le \alpha+1$, т. е. $k = 0$ (при $k \ge 1$ интеграл (4.1) проинтегрируем по частям k раз). Рассмотрим по отдельности три случая : $1 < p < \infty$, $p = 1$ и $p = \infty$. В силу теорем вложения классов Бесова (см., напр., [18], теорему 9, или [22], гл. V, раздел 6.7)

$$\Lambda_\gamma^1 \subset \bigcap_{1<q<1/(1-\gamma)} L^q(\mathbb{R}) \quad (0<\gamma\le 1).$$

Следовательно, случай $p = 1$ приводится к случаю $1 < p < \infty$. Приведем полное доказательство только для наиболее сложного случая $p = \infty$. Рассмотрим функции

$$U(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-t,y)\varphi(t)dt,$$

$$\widetilde{U}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[Q(x-t,y)+\frac{1}{\pi}\frac{t}{1+t^2}\right]\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x-t,y)\widetilde{\varphi}(t)dt,$$

$$F(z)=U(z)+i\widetilde{U}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+tz}{(t-z)(1+t^2)}\varphi(t)dt,\qquad z=x+iy. \tag{4.11}$$

По лемме 4.2 $\widetilde{\varphi}(x)\in\Lambda^{BMO}_{\beta-\alpha}$, поскольку $\varphi(x)\in\Lambda^{\infty}_{\beta-\alpha}$. Очевидно, что некасательные пределы $F_{\pm}(x)=\lim_{z\to x,z\in G^{\pm}}F(z)$ тоже принадлежат классам $\Lambda^{BMO}_{\beta-\alpha}$. В частности, $F_{\pm}(x)\in L^2(dx/(1+x^2))$ (см., например, [17]). Функция $\Phi(z)=$ $=F(z)/(i+z)$ приналлежит классу $H^2(G^+)$, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(t)dt}{t-\overline{z}}=0,\qquad z\in G^+.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F_+(t)\left[\frac{1}{t-\overline{z}}-\frac{1}{t+i}\right]dt=0,\qquad z\in G^+, \tag{4.12}$$

и аналогично

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F_-(t)\left[\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-i}\right]dt=0,\qquad z\in G^+. \tag{4.13}$$

Далее, дифференцируя (4.12) и (4.13) по переменной y посредством оператора Вейля W^{β}, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_+(t)dt}{(t-\overline{z})^{\beta+1}}=0,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_-(t)dt}{(t-z)^{\beta+1}}=0,\qquad z\in G^+, \tag{4.14}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_+(x-t)dt}{(t-iy)^{\beta+1}}=0,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_-(x+t)dt}{(t-iy)^{\beta+1}}=0,\qquad z\in G^+. \tag{4.15}$$

Интеграл в (4.11) можно рассматривать как интеграл типа Коши от функции $\omega(t,z)=2(1+tz)\varphi(t)/(1+t^2)$. Согласно формулам Сохоцкого–Племеля

$$F_+(x)-F_-(x)=\omega(x,x)=2\varphi(x)\quad \text{почти для всех}\quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.16}$$

Используя формулы (4.14) – (4.16), преобразуем функцию $g(z)$:

$$\begin{aligned}g(z)=&\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_+(t)-F_-(t)}{[i(t-z)]^{\beta+1}}dt=\\&=\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_+(x+t)+F_+(x-t)-2F_+(x)}{[i(t-iy)]^{\beta+1}}dt.\end{aligned}$$

Далее, оценивая получаем

$$\|g\|_{H^1_\alpha} \leq c(\alpha,\beta) B^{1,1}_{\beta-\alpha}(F_+) < +\infty.$$

Наконец, для установления формулы (4.3) применяем к обеим частям представления (4.1) оператор Вейля $W_y^{-\beta}$ и устремляем $y \to +0$. Это завершит доказательство леммы 4.3.

Теперь нетрудно доказать и теорему 3. Пусть $0 < \alpha < \infty$, $\beta > \alpha$ – любые числа, и пусть $u(z) \in S^*_\alpha(G^+)$ – какая-либо функция. По лемме 3.1 мера Рисса μ, ассоциированная с $u(z)$, удовлетворяет условию (1.24), а по лемме 3.4 потенциал типа Грина $I_\beta(z) \equiv I_\beta(z,\mu)$ принадлежит $S^*_\alpha(G^+)$. Следовательно, гармоническая функция $h(z) = u(z) - I_\beta(z)$ принадлежит классу $S^*_\alpha(G^+)$, т. е. классу $h^1_\alpha(G^+)$. Поскольку оператор гармонического сопряжения – ограниченный оператор из h^1_α в h^1_α (см., например, [24] или [5]), то функция $g(z)$ ($\mathrm{Re}\ g(z) = h(z)$) принадлежит $S^*_\alpha(G^+)$, и остается только применить лемму 4.3. Обратно, если функция $u(z)$ представима в виде (1.27) – (1.28), то, опять же по леммам 3.4 и 4.3, $u(z) \in S^*_\alpha(G^+)$. Тем самым, класс $S^*_\alpha(G^+)$ совпадает с множеством всех субгармонических функций $u(z)$, удовлетворяющих условиям (1.6) и (1.23). Для доказательства формулы обращения (1.29) используем некоторые свойства потенциалов типа Грина А. М. Джрбашяна [16], записанного в верхней полуплоскости G^+ :

$$I^*_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} \log|b_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \quad z \in G^+,$$

$$b_\beta(z,\zeta) = \exp\left[-\int_0^\eta \left(\frac{1}{(\tau + i\zeta - iz)^{\beta+1}} + \frac{1}{(i\bar\zeta - iz - \tau)^{\beta+1}}\right)\tau^\beta\, d\tau\right], \ \zeta = \xi + i\eta.$$

Повторяя рассуждения доказательств леммы 1.3 из [13] и теоремы 2, можно показать, что функция $W_y^{-\beta} I^*_\beta(z)$ $(\alpha < \beta < \alpha + 1)$ непрерывна и субгармонична в G^+, и что справедливо представление

$$W^{-\beta} I^*_\beta(z) = \iint\limits_{G^+} W^{-\beta} \log|b_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta), \quad z \in G^+.$$

Так как для любой фиксированной точки $\zeta \in G^+$ имеем $W^{-\beta}\log|b_\beta(z,\zeta)| < 0$ $(z \in G^+)$, то функция $W^{-\beta} I^*_\beta(z)$ неположительна в G^+ и допускает представление

$$W^{-\beta} I_\beta^*(z) = Cy + I_0(z,\lambda) + h_\beta(z), \quad z = x + iy \in G^+,$$

где C – неположительная постоянная, λ – мера в G^+ такая, что

$$\iint\limits_{G^+} \frac{\operatorname{Im}\zeta}{1+|\zeta|^2} d\lambda(\zeta) < +\infty,$$

а $h_\beta(z)$ – интеграл Пуассона–Стилтьеса. По теореме Литтлвуда (см., например, [17]), почти при всех $x \in \mathbb{R}$ функция $W^{-\beta} I_\beta^*(z)$ имеет конечные граничные значения $\lim_{y\to+0} W^{-\beta} I_\beta^*(x+iy)$. С другой стороны, эти значения нулевые, так как

$$W^{-\beta} \log|b_\beta(x,\zeta)| = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

(см. [13], теорему 2.1), и по лемме Фату

$$\limsup_{y\to+0} |W^{-\beta} I_\beta^*(z)| \le \iint\limits_{G^+} \limsup_{y\to+0} \left|W^{-\beta} \log|b_\beta(z,\zeta)|\right| d\mu(\zeta) = 0.$$

Кроме того, функция

$$\Psi_\beta(z) = W^{-\beta} I_\beta^*(z) - W^{-\beta} I_\beta(z) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \operatorname{Re} \iint\limits_{G^+} \left[\int_\eta^{2\eta} \frac{\tau^\beta d\tau}{\tau + i\zeta - iz} - \int_0^\eta \frac{\tau^\beta d\tau}{i\zeta - iz - \tau}\right] d\mu(\zeta)$$

допускает представление

$$\Psi_\beta(z) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \iint\limits_{G^+} \eta^{\beta+1} \left[\int_0^1 \frac{\eta\sigma + y}{(\eta\sigma+y)^2 + (\xi - x)^2} \left((1+\sigma)^\beta - (1-\sigma)^\beta\right) d\sigma\right] d\mu(\zeta)$$

и она гармонична и неотрицательна в G^+. Применив к (1.27) оператор Вейля $W_y^{-\beta}$ порядка β, получим

$$W^{-\beta} u(x+iy) = W^{-\beta} I_\beta(x+iy) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i(t-z)}\right] \varphi(t) dt =$$
$$= W^{-\beta} I_\beta^*(x+iy) - \Psi_\beta(x+iy) + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^2 + y^2}.$$

Полагая, что $x \in \mathbb{R}$ фиксировано, устремим $y \to +0$ и придем к (1.29), чем и завершим доказательство теоремы 3.

В заключение приведем формулировки двух теорем, являющихся усилениями теорем 1 и 2 из [10]. Их доказательства вполне аналогичны доказательствам леммы 4.3 и теорем 3 и 4.

Теорема 5. **а)** *Класс* $S^*_\alpha(G^+)$ $(0 < \alpha < \infty)$ *совпадает с множеством функций, представимых в* G^+ *в виде*

$$u(z) = \iint\limits_{G^+} \log|a_\beta(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[Re\ \frac{1}{(it-iz)^{\alpha+1}}\right]d\psi(t), \qquad (4.17)$$

где $\beta > \alpha$ *– любое число,* $\mu(\zeta)$ *– мера в* G^+*, удовлетворяющая условию (1.6), а* $\psi(t)$ *– любая вещественнозначная функция ограниченной вариации на* $\mathbb{R}$*, принадлежащая* Λ_1^∞.

б) *Если функция* $u(z)$ *представима в виде (4.17), то ассоциированная с нею мера Рисса совпадает с* μ*. Кроме того, если число* $\beta \in (\alpha, \alpha+1)$ *не целое, то*

$$\psi(x) = \lim_{y\to+0}\int_0^x W^{-\alpha}u(t+iy)dt + \lim_{y\to+0}\int_0^x \Psi_{\alpha,\beta}(t+iy)dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

где $\Psi_{\alpha,\beta}(x+iy)$ *– функция класса* $h^1(G^+)$.

Теорема 6. **а)** *Класс* $S^*_\alpha(\mathbb{D})$ $(0 < \alpha < \infty)$ *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$u(z) = C\log|z| + \iint\limits_{\mathbb{D}} \log|A_\beta(z,\zeta)|d\nu(\zeta) +$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mathrm{Re}\ \frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{\alpha+1}} - 1\right]d\psi(\theta), \quad z \in \mathbb{D}, \qquad (4.18)$$

где $\beta > \alpha$ *– любое число,* $\nu(\zeta)$ *– мера в* $\mathbb{D}$*, удовлетворяющая условию (1.4), а* $\psi(\theta)$ *– любая вещественнозначная функция ограниченной вариации на* $[-\pi,\pi]$*, принадлежащая классу* $\lambda_1^{1,1}$.

б) *Если функция* $u(z)$ *представима в виде (4.18), то*

$$\psi(\theta) = \lim_{r\to1-0}\int_0^\theta r^{-\alpha}D^{-\alpha}u(re^{it})dt + \lim_{r\to1-0}\int_0^\theta \Psi_{\alpha,\beta}(re^{it})dt, \qquad \theta \in [-\pi,\pi],$$

где $\Psi_{\alpha,\beta}(re^{i\theta})$ *– функция из класса Харди* $h^1(\mathbb{D})$.

ABSTRACT. **The paper establishes some useful properties of the Green type potentials for the unit disk and for the half–plane of the complex plane, constructed by means of the Blaschke type factors of M. M. Djrbashian and similar factors of A. M. Jerbashian and G. V. Mikaelian.**

The main results of the paper are some Riesz type representations for some weighted classes of subharmonic functions. These results are improvements of the representations of holomorphic and harmonic functions obtained by M. M. Djrbashian and F. A. Shamoyan in the disk and by A. M. Jerbashian in the half-plane. Here these representations are extended on subharmonic functions and representing measures are modified by the use of Besov's functional classes. Also the similarities of the Stieltjes inversion formula are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.– Л., 1941.
2. М. М. Джрбашян, "О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций", ДАН Арм. ССР, т. 3, № 1, стр. 3 – 9, 1945.
3. М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщения Инст. Матем. и Мех. АН Арм. ССР, вып. 2, стр. 3 – 40, 1940.
4. Ф. А. Шамоян, " Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 13, № 5 – 6, стр. 405 – 422, 1978.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner-Texte zur Math., b. 105, Leipzig, 1988.
6. Ф. А. Шамоян, "О параметрическом представлении классов Неванлинны–Джрбашяна", ДАН Арм. ССР, т. 90, № 3, стр. 99 – 103, 1990.
7. Ф. А. Шамоян, " Некоторые замечания о параметрическом представлении классов Неванлинны–Джрбашяна", Мат. заметки, т. 52, № 1, стр. 128 – 140, 1992.
8. А. М. Джрбашян, " Параметрические представления некоторых классов мероморфных функций с неограниченной характеристикой Цудзи", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 22, № 5, стр. 451 – 422, 1987.
9. К. Л. Аветисян, "О параметрическом представлении некоторых классов функций, голоморфных в полуплоскости", Деп. в Арм. НИИНТИ, № 3, стр. 2, № 5, 14 октяб., 1992.
10. К. Л. Аветисян, "О представлениях некоторых классов функций, субгармонических в единичным круге и полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 3 – 15, 1994.
11. М. М. Джрбашян, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
12. М. М. Джрбашян, " Классы функций и их параметрическое представление", Современные проблемы теории аналитических функций, Международная конференция по теории аналитических функций, Ереван, 1965, с. 118 – 137, Наука, Москва, 1966.
13. А. М. Джрбашян, "О некоторых классах субгармонических функций", Изв. НАН Армении, Математика, т. 29, № 1, стр. 34 - 49, 1994.
14. А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян, "Построение и основные свойства одного семейства функций типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 15, № 6, стр. 461 – 474, 1980.
15. А. М. Джрбашян, "Соотношения равновесия и факторизационные теоремы для функций, мероморфных в полуплоскости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 21, № 3, стр. 213 – 279, 1986.
16. А. М. Джрбашян, "Функции типа Бляшке для полуплоскости", Изв. АН Арм. ССР, Математика, т. 18, № 6, стр. 409 – 440 1983.

17. J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, N.Y., 1981.
18. M. H. Taibleson, " On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n–space, I. Principle properties", J. Math. Mech., vol. 13, pp. 407 – 479, 1964.
19. В. И. Крылов, "О функциях, регулярных в полуплоскости", Мат. сборник, т. 6 (48), № 1, стр. 95 – 138, 1939.
20. Е. Д. Соломенцев, "О классах функций, субгармонических в полупространстве", Вестник МГУ, сер. мат., т. 5, стр. 73 – 91, 1959.
21. W. K. Hayman, " Questions of regularity connected with the Phragmén–Lindelöf principle", J. Math. pures et appl., vol. 35, pp. 115 – 126, 1956.
22. E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.
23. E. M. Stein, G. Weiss, " On the theory of harmonic functions of several variables, I. The theory of H^p–spaces", Acta Math., vol. 103, № 1 – 2, pp. 25 – 62, 1960.
24. Ф. А. Шамоян, "Приложения интегральных представлений Джрбашяна к некоторым задачам анализа", ДАН СССР, т. 261, № 3, стр. 557 – 561, 1981.

6 февраля 1995 Ереванский государственный университет