Посвящено светлой памяти
профессора М. М. Джрбашяна

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ

Г. С. Кочарян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том. 30, № 2, 1995

В статье исследована сходимость в среднем на замкнутых кривых разложений функций по некоторым системам рациональных функций с заданными полюсами.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Если функция $f(z)$ принадлежит классу H_p $(p > 0)$ в единичном круге, т. е. аналитична в $|z| < 1$ и при всех $r < 1$

$$\int_{|z|=r} |f(z)|^p |dz| \leq \mathbf{K}, \quad \text{где} \quad \mathbf{K} < +\infty - \text{постоянная},$$

то, как известно, почти всюду на единичной окружности $|z| = 1$ существуют некасательные граничные значения $f(z)$ при $|z| \to 1$ и

$$\int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz| \leq \mathbf{K}.$$

Хорошо известно, что если

$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < 1$$

– разложение Тейлора функции $f(z) \in H_p$ $(p > 1)$, то на окружности $|z| = 1$ имеет место сходимость в среднем :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \right|^p |dz| = 0.$$

Далее, если функция $f(z)$ определена лишь на единичной окружности, где она принадлежит классу L^p $(p > 1)$, т. е.

$$\int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz| < +\infty,$$

то $f(z)$ разлагается в ряд Фурье, сходящийся в среднем на $|z| = 1$:

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{|z|=1} \left| f(z) - \sum_{k=-m}^{n} c_k z^k \right|^p |dz| = 0.$$

Система функций $\{z^k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ ортогональна на единичной окружности. При этом, она является системой рациональных функций с полюсами в точках $z = 0$ и $z = \infty$.

Ниже мы рассмотрим разложения функций по обобщенным системам Уолша рациональных функций с заданным множеством полюсов.

§2. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Будем предполагать, что G – произвольная ограниченная, односвязная область со спрямляемой жордановой границей Γ, а G^* – ее дополнение, содержащее точку $z = \infty$. Далее, будем предполагать, что функция $w = \Phi(z)$ осуществляет конформное отображение области G^* на $|w| > 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$ и $\lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z > 0$. Пусть $z = \psi(w)$ – обратная к Φ функция. Тогда функция

$$g(W,w) = \frac{\sqrt[q]{\psi'(w)}\sqrt[q]{\psi'(W)}}{\psi(W) - \psi(w)} - \frac{1}{W - w}$$

аналитична при $|w| > 1$ и $|W| > 1$. Положим

$$g_r(w) = \left\{ \int_{|W|=r} |g(W,w)|^q |dW| \right\}^{1/q},$$

где числа $p, q \geq 1$ удовлетворяют условию $p^{-1} + q^{-1} = 1$, а $r > 1$ произвольно.

Определение 1. Будем говорить, что кривая Γ принадлежит классу $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(\mathrm{M})$, если

$$\sup_{r,\rho>1} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|w|=\rho} |g_r(w)|^p |dw| \right\}^{1/p} = M < +\infty. \qquad (1)$$

Определение 2. Аналитическую в области G функцию $f(z)$ отнесем к классу E_p, если существует постоянная $\mathrm{K} > 0$ такая, что

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| \leq \mathrm{K}$$

для любой замкнутой, спрямляемой кривой $\Gamma_r \subset G$.

Хорошо известно, что любая функция $f(z) \in E_p$ $(z \in G)$ обладает некасательными граничными значениями почти всюду на границе Γ, при этом

$$\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta| < +\infty,$$

т. е. на окружности $|\tau| = 1$

$$\sqrt[p]{\psi'(\tau)} f[\psi(\tau)] \in L_p. \tag{2}$$

По существу, интеграл типа Коши

$$\theta(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\sqrt[p]{\psi'(\tau)} f[\psi(\tau)]}{\tau - w} d\tau \tag{3}$$

определяет пару функций – $\theta(w)$ и $\theta^*(w)$, аналитических, соответственно, в областях $|w| < 1$ и $|w| > 1$.

Теорема 1. *Если граница Γ области G принадлежит классу $\mathcal{M}_1(M)$ и $f(z) \in E_p$ $(p > 1)$ в G, то функция $\theta(w) \in H_p$ в круге $|w| < 1$. Кроме того*

$$C \int_{|\tau|=1} |\theta(\tau)|^p |d\tau| \leq \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta| \leq (1 + M)^p \int_{|\tau|=1} |\theta(\tau)|^p |d\tau|,$$

где $C > 0$ – постоянная.

Доказательство. В силу теоремы Рисса из (2) следует, что почти для всех t $(|t| = 1)$ существует сингулярный интеграл

$$S(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\sqrt[p]{\psi'(\tau)} f[\psi(\tau)]}{\tau - t} d\tau \quad (|t| = 1).$$

По той же теореме $S(f) \in L_p$ на $|t| = 1$ и

$$\int_{|t|=1} |S(f)|^p |dt| \le C_1 \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |d\zeta|.$$

Пользуясь основной теоремой И. И. Привалова, из (3) получим, что

$$\theta(t) = S(f) + \frac{1}{2} \sqrt[p]{\psi'(t)} f[\psi(t)]$$

почти всюду на $|t| = 1$. Тем самым, интеграл типа Коши $\theta(w)$ обладает некасательными граничными значениями, суммируемыми в степени p. Отсюда, по теореме В. И. Смирнова, $\theta(w) \in H_p$ и

$$\int_{|\tau|=1} |\theta(\tau)|^p |d\tau| \le C_2 \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |d\zeta|. \tag{3'}$$

Ввиду той же теоремы И. И. Привалова из (3) получим, что

$$\theta(t) - \theta^*(t) = \sqrt[p]{\psi'(t)} f[\psi(t)]$$

почти всюду на $|t| = 1$, и

$$f(\zeta) = \sqrt[p]{\Psi'(\zeta)} \{\theta[\Psi(\zeta)] - \theta^*[\Psi(\zeta)]\} \tag{4}$$

почти всюду на Γ. Для функции $\theta^*(w)$, аналитической в $|w| > 1$, ввиду (4) справедливо представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G, \tag{5}$$

которое является обращением формулы (3). Снова воспользовавшись теоремой И. И. Привалова, из (5) получим, что для граничных значений функции $f(z)$ почти всюду на Γ справедлива формула

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta - \xi} d\zeta + \frac{1}{2} \sqrt[p]{\Psi'(\xi)}\theta[\Psi(\xi)],$$

или почти всюду на окружности $|t| = 1$

$$\sqrt[p]{\psi'(t)} f[\psi(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\sqrt[p]{\psi'(t)}\, \sqrt[q]{\psi'(\tau)}}{\psi(\tau) - \psi(t)} \theta(\tau) d\tau + \frac{1}{2}\theta(t). \tag{6}$$

Так как функция $\theta(w)$ аналитична в $|w|<1$, то почти для всех t ($|t|=1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\theta(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{2}\theta(t).$$

Отсюда и из (6) следует, что

$$\sqrt[q]{\psi'(t)}f[\psi(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}g(\tau,t)\theta(\tau)d\tau+\theta(t)\qquad(|t|=1).\tag{7}$$

Теперь положим

$$\chi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}g(\tau,t)\theta(\tau)d\tau.$$

Пользуясь неравенством Гельдера для нормы

$$||\theta||_p=\left\{\int_{|\tau|=1}|\theta(\tau)|^p|d\tau|\right\}^{1/p},$$

получим, что почти для всех t ($|t|=1$)

$$|\chi(t)|\le\frac{1}{2\pi}||\theta||_p||g(\tau,t)||_q,$$

откуда и из (3′), (7) следует утверждение теоремы.

§3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

а) Пусть G – ограниченная, односвязная область с жордановой спрямляемой границей Г, содержащей точку $z=0$, функция $w=F(z)$ конформно отображает область G на круг $|w|>1$ так, что $F(0)=\infty$ и $\lim_{z\to0}zF(z)>0$, а $z=\varphi(w)$ – обратное отображение.

Для последовательности чисел $\{\lambda_k\}_1^\infty\subset G^*$ (некоторые из которых могут совпадать) построим рациональные функции

$$\chi_m(w)=\frac{\sqrt{|\lambda_m^*|^2-1}}{\lambda_m^*-w}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1-\lambda_k^*w}{w-\lambda_k^*}\quad(m=1,2,\ldots),\tag{8}$$

где $\lambda_k^*=\Phi(\lambda_k)$ и $\prod_{k=1}^{0}=1$. Следуя М. М. Джрбашяну [1], рассмотрим рациональные функции

$$M_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\sqrt[q]{\Psi'(\zeta)}\frac{\chi_m[\Psi(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta,\qquad z\in G\tag{9}$$

с полюсами $\{\lambda_k\}$. Равномерная сходимость в G ряда по системе $\{M_m(z)\}$ впервые была исследована М. М. Джрбашяном [1],[2] (1957), а затем Г. Ц. Тумаркиным [3] (1961). Такой ряд будет сходится также на Γ, после наложения дополнительного ограничения на границу Γ области G.

Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу E_p $(p > 1)$ в области G с границей $\Gamma \in \mathcal{M}_1$. Если полюсы системы (9) удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\lambda_k^*|^{-1}) = +\infty, \tag{10}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} a_k M_k(\zeta)\right|^p |d\zeta| = 0,$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \sqrt[p]{\psi'(\tau)} f[\psi(\tau)]\overline{\chi_k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Кроме того, имеет место эквивалентность

$$C\int_{|\tau|=1}\left|\theta(\tau) - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(\tau)\right|^p |d\tau| \le \int_\Gamma \left| f(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} a_k M_k(\zeta)\right|^p |d\zeta| \le$$
$$\le (1+M)^p \int_{|\tau|=1}\left|\theta(\tau) - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(\tau)\right|^p |d\tau|.$$

Доказательство. Из (9) следует, что функции

$$f(z) - \sum_{k=1}^{n} a_k M_k(z), \quad z \in G$$

в представлении (5) соответствует

$$\theta(w) - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(w) \quad (|w| < 1).$$

Далее, как было показано А. А. Китбаляном [4], для любой функции $\theta(w) \in H_p$, удовлетворяющей условию (3), справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\theta(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(t)\right\|_p = 0,$$

что, вместе с теоремой 1 приводит к нужному утверждению.

Отметим, что аналог теоремы 2 при других предположениях относительно области G при $p = 2$ был анонсирован Г. Ц. Тумаркиным [5]. В специальном случае, когда все $\{\lambda_k\}_1^\infty$ совпадают с точкой $z = \infty$, система $\{M_k(z)\}_1^\infty$ переходит в систему полиномов Фабера. Для системы Фабера утверждение теоремы 2 было доказано Розенблюмом и Варшавским [5] (при $p = 2$) и С. Я. Альпером [6] (при $p > 1$). Однако, в последней работе область G была подчинена несколько иным условиям.

б) Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(z) \in L_p$ задана лишь на жордановой спрямляемой кривой Γ. Пусть $\{\mu_k\}_1^\infty \subset G$ – другая последовательность чисел. Построим функции

$$\psi_m(w) = \frac{\sqrt{|\mu_m^*|^2 - 1}}{\mu_m^* - w} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1 - \overline{\mu_k^*} w}{w - \mu_k^*} \quad \mu_k^* = F(\mu_k) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

и

$$N_m(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sqrt[q]{F'(\zeta)}\psi_m[F(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in G^* \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

$$q(W, w) = \frac{\sqrt[q]{\varphi'(w)}\sqrt[q]{\varphi'(W)}}{\varphi(W) - \varphi(w)} - \frac{1}{W - w}.$$

Отметим, что функция $q(W, w)$ аналитична при $w \in G^*$ и $W \in G^*$. Положим

$$q_r(w) = \left\{ \int_{|w|=r} |q(W, w)|^q |dw| \right\}^{1/q} \qquad (r > 1).$$

Будем говорить, что кривая Γ принадлежит классу $\mathcal{M}_2$, если для любых $r > 1$ и $\rho > 1$

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{|w|=\rho} |q_r(w)|^p |dw| \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Теорема 3. *Пусть $\Gamma \in \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ – замкнутая жорданова спрямляемая кривая. Если*

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |\lambda_k^*|^{-1}) = +\infty \quad и \quad \sum_{k=1}^\infty (1 - |\mu_k^*|^{-1}) = +\infty,$$

то для любой функции $f(z) \in L_p$ $(p > 1)$, заданной на Γ, справедливо соотношение

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_\Gamma\left|f(z)-\sum_{k=1}^n a_kM_k(z)-\sum_{k=1}^m b_kN_k(z)\right|^p|dz|=0,$$

где

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\sqrt[p]{\psi'(\tau)}f[\psi(\tau)]\overline{\chi_k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau},$$
$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\sqrt[p]{\varphi'(\tau)}f[\varphi(\tau)]\overline{\psi_k(\tau)}\frac{d\tau}{\tau},\quad k=1,2,\dots$$

и

$$C\int_{|\tau|=1}\left|\theta(\tau)-\sum_{k=1}^n a_k\chi_k(\tau)-\sum_{k=1}^m b_k\psi_k(\tau)\right|^p|d\tau|\le$$
$$\le\int_\Gamma\left|f(z)-\sum_{k=1}^n a_kM_k(z)-\sum_{k=1}^m b_kN_k(z)\right|^p|dz|\le$$
$$\le(1+M)^p\int_{|\tau|=1}\left|\theta(\tau)-\sum_{k=1}^n a_k\chi_k(\tau)-\sum_{k=1}^m b_k\psi_k(\tau)\right|^p|d\tau|.$$

Доказательство. Из (9) и (3) следует, что при $z\in G$

$$\sum_{k=1}^n a_kM_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\frac{\sum_{k=1}^n a_k\chi_k[\Psi(\zeta)]-\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.\quad(12)$$

Отсюда получим, что почти для всех $\zeta\in\Gamma$

$$\sum_{k=1}^n a_kM_k(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}\frac{\sum_{k=1}^n a_k\chi_k[\Psi(\zeta)]-\theta[\Psi(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta+$$
$$+\frac{\sqrt[p]{\Psi'(\zeta)}}{2}\left(\sum_{k=1}^n a_k\chi_k[\Psi(\zeta)]-\theta[\Psi(\zeta)]\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{f(\zeta)}{2}(13)$$

Аналогично получим, что при $z\in G^*$

$$\sum_{k=1}^m b_kN_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\sqrt[p]{F'(\zeta)}\frac{\lambda[F(\zeta)]-\sum_{k=1}^m b_k\psi_k[F(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

и почти для всех $\zeta\in\Gamma$

$$\sum_{k=1}^m b_kN_k(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\sqrt[p]{F'(\zeta)}\frac{\lambda[F(\zeta)]-\sum_{k=1}^m b_k\psi_k[F(\zeta)]}{\zeta-z}d\zeta-$$
$$-\frac{\sqrt[p]{F'(\xi)}}{2}\left(\lambda[F(\xi)]-\sum_{k=1}^m b_k\psi_k[F(\xi)]\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{f(\xi)}{2}(14)$$

где

$$\lambda(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\sqrt[p]{\varphi'(\tau)}f[\varphi(\tau)]}{\tau-w}d\tau\quad(|w|<1).$$

Сложив равенства (13) и (14) почти для всех $\xi\in\Gamma$ получим

$$f(\xi)-\sum_{k=1}^{n}a_kM_k(\xi)-\sum_{k=1}^{m}b_kN_k(\xi)=$$
$$=\sqrt[p]{\Phi'(\xi)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}g[\tau,\Phi(\xi)]\left(\theta(\tau)-\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k(\tau)\right)d\tau+$$
$$+\sqrt[p]{\Phi'(\xi)}\left(\theta[\Phi(\xi)]-\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_k[\Phi(\xi)]\right)dt-$$
$$-\sqrt[p]{F'(\xi)}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}q[\tau,F(\xi)]\left(\lambda(\tau)-\sum_{k=1}^{m}b_k\psi_k(\tau)\right)d\tau,$$

откуда следует нужное утверждение.

В специальном случае, когда все полюсы $\lambda_k=\infty$ и $\mu_k=0$, теорема 3 переходит в утверждение о сходимости в среднем обобщенного ряда Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Phi_k(z)+\sum_{k=1}^{\infty}b_kF_k(1/z),$$

равномерная сходимость которого была исследована в [7].

ABSTRACT. **The paper considers the mean convergence on closed curves of expansions of functions in some systems of rational functions having prescribed zeros.**

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян, "О разложениях аналитических функций по рациональным функциям с заданным множеством полюсов", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 10, № 1, стр. 21 – 29, 1957.
2. М. М. Джрбашян, "Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами", ДАН СССР, т. 143, № 1, стр. 17 – 20, 1962.
3. Г. Ц. Тумаркин, "Разложение аналитических функций по рациональным функциям с заданным множеством полюсов", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 14, № 1, стр. 9 – 31, 1961.
4. А. А. Китбалян, "Разложения по обобщенным тригонометрическим системам", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 16, № 6, стр. 3 – 24, 1963.
5. P. C. Rosenblum, S. E. Warschawski, "Approximation by polynomials", Lectures on functions of complex variable, The University of Michigan Press, pp. 287 – 302, 1955.
6. С. Я. Альпер, "О средней сходимости аналитических функций класса E_p", Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Физматгиз, Москва, 1960.
7. Г. С. Кочарян, "Об одном обобщении рядов Лорана и Фурье", Известия АН Арм. ССР, Сер. физ.– мат. наук, т. 11, № 1, стр. 3 – 14, 1958.

6 февраля 1995 Ереванский государственный университет